





CHRISTIANUS HUGENIUS
natus 14 Aprilis 1629.
denatus 8 Junii 1695.

LUGD. BAT. Apud JANSSONIOS VANDER AA, Bibliopolas.

CHRISTIANI HUGENII

ZULICHEMII,

Dum viveret Zelemii Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN PRIMUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

CHRISTIANI
HUGENII A ZULICHEM,
CONST. F.
HOROLOGIUM.


WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

G. J. 'sGRAVESANDE

L. S.

ILlos de re litteraria bene mereri, ſemper perſuaſum habui, qui doctorum virorum ſcripta diſperſa colligunt; & minoribus, ſeorſim perituris, in majori volumine collocatis poſteritatem quaſi donant.

Hac de cauſa cùm Bibliopolæ hujus Urbis, Janſonii vander Aa, *mihi declararent, ſe in mente habere* Hugenii *opus, olim* Pariſiis *editum,* de Horologio Oſcillatorio *typis mandare, & hac de re quid ſentirem ego quærerent, Ipſis Auctor fui, ut non modo in propoſito perſeverarent, ſed ut omnia ante edita ejuſdem Auctoris opera minora huic adjungerent.*

In me libenter suscepi curam colligendi hæc, & disponendi; schedasque semel & altera vice a correctore examinatas, ipse attente relegi, & cum figuris contuli; scripta etiam quædam, in Diariis non sub Auctoris oculis edita, sæpe mendis variis purgavi.

Opera quæ hic exstant, in quatuor dispersi tomos; quæ Mechanicam Machinasque spectant tomo primo continentur: Geometrica secundo: Astronomica tertio: Miscellanea pauca quarto.

Tractatus varios Auctor separatim ediderat; scripta minora multa in Diariis dispersa dantur: inter hæc quædam spectant controversias quæ Auctori cum viris doctis intercedere, & quæ ad eandem controversiam pertinent, aliquando in variis regionibus publicata exstant, partim Gallicè conscripta, partim Latinè.

In edendis libris, separatim ab Auctore publici juris factis, exemplaria manu ipsius recognita, & in variis locis aucta, & emendata, secutus sum; quod etiam referri debet ad scripta pauca ex iis quæ in Diariis fuere tradita.

Exemplaria hæc accepi à Nob. D[no] Hugenio *Zelemii Toparchâ, qui patrui* Christiani *opera hæc*

cum

cum cura ſervaverat, & qui libenter mihi hæc ea lege conceſſit, ut abſoluta editione in Bibliotheca publica Acad. Lugd. Bat. jungantur cum ejuſdem Auctoris manuſcriptis quæ ibi ſervantur.

*In Indice, ad calcem libri adjecto, monui ubi ſcripta ſingula antea edita fuere. Tractatus ſeparatos Latine Auctor conſcripſit, præter Inſtitutionem de Uſu Horologiorum *, quæ Belgico ſermone in lucem prodiit. Ex Gallicis Diariis excerpta ſcripta Gallico ſermone conſcripta dantur. Illorum autem quæ inter opera Acad. Reg. Paris. Artium & Scient. cum publico communicata fuere, quædam Gallica ſunt reliqua Latina, nempe;* * pag. 193.

De potentiis funeſve trahentibus *: * pag. 287.
Conſtructio loci ad Hyperbolam *: * pag. 485.
De maximis & minimis *: * pag. 490.
De inveniendis tangentibus *. * pag. 498.

Ut omnia Latino ſermone exhiberentur, quæ Belgicè, aut Gallicè, edita fuere, Latinè reddidit Clariſſ. Hermanni Ooſterdyk Schacht, *Med. Profeſſoris in hac Acad. Celeberrimi, Filius Digniſſimus* Johannes Ooſterdyk Schacht, *qui ad ſtudia ſubtiliora na-*

tus, à naturâ acceptum, adhuc dum juvenis, diligentiâ pulcherrime excoluit ingenium.

Si collectioni huic volumen operum posthumorum Hugenii, *& tractatus duos de* Lumine *&* Gravitate, *addas, omnia B. L. habebis* Hugenii *opera.*

Hæc autem quæ hìc deficiunt, eâdem formâ cum hisce, brevi edituri sunt Bibliopolæ Amstelodamenses Waesbergii.

Dabam Lugd. Bat. 3°. Id. Mart. MDCCXXIV.

HUGENII VITA.



CHristianus Hugenius, natus eſt Hagæ Comitum in Hollandia, 14. April. 1629. Patrem habuit Conſtantinum Hugenium, Equitem, Toparcham Zulichemii, Zelhemi, & in Monikenlandt, qui tribus Auriacis Principibus a ſecretis & conſiliis fuit. Mater erat Suſanna van Baerle.

In ſtudiis Mathematicis integram conſumſit vitam, non tantum ſpeculationibus deditus, ſed harum diſciplinarum ſubtiliſſima ad vitæ uſum referens. Ab ipſa infantia huic ſtudio applicavit animum, vix natus annos novem, ipſo Patre duce, in Muſicis, Arithméticis, Geographicis, miros, & vix credibiles, progreſſus fecit, Latinis & Græcis litteris interim animum applicans.

Anno ætatis decimo tertio quàm ingenium ſtudio Mechanices eſſet aptum, quod tanta deinde hominum utilitate excoluit, in examinandis machinis, haſque, quantum infanti liceret, imitando, demonſtravit.

Anno 1644. ſtudium Matheſeos aggreſſus eſt, Mathematicumque Belgam Stampioen præceptorem habuit.

Sequenti anno Academiam petiit quæ Leidæ eſt apud Batavos. Ibi Vinnium jus civile explicantem audivit, & magiſtro Schotenio ſtudium

Matheſeos continuavit, ingeniique ad hæc ſtudia nati varia tunc temporis dedit ſpecimina, brevique famam inter Mathematicos, annos ſuperantem, acquiſivit.

Studium autem Juridicum Bredæ proſecutus eſt annis 1646, 1647, 1648, occaſione ſcholæ illuſtris, tunc temporis ibi erectæ, & curæ Patris ipſius pro parte commiſſæ.

Hagam anno ſequenti redux, Henricum Comitem Naſſavium ſecutus, Holſatiam, & Daniam, inviſit. Vehementi tenebatur deſiderio in Sueciam uſque iter ſuum producendi, Carteſium ut videret, quod ipſi non licuit, brevi finitâ Comitis legatione.

Anno 1651. Tractatum edidit *de quadratura Hyperboles, Ellipſis, & Circuli, ex dato portionum gravitatis centro* *.

* *Vide pag.* 309.

Ut librum hunc perluſtrent Lectores rogo Mathematicos, & videant an non merito, in ipſa juventute, inter ſummos Mathematicos relatus fuerit Hugenius.

Eodem anno & ſequentibus varia de refractionibus & Dioptrica conſcripſit, quæ in operibus poſthumis edita exſtant.

Anno 1655. Galliam petiit, & Andegavi Doctor Juris renunciatus eſt.

Eodem anno cum fratre Conſtantino vitris formandis, quæ Teleſcopiis majoribus inſervirent ope-

operam dedit. Teleſcopium decem pedum conſtruxit quod, ut ipſe perſuaſum habebat, omnia illius temporis ſuperabat. Hujus auxilio comitem Saturni detexit. Omnes hujus Planetæ ſatellites tunc temporis Aſtronomos latebant, & niſi multis annis ſerius, reliquos quatuor, inter quos unus Hugeniano à Saturno remotior, detexit Caſinus.

Non ſtatim ſibi novum ſidus cognitum dari cum Aſtronomis communicavit, ad quoſdam tamen inventum, hiſce verbis & litteris involutum, miſit.

Admovere oculis diſtantia ſidera noſtris V V V V V V V C C C R R H N B Q X.

Quæ verba cum adjectis litteris ipſo vitro inſcripſit.

Explicatio eſt *Saturno Luna ſua circumducitur diebus ſexdecim horis quatuor.* Exactius tamen in ſequentibus hujus Lunæ periodum determinavit*.

* *Vide pag.* 551.

Tranſpoſitione litterarum Ænigma explicatur.

Per multos annos vitris formandis quibus nova in cœlis detegeret ſedulam cum fratre impendit operam, præcipuè ab anno 1681 ad annum 1687, artemque hanc perfectiorem reddidere; multa ex acuratè admodum elaboratis vitris majora conſtruxere Teleſcopia. Inter vi-

tra hæc duo præ ceteris antecellunt, magnitudine Telescopiorum quibus inservire debent, &, si Auctori nostri fidem habeamus, excellentiâ *; majus destinatum erat Telescopio ducentorum & decem pedum, alterum Telescopio centum & septuaginta. Hæc duo nunc possidet Anglia. Multa alia Telescopiis, centum pedes excedentibus, ut & minoribus, inservientia apud heredes adhucdum supersunt.

* Vide pag. 698.

Anno 1656 tractatum conscripsit de ratiociniis in ludo aleæ *, editus hic fuit ad calcem Exercitationum Mathematicarum Schotenii. Methodum in hoc tractatu demonstravit ipsam sortem computationi Mathematicæ subjiciendi, primusque publici juris fecit principia artis post illum ad vix sperandam perfectionem prolatæ.

* Vide pag. 723.

Anno 1657 primus mortalium tempus exactissime mensuravit, pendula dum Horologiis applicavit. Ante illum Astronomi adhibitis pendulis tempus quidem mensurabant, sed ad exigua intervalla, cum pendula talia homine indigerent qui curaret ut in motu perseverarent. Ipse autem ope Horologiorum perpetuum quasi pendulis motum communicavit, ponderibus enim Horologia agitabantur, quæ, non mutata actione in Horologia, elevari poterant.

Persuasum habebat talia Horologia & mari usui venire posse, & nil præter hæc in nave requiri ad determinandas longitudines. No-

Notum enim eſt, utilis hujus longitudinum problematis diu deſideratam, & forte deſiderandam, ſolutionem, ab exacta temporis menſura pendere.

Non tamen ſatis erat Horologiorum motus legibus fixis adſtrinxiſſe, ſed ut ipſe notabat, motum æquabilem ſervare, navim jactantibus auſtris, hoc opus, hic labor erat; difficultatem tamen ſuperari poſſe ſemper ſperavit, multa tentavit, & ad mortem fere uſque nova, ut ad ſcopum perveniret, molitus eſt; ſed licet ad hunc pertingere non potuerit, quo ingenio, qua perſpicacitate, rem proſecutus eſt, qui horum operum tomum primum perleget dijudicabit; non omnia tamen tentamina publici juris facta fuere.

Anno 1659. *Syſtema Saturnium* * edidit, in quo veram cauſam anſarum hujus planetæ tradidit, quam ante illum nemo ne ſuſpicione quidem attingere potuerat, hancque invictis firmavit argumentis.

* *Vide pag.* 527.

Sequenti anno altera vice Galliam petiit, unde in Angliam anno 1661. profectus eſt. Ibi artem ſuam laborandi vitra demonſtravit, cum inter omnes conſtaret, Hugenii Teleſcopia, longitudinem viginti quatuor pedum tunc temporis non excedentia, ceteris omnibus perfectiora eſſe.

Novum tunc temporis inventum erat Antlia pneumatica, hujus, ab ipſo ex Anglia reduce

perfectioris redditæ, auxilio varia instituit experimenta *.

* Vide pag. 765.

Eodem anno regulas de collisione corporum Elasticorum detexit, quas easdem postea etiam detexere in Anglia viri celeberrimi Wallisius & Wrennius, cum quo tamen ultimo contentionem, super hoc invento, habuit Hugenius noster.

Anno 1663. Lutetiam Parisiorum iterum petiit, & cum Patre in Angliam iter suscepit, ubi Sociorum numero Regiæ societatis Londiniensis adscriptus est.

Per paucos tantum ibi stetit menses & in Galliam rediit.

Anno 1664 Hagam redux de invento applicationis pendulorum ad Horologia ipsi cum invidioso quodam lis fuit.

Hoc tempore, in Gallia, studiorum se Mæcenatem demonstrabat vir Illustris Colbertus; cujus consilia de studiis promovendis libenter audiebat Galliarum Rex. Undique viri scientiâ illustres in Galliam vocabantur, inter quos Hugenius.

Hic anno 1665, nomine Regis, Colberti litteris, ut Lutetiam peteret, ibique domicilium eligeret, promisso largo annuo stipendio, oblatâque habitatione in ædificio servandis Regiis bibliothecis destinato, invitatus est.

Ibi vixit ab anno 1666. ad annum 1681. Durante hoc tempore pulcherrima, subtilissimaque mul-

multa, in Mathematicis detexit, variaque ex iis operibus conſcripſit, quæ nunc in unum corpus collecta, quid in variis Matheſeos partibus præſtiterit, ſub oculis ponunt.

Præter ipſius jam memorata inventa præclara inter alia duo inſigni uſu eminent. Libellam Teleſcopio munitam ita conſtruxit, ut ipſi præ ceteris fides haberi poſſit *. Inventum aliud ſpectat temporis menſuram, Horologiis portatilibus filum, chalybeum, ſpirale, elaſticum, adaptavit *; quo nunc nullum portatile Horologium deſtituitur, quo etiam ſublato, accuratiſſimè conſtructa omnem motus æquabilitatem amittunt.

* *Vide pag.* 254.

* *Vide pag.* 253.

Nimium verò ſtudiis Mathematicis deditus, menti gratum Corpus non potuit ſuſtinere laborem. Bis Hollandiam hac de cauſa petiit, annis 1670, & 1675, iterumque recuperatâ ſanitate in Galliam rediit, ſed tandem valetudini ut conſuleret illi in perpetuum dixit vale anno 1681, omnibuſque Regis beneficiis nuncium remiſit.

Reliquum vitæ curſum iiſdem occupatus ſtudiis abſolvit.

Anno 1682. conſtrui curavit Automaton Planetarium in quo planetarum motus in plano pulcherrime æmulatus eſt.

Machina hæc in operibus poſthumis delineata, & accuratiſſimè deſcripta, datur. Exſtat adhucdum apud hæredes.

An-

Anno 1689. Angliam tertia vice invisit.

Sequenti anno tractatus duos, alterum de *Lumine*, de *Gravitate* alterum edidit.

Cosmotheoros tempore mortis sub prælo sudabat, editio tamen inchoata tantum erat.

Vitam finivit Hagæ Comitum octavo Junii 1695.

Scripta omnia legato dedit Bibliothecæ Academiæ Ordinum Hollandiæ quæ est Lugd. Bat. virosque duos, insignes Mathematicos, Burcherum de Volder, in eâdem Acad. Philosophiæ & Math. Professorem celebrem, & Bernhardum Fullenium, in Academiâ Frisiâ Franequeræ Professorem, rogavit ut ex scriptis eligerent, quæ prælo committi possent, cui petitioni volumen debemus operum posthumorum, anno 1700. editorum.



CHRISTIANI HUGENII

OPERA MECHANICA.

TOMUS PRIMUS.

Tomi primi contenta.

ILLUSTRISSIMIS AC POTENTISSIMIS

HOLLANDIAE
Et
WESTFRISIAE
ORDINIBUS

Dominis suis,

CHRISTIANUS HUGENIUS à ZULICHEM

Felicitatem omnem.



Roditum est memoriæ primum Romæ solare horologium fuisse, quod è capto Siciliæ oppido quodam, annis post urbem conditam CCCCLXXVII, *cum cætera præda deportatum sit, locoque publico dedicatum. Cui non planè ad Latii clima descripto, eoque nec lineas horis congruentes exhibenti, quum necessitate tamen & meliorum penuria undecentum annis Pop. Romanus paruisset, Censorem tandem Q. Marcium Philippum diligentius ordinatum juxta posuisse, idque munus inter censoria opera gratissime acceptum. Mihi, Proceres Amplissimi, rem haud absimilem nec minore publico bono hodie agitanti, ut qui non in una modo urbe, sed omnium ubivis horologiorum instabilem motum correxerim, similem quoque ab universis gratiam expectandam censuissem atque à civibus suis Q. Marcius reportavit, si, quemadmodum res eventusque iidem ex intervallo redire solent, ita priscus candor & ingenuitas in terris aliquando reduces cernerentur. Verum hæ cum jam diu apud majorem hominum partem desitæ sint virtutes,*

contraque impostura & obtrectatio late omnia obtineant; quænam fortuna maneret inventum nostrum, simul ac vulgò innotescere cœpisset, facile equidem prævidi, neque me fefellit augurium. Ecce enim jam primum in patria hac nostra eo excessit quorundam tum audacia tum impudentia, ut nihil interdicto vestro deterriti, interpolare acceptum à nobis inventum, ac dein tanquam novum prorsus, nostroque etiam, si diis placet, præstantius jactare ausi sint. Atque hæc qui coram & ante oculos nobis fieri viderunt, nihilo meliora ab exteris regionibus imminere crebro admonuerunt. Nempe alibi quoque exorituros, & in gloriolam hanc nostram involaturos homines inique invidos, qui, forte an & sibi ipsis, certe orbi universo persuadere conentur, non hæc nostratium ingeniis deberi, sed à sua suorumve alicujus industria diu ante profecta fuisse. Cujus rei indignitas cum ad gentem omnem nostram, eoque ad vos etiam, Domini Illustrissimi, spectare videretur, qui nunquam æquo animo tuleritis inventorum longe præclarissimorum, typographiæ inquam & telescopii, laudem à Batavia vestra, plagiariorum fraude, averti; fateor me non levi stimulo impulsum fuisse, ut eidem hujus quoque qualiscunque reperti decus adsererem. Itaque eam quæ sola ad hoc patere visa est, viam secutus, rationem omnem & constructionem novi automati, autor ipse, paucis describendam & in publicum producendam suscepi; exiguo sanè volumine, sed quod brevius etiam fuisset nisi obiter ad ea quoque respondendum duxissem quæ à nonnullis objici mihi, ipsumque artificii nostri fundamentum lacessere posse, prospiciebam. Hoc vero quicquid est operæ, quum melioribus auspiciis lucem aspicere non posset, vestro Illustrissimo Nomini ac tutelæ, ea qua decet veneratione, dicatum commissumque venio, neque tam pagellas hasce pauculas, quam inventum ipsum, ut videtur, non incelebre futurum, dedico consecroque. Vos pro solita benignitate vestra favete, ad publicam utilitatem, quoquo modo studia sua referenti, neque aliud magis in votis habenti, quam ut majoris momenti in rebus eadem posthac approbare vobis contingat. Ita Rempublicam sub imperio vestro incolumem servet, beneque fortunet Deus.

CHRI-



CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM, CONST. F.

HOROLOGIUM.

TEmporis dimetiendi rationem novam, quam exeunte Anno 1656. excogitavimus, paucisque deinde mensibus in patria divulgare instituimus; etsi dubitandum non erat, propter egregiam utilitatem, brevi longe lateque manaturam, quippe pluribus jam distractis, ac dimissis quaquaversum novi operis exemplaribus; nos tamen haud inviti consiliis eorum obtemperamus, qui ut scripto comprehensam in lucem ederemus, autores fuere. cum ut illos demereamur, ad quos, ob locorum intervalla, tardius fortasse perventura erat: tum ut male feriatorum hominum audaciæ obviam eamus, ne, quod solenne ipsis est, alienis insidientur inventis, ac per summam injuriam pro suis venditent. Quanquam hos, si fuerit opus, & dati Privilegii tempus refellere possit, quod à Celsissimis Fœderatarum Provinciarum Ordinibus die 16. Junii Anno 1657. impetratum est; & testes præterea non pauci, quos de oblato nobis recens invento subinde certiores fecimus. Occasionem ei præbuisse Astronomorum pendula, facile quivis conjiciet, qui non nescierit aliquot jam retro annis hæc usurpari illis cœpta.

Nimirum fallentibus clepſydris automatiſque quibuslibet, quæ inter obſervandum adhibere conſueverant, tandem, docente primum Viro ſagaciſſimo Galileo Galilei, hunc modum inierunt, ut è catenula tenui pondus appenſum manu impellerent, cujus vibrationibus ſingulis dinumeratis, totidem colligerentur æqualia temporis momenta. Hac methodo Obſervationes Eclipſium ſcrupuloſius quam antea peregere, Soliſque item diametrum, & Stellarum diſtantias dimenſi ſunt non infeliciter. Sed præterquam quod deficiebat neceſſario pendulorum motus, niſi adſtantis opera identidem juvaretur, tædioſus inſuper labor evadebat, omnes eorum itus rediturſque numerantibus; cui ſane integris noctibus mirabili patientia nonnullos invigilaſſe, ipſis prodentibus, conſtat. Nos autem æquabiliſſimum hocce genus motus cernentes, ac veluti unicum in rerum natura datum, quod ad Mechanicam conſtructionem poſſet traduci, quæſivimus quo pacto hoc ipſum breviſſime aſſequi liceret, atque ita remedium invenire gemino quod retulimus incommodo. Ac multa fabricæ varietate animo perpenſa, hanc denique, quam deinceps tradituri ſumus, ut cæteris planiorem facilioremque ſelegimus. Qua percepta & in publicum porro privatumque uſum, ſicut jam fieri cœpit, converſa, ad univerſos quidem hic fructus redundabit, quod horologiorum, cum inter ſe, tum cum Sole ipſo, quantus nunquam antehac, imo quantus pene optari poſſet, conſenſus animadvertetur. Aſtronomi vero id conſequentur, ut nulla poſthac agitandorum perpendiculorum moleſtia, numerandive ſolicitudine, & illa omnia exequantur, quorum paulo ante meminimus, & alia illis ſubtiliora, ipſam puta dierum de meridie in meridiem inæqualitatem, ſcrutentur; quam qui negare audent, ratione hactenus magis quam certa experientia refutati ſunt. Ut jam de Longitudinum, quam vocant, ſcientia dicere omittam: quæ ſi unquam extitura eſt, deſideratumque tantopere uſum curſui navigantium præbitura, non aliter, quam vectis per mare exquiſitiſſimis atque omni errore vacuis horologiis, id obtineri poſſe, multi nobiſcum exiſtimant. Ve-

rum

rum hæc res vel ipsi mihi, vel aliis quandoque curæ erit. Nunc automaton nostrum & figura oculis subjiciam, & figuram verbis quam potero dilucide explicabo.

Præcipuam operis partem binæ laminæ continent oblongæ atque inter se æquales, A B, C D; quibus rotarum axes utrinque inserti sunt. Eæ laminæ lateribus tantum hic sunt conspicuæ: columellas autem quatuor, quibus versus angulos connexæ sunt, de industria exprimere neglexi, ut ne reliquis officerent. Prima rota seu tympanum dentatum est E, cujus axi orbiculus quoque F affixus est. Huic circumjectus funis cum appenso pondere Δ, eo quem postea dicemus modo. Ponderis itaque vi tympanum E vertitur. Hoc movet proximum tympanum H. hoc rotam L, cujus dentes ad instar serræ dentium formati sunt. Hujus prope axem erectus stat axis M N, cum affixis lamellis sive auriculis binis, quarum alteri occurrunt superiores rotæ L dentes, alteri inferiores, idque perpetua vicissitudine, ita ut non in gyrum axis hic circumagatur, sed reciproco motu, nunc in hanc, nunc in illam partem libretur, dum interim rota L in orbem vertitur. Quem motum pluribus exponere supersedeo, quod in vulgaribus passim horologiis reperiatur. à quibus equidem hucusque nostrum hoc non discrepat; at plurimum in his quæ sequuntur. Axi enim N M infigitur O tympanum, cujus dentibus aptantur dentes rotæ P, ejus generis quas coronarias vocant artifices nostri. Nec vero toto ambitu dentata ut sit necesse est, sed parte superiori duntaxat. quippe tympanum O, haud aliter atque axis N M cui cohæret, reciprocam librationem habet, unde & rotam P simili motu agitat. Cumque major sit hujus diameter quam tympani O, sequitur ut minori etiam circuitus parte rota quam tympanum dictum gyretur. quod quo pertineat alibi indicabimus. Porro ejusdem rotæ P axis trans laminam C D aliquantum extenditur, habetque conjunctam clavulam Q R, inferius itidem inflexam & terebratam ad R, ita ut per foramen hoc laxiusculum virgula ænea I T libere transmeet. Hæc vero virgula superius ad S suspensa est filo S I, ex inferiori parte pondus T sustinens,

TAB. I.

nens, quod cochleæ ſubjectæ converſione ſurſum propellitur cum opus eſt, vel ulterius deſcendit.

Quibus expoſitis ut motus ratio, totiuſque adeo inventi percipiatur (nam quæ præterea in Schemate notata apparent, poſtea exequemur) advertendum eſt in primis, quod ſi perpendiculum S I T per foramen R trajectum non eſſet, neque omnino adeſſet, tunc quidem clavula Q R concitato motu ultro citroque jactaretur, vi ponderis Δ, omnes rotas automati agitantis. Transmiſſa autem virgula I T, cum appenſo pondere T per foramen R, impeditur eo dictus clavulæ motus, totumque horologium quieſcit, donec pondus T ſemel impulſum principium agitationis nanciſcatur. Quo facto, pendulum quidem S I T oſcillatorio motu fertur juxta planum laminæ C D. clavula vero Q R, momentum ſentiens ponderis Δ, ultro obſequitur penduli motui, ita ut pauliſper etiam vibrationibus hunc ſingulis adjuvet. Atque hoc modo perennis efficitur penduli agitatio, quæ niſi illud horologio conjunctum foret, brevi deficeret vergeretque ad quietem. Ad ſingulos autem recurſus penduli, percipientur ictus totidem ex appulſu dentium rotæ L ad lamellas M, N. Et hæc quidem de motu automati noſtri, quæ præcipue explicationem requirebant, quoniam in eo ſumma totius inventi vertitur.

In ſchemate porro tertia lamina eſt Y Z, prioribus parallela, & à lamina A B ſpatio diſtans. quo in ſpatio conſpicitur tympanum dentatum V, communem cum rota E axem habens. Huic congruunt dentes rotæ X, quæ media ſui parte conjunctum habet tubulum cavum Γ ultra laminam Y Z prominentem, impoſitumque gerentem horologii indicem primarium Λ. Ipſi vero Γ tubulo alius itidem cavus introrſus conſtitutus eſt, laminæque Y Z conſertus, axis nimirum quo rota X volvatur, & per quem ſimul transmittatur axis rotæ H, cui impoſitus eſt index alius Σ longior indice Λ. Is ſecunda ſcrupula demonſtrat. Primorum vero ſcrupulorum ſeu minutorum index prioribus illis utriſque multo brevior Ψ, extremo axi D V, ultra laminam Y Z producto, affixus eſt. Et hic quidem indiculus, laminæ, Y Z proximus fertur,

parvo

parvo in circello ſingula prima ſcrupula diſtinguens. Hoc verò ſuperior index horarum A convertitur : & ſupra hunc denique Σ index, quem dixi, ſecundorum. Hæc autem, uti & tympanorum omnium diſpoſitio ac dentium numerus, cum multimodis variari poſſint, nos hunc unum in exemplum proponere ſatis habuimus, eumque experientia comprobatum. Itaque & dentium multitudinem in ſingulis tympanis deſignabimus, eam quæ huic formæ optime convenire viſa eſt. In circumferentia rotarum ſingularum E H ſeptuageni bini ſunt, ſeni in tympanis G & K. rota L viginti quinque habet, tympanum O decem. rota P viginti, vel tantum partem horum aliquam; quia, ut dixi, totam dentibus inſecari nihil opus eſt. Penduli longitudo S I T pedis Rhenolandici, qui ad Romanum veterem proxime accedit, dextantem circiter æquat, & cuique vibrationi ſimplici impendit ſemiſcrupulum ſecundum. ad quam menſuram obſervationibus ad ſolem vel ad aliud hujus generis horologium comparatis non difficile perducitur. Ea longitudo rotis ita ordinatis convenit: & exquiſitam motus æqualitatem, quæque etiam Aſtronomicis uſibus ſufficiat, præſtare valet. Quod ſi tamen concinnitate operis inſuper habita, quadruplo majus pendulum adhibeatur, vel ultra etiam producatur, rotis interim majoribus quoque adſumptis; haud dubiè lentioribus oſcillationibus tutius etiam fidemus. Et jam in magnis publicis Horologiis, egregio ſucceſſu, perpendicula ejuſmodi prælonga uſurpari vidimus, alibi duodecim, alibi vicenûm pedum, cum appenſa ſphæra 25 vel 30 librarum. Cæterum revertendo ad ea quæ hic poſita fuere, apparet quidem, rota E ſemel circumacta, duodecies converti rotam H. centies vero quadragies & quater eam quæ ſequitur L. Quæ cum dentes 25 habeat, 3600 vicibus alternatim impellit lamellas M. N. ac totidem recurſus duplices facit pendulum S I T. Cumque 3600 ſcrupula ſecunda, horâ unâ contineantur; hinc horæ ſpatio rota E ſemel convertetur. Quamobrem & circulus indici Ψ ſubjectus in 60 partes dividitur, quæ prima ſcrupula ſignificent. Rota vero H quia

B duo-

duodecies in hora, hoc eſt, ſemel ſpatio 5 ſcrupulorum primorum verſatur, unaque index Σ; ideo circulum huic indici ſuppoſitum in 5 partes primum diſpeſcimus, & harum deinde ſingulas in 60 minores, quæ ſecunda ſcrupula denotent. Denique index Λ in ſuo circulo duodecim horas diſtinguere debet; ac proinde, ut harum tempore ſemel circumeat, tympano V ſex dentes tribuuntur, rotæ X ſeptuageni bini.

Nunc qua ratione pondera Δ, Ξ, horologio appendantur docebimus. Hæc enim novo artificio ita ordinavimus, ut cum ſurſum retrahitur pondus primarium Δ, non propterea ceſſet aut ullatenus impediatur horologii curſus. Quod in hac inventione apprime neceſſarium erat, ne particula temporis aliqua quotidie ſubduceretur, neve penduli motus interea dum pondus attollitur langueſceret. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primo orbiculum F amplexus, aculeis ferreis aſperum, quo melius funis inhæreat, parte altera trochleæ, cui pondus primarium Δ alligatum eſt, circumvolvitur. Hinc aſcendens ſuper orbiculo Ω tranſit, ac rurſus deſcendens ſuſtinet trochleam alteram cum appenſo minori pondere Ξ; unde denuo ad F redit. Orbiculus Ω (quem demonſtrandi gratia hic inter laminas A B, Y Z, ſuſpendimus, nam alioqui commodius thecæ quæ toti horologio circumdatur affigi ſolet) circumferentiam verſus denticulos habet, ut in rota L, ſerratos, ac deſuper prementem elaterem Θ, quo fit ut in alteram tantummodo partem volvi poſſit, attracto nimirum fune Π, ac pondere propterea Δ aſcendente: Nam contrarium motum elater dentibus occurrens prohibet. Crenam autem ſecundum circumferentiam dicti orbiculi ita cavari oportet, ut funem immiſſum nonnihil coarctet conſtringatque, quo minus poſſit immoto orbiculo delabi; quem in finem etiam pondus Ξ adhibetur. His ſic conſtitutis, ſemper Δ dimidia ſui gravitate incumbet funi Φ, motumque horologio continuabit etiam dum attracto fune Π in altum attollitur. Et hactenus

qui-

quidem quæ ad constructionem automati pertinent declaravimus.

Reliquum est, ut, quantum idem iis omnibus, quæ ad hanc diem in usu fuere, antecellat, perspicuum faciamus. Satis constat plurimas in his erroris & inæqualitatis causas esse. Nam & in disponendis rite elimandisque tympanis vel levissimum peccatum, continuo motus inconstantia notabilis consequitur. Tum vero & siccato atque evanescente oleo, quod axibus addi solet, tardius horæ procedunt. atque ut hæc absint, varias tamen, anni tempestatum & aeris, mutationes horologia sentiunt, imo præsentiunt nonnunquam: & frigore quidem plerunque pigriora comperiuntur, æstu plus æquo properant. Penduli vero cum sit ea vis ac proprietas, ut necessario eodem semper tenore feratur, neque ab eo nisi mutata longitudine unquam declinet; apparet sane omnia illa quæ diximus incommoda invento nostro penitus nos sustulisse, adeo ut nisi tale quod interveniat impedimentum, quo horologii motus omnis sistatur, nulla jam cursus ejus retardatio aut inæqualitas timenda sit. At enimvero non nemini duplicem hic dubitandi causam oboriri posse scio. Primum, quod differre à pendulo libero nostrum hoc videatur, quippe ad singulas vibrationes vim quandam ac nixum clavulæ Q R sentiens. Deinde quod, etiamsi penduli simplicis proprietates retineat, perque omnia æmuletur, hujus tamen ipsius geminæ inæqualitates à nonnullis, qui subtiliter hæc perquisiverunt, animadversæ sint. Hìc illud quod de clavulæ impressione dicitur verum esse non diffitemur. Sed levissimam utique hanc esse novimus ratione gravitatis T, quæ sic temperatur, ut tantum non deficiat penduli agitatio, sed quam minimâ, & eâdem tamen latitudine perseveret. Proinde nihilo concitatior aut minus æquabilis hic ipsius motus evadit, quam si clavulæ prorsus obnoxius non esset, pendulumque simplex S I T, ut adhuc fieri consuevit, manu impelleretur. Et hoc quidem ex-

B 2 pe-

perientia optime comprobat. Penduli vero ipsius, quas adnotant, binas inæqualitates, alii autem contra pernegant, earum alteram admittimus, sed vix quicquam horologio nostro officientem, alteram plane nullam esse adseverare non dubitamus. Illud itaque vere asserunt, non prorsus æquali tempore latiores ejusdem penduli ac angustiores vibrationes transire, sed his illas paulo plus insumere, quod facili experimento demonstrari potest. Nam si pendula duo, pondere ac longitudine æqualia, alterum procul à perpendiculo, alterum parumper dimoveantur, simul dimissa, non diu in partes easdem una ferri cernentur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus. Verum huic inæqualitati nostrum, uti dixi, horologium minus obnoxium est, eo quod omnes oscillationes æquali spatio à perpendiculo excurrant. Nec tamen in totum expers remansit, si minutissima quæque, sicut hac in re fieri necesse est, consectari velimus. Contingit siquidem vel aëris intemperie, vel operis vitio aliquo, ut non semper pari vi agitetur clavula Q R, unde & oscillationes penduli (licet exiguo discrimine) crescere ac rursus imminui necesse est. Cumque ampliores recursus arctioribus, sicut modo dicebam, plus temporis impendant; idcirco nonnulla hinc in horologii motu inæqualitas existit. Et huic quidem, utut contemptibilis videri possit, remedium etiam adhibere solebamus, quamdiu ita constructa erant horologia, ut majuscula esset penduli agitatio. Postmodum vero, ne remedio opus esset, effecimus adhibito tympano O rotaque P: quibus hoc consequimur, ut quamlibet angustæ sint penduli vibrationes, neque eo secius axis M N, quantum necesse est, reciproco motu convertatur. Nam cum tympani O diametro dupla vel tripla ponatur diameter rotæ P, sequitur ut hujus exigua licet oscillatione, illud tamen satis magnam circuitus partem absolvat. Sic igitur oscillationibus universis exilioribus redditis, etiamsi harum aliæ alias latitudine quandoque excedant, singularum tamen tempora, experientia teste, nullo memorabili discrimine differunt. Qua ex re & hoc contingit, ut aucto

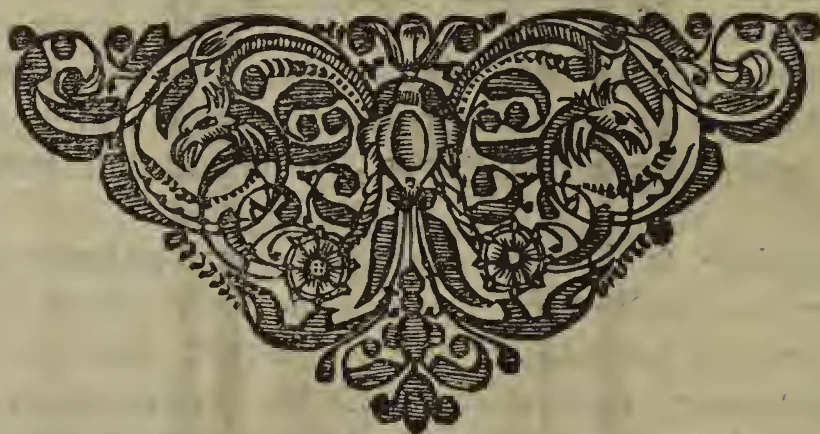
vel

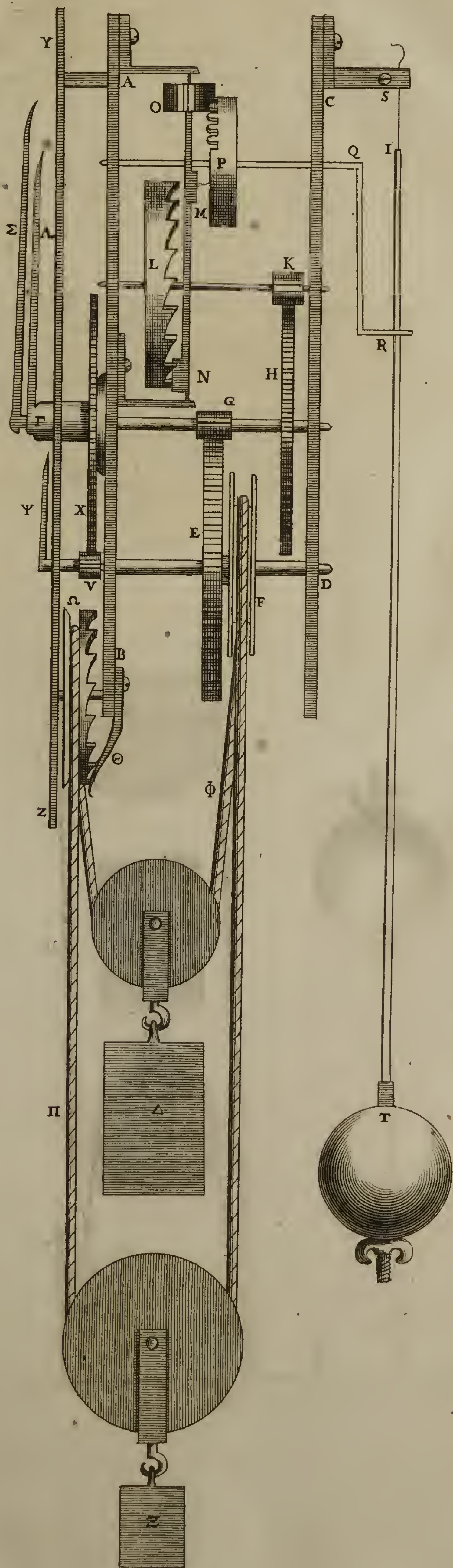
vel ad duplum pondere Δ, non propterea penduli motus acceleretur, aut horologii curſus alteretur, quod in omnibus aliis hactenus uſitatis ſecus accidit. Alteram penduli inæqualitatem, Vir Aſtronomiæ ſtudiis clarus, Gothofr. Wendelinus, primus & ſolus, ut opinor, prodidit; expertum ſeſe ſcribens, ejuſdem penduli velociores eſſe oſcillationes hyemali tempore quam æſtivo idque notabili differentia. Sed quoniam in eo examine arenaria tantum horologia, vulgariaque automata ſeſe adhibuiſſe fatetur, cum ſcioterícis, fortaſſe non nimia cura deſcriptis; multi, quam recte ſe haberet hæc ipſius obſervatio, dubitarunt. Mihi certe nihil ejusmodi licuit animadvertere. Quin contra, & minoribus horologiis, quibus ſemipedale eſt pendulum, & majoribus, in quibus 24 fere pedes æquat, eandem perpetuo longitudinem, brumæ tempore ac æſtate media, convenire expertus ſum. Quæ longitudo ſaltem ſeptima ſui parte per hyemem productior eſſe deberet, ſi Wendelini vera foret opinio.

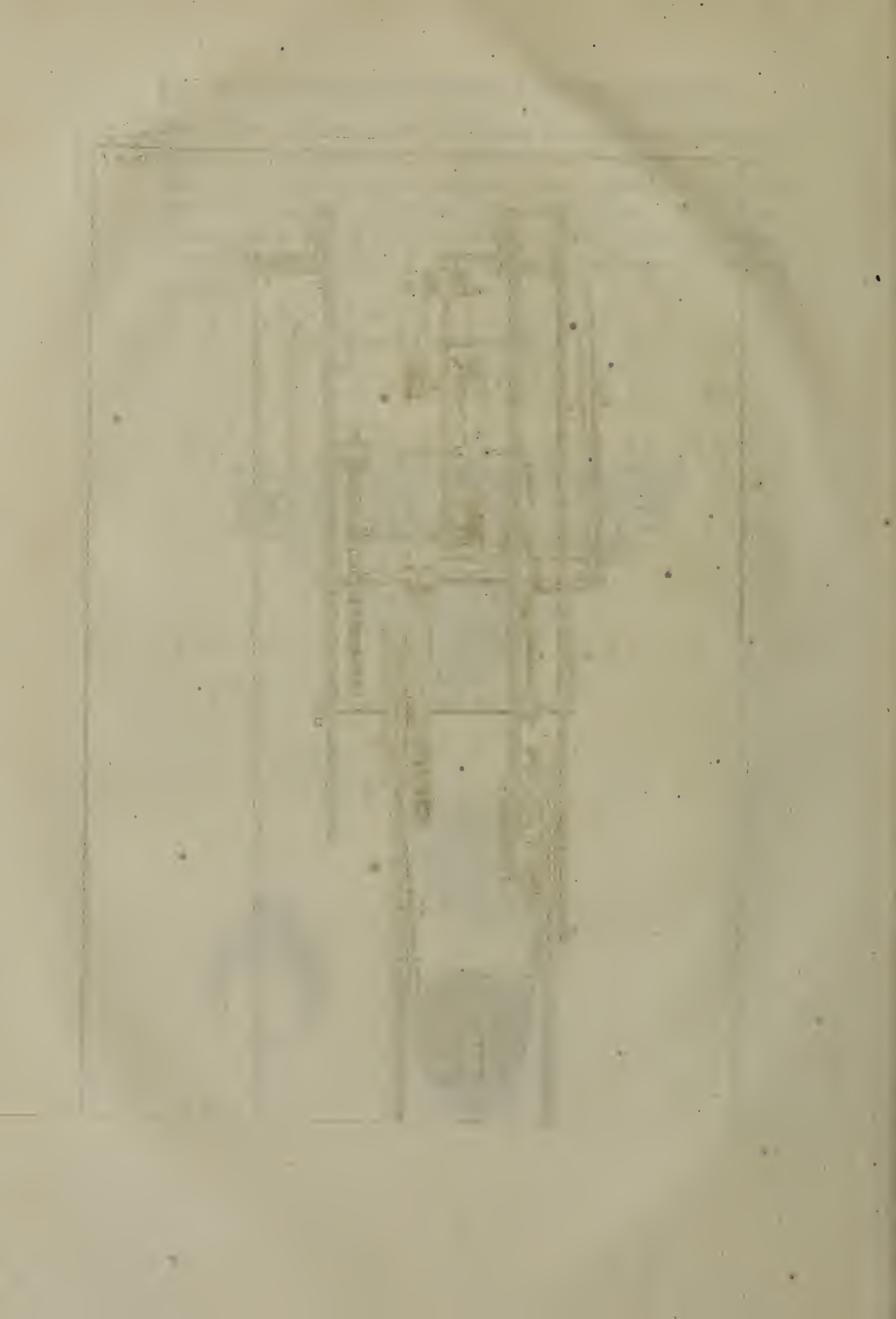
Aſſerta igitur & hac in parte automati noſtri motus æquabilitate & conſtantia, finem jam deſcriptioni imponemus; multa quæ his addi præterea poſſent, artificum induſtriæ relinquentes, qui rationem inventi hujus edocti, non difficile reperient quo pacto illud varii generis horologiis, atque iis etiam quæ pridem ad veterem formam fabricata ſunt, applicari queat. Nos quidem apud eum, cujus opera primum in his fabricandis uſi ſumus, talia quoque confecta vidimus, quæ non pondere, ſed elateris vi moverentur. In quibus, cum antehac pyramide illa æquatoria, chordaque huic circumvoluta opus eſſet, quorum ope adæquarentur primi ac poſtremi elateris impetus; nunc iis omiſſis, ipſi tympano, cui elater incluſus eſt, dentes adduntur. Nam licet hoc modo non æque in fine ac principio vigeat penduli motus, non tamen eo lentiores ſub finem oſcillationes efficiuntur, uti ſuperius fuit demonſtratum. Elater vero ea parte, qua ad centrum convolutus eſt, intenditur, atque ita cavetur ne quo temporis momento curſus horologii ſuf-

flaminetur. Mitto quod & ſonitu horas edentia automata hujusmodi machinatus eſt, ita ut uno eodemque, ſive pondere, ſive elatere, pars utraque, tam quæ ad hoc comparata eſt, quam quæ indicem horologii verſat, moveretur. Etenim hæc omnia ad inventum noſtrum haud aliter ſpectant, quam quod occaſionem iis atque opportunitatem præbuerit.

FINIS.




Y
A
O
C
S
Q
I
P
M
Σ
Λ
L
K
R
N
H
G
Γ
Ψ
X
E
V
D
F
Ω
B
Θ
Φ
Z
Δ
Π
T
Ξ



CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM.

SIVE

DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

Dividitur liber hic in partes quinque, quarum

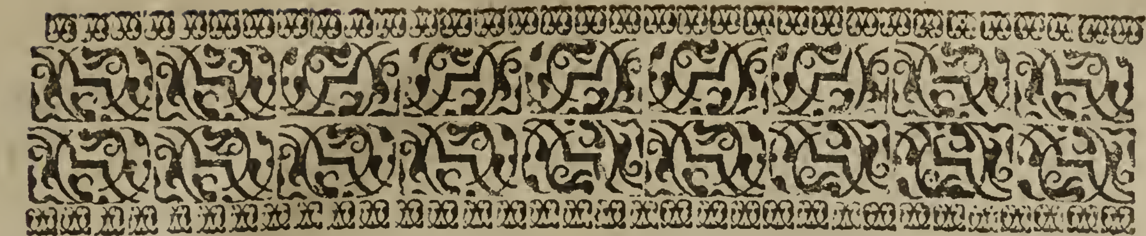
Prima *Descriptionem* Horologii Oscillatorii continet.

Secunda agit de *Descensu gravium*, & *motu eorum in Cycloide.*

Tertia de *Evolutione & Dimensione linearum curvarum.*

Quarta de *Centro Oscillationis seu Agitationis.*

Quinta *alterius Horologii constructionem*, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga.*



LUDOVICO XIV, FRANCIÆ ET NAVARRÆ REGI INCLYTO.

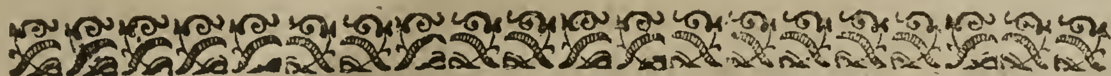


ENATAM, Rex maxime, reſtitutamque hoc ſæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique ſui parte deperditam, ac veluti ſepultam, inſtaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum veſtigiis inſiſtentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri ſubtiliſſimi, ut pauca jam poſterorum induſtriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longiſſime prætervecti ſint. In hac ſcientia, quam ſemper admiratus ſum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris propoſui inveſtiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta

prodesse possent. Tunc verò optimè operam me collocasse existimavi, cum in ea incidissem, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate, ac subtilitatè aliqua, conjuncta foret. Quod si commendationis nonnihil accersere muneri nostro permittitur, ne prorsus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me consecutum esse profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum sit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis constet; id quod ad hanc attinet, non levi conamine, ex intimis artis recessibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impensiore studio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic speculationi locum tribuam. Quænam vero in his sit utilitas, non est quod multis, Rex potentissime, ostendere tibi laborem. Non solum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata nostra, quantum, æquabili horarum demonstratione, cæteris hujusmodi machinationibus excellant: sed & potiores usus eorum, quibusque jam inde à principio mihi destinata fuere, non ignoras. Illos scilicet, quos & in Cælestium observationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præstare apta sunt. Tuo enim jussu, non semel, per mare vecta fuere Horologia

logia noſtra. . Tuis auſpiciis eadem nec pauca, Aſtronomiæ uſibus dicata, viſuntur in præclara illa Uraniæ arce, quam inſigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curaſti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hujus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari ſoleo. Nec jam requiret quiſquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem deſcriptionemque explicui, auguſto Nomini tuo inſcribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigiſſe didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio conſtaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuiſque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi ſignificatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiiſque iis intento, quæ in illo rerum faſtigio poſitum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum eſſe, ut ad hujuſmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex auguſtiſſime; cui illa maxime placere videmus, quæ plurimum publicè proſunt; neque aliud magis curæ eſſe, quam ut nova incrementa ſumant optimæ diſciplinæ,

noviſque illuſtrentur inventis. Hoc enim ſatis declarat eximia illa tua, ac ſingularis, tum in ipſis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immenſæ, ac ſolito majores, bellorum impenſæ quidquam imminuunt : non Galliæ tuæ fines circunſcribunt. Ut plane te hoc agere appareat, quo non ſolum ſub imperio tuo viventes, ſed & Orbis univerſus, quacunque beneficio tuo dignus eſt, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui veriſſimæ præclariſſimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortaſſe etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, ſi viguiſſe hoc tempore ſtudia iſta, arteſque, poſteris teſtari poſſint, ſimul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum eſſe. Lutetiæ Pariſiorum; xxv. Mart. A. CIƆIƆCLXXIII.



HADRIANI VALLII
DAPHNIS,
ECLOGA.

Ad Christianum Hugenium Zulichemium, Constantini F.

EN INITIMUM *tutela, simul jucunda voluptas,*
*Dilectæ Phœbo, Sceverinides * Oceaninæ;*
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: vestro sic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes incestent æquora Fauni.
Te, quem Fama vehit super aurea sidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, fratrumque patrisque:*
Haud indigna tuo ferimus donaria sensu,
Sicelisin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solensia versu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Jam caput Oceano, stipata minoribus astris,
Extulerat radiis fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur pastoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legisse marinas
Juverat, hærentesque vadis captare paguros.
In celso tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promissi carminis. ipsum
Thestylis & Corydon, quos cætera turba secuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.

* Sceverina, Pagus apud Batavos; mari adjacens.

Ecquid agat, rogitant blande: tum fausta precantur;
Et damnant voti, promissaque carmina poscunt.
Contra ille; O Pueri, quid portet crastinus Eos;
Sedi explorator: turmales agmine mergi,
Solivaga aut cornix, aut alcyones desertæ
Si qua darent mihi signa. maris cras æquor arandum.
Detinuit nunc usque Jovis clementia sudi,
Et picturatus tot circum animalibus æther.
Quæ nos in vitreo miramur monstra profundo,
Fert radians æther, vultus formasque natantum.
Cancer ibi est, delphinque; est grandi corpore cetus.
Ad Boream pisces, & contemplere sub Austro
Pisces; nuper ubi numero crevisse feruntur.
Sunt urna, fluviusque, & aplustris comta carina
Illic. quin operis simulamina plurima vestri,
Luminaque in cœlo pecori debentia nomen.
Sunt hœdi parvæque sues, materque capella.
Et fuse sparso quæ candet semita lacte.
Vestibulum servant, elucens vellere fulvo
Dux aries, ingensque auratus cornua taurus.
Bini cernunturque canes, pernoxque bubulcus;
Plaustraque; quique auriga suis excussus habenis.
Stellatum volat alatus per inane caballus:
Ac præsepe suum juxta stabulantur aselli.
Illic virgo, manum Cereali inlustris arista,
Et, transmutatus faciem, Pan ipse renidet;
Daphnin amans vestrum, secretæ rupis in umbra,
Uranie velut edocuit: me singula Daphnis.
Singula quæ (carmen quia poscitis) ordine pandam.
Extemplo tentat vocem: numerosque modosque
Perpendens mulcet variis concentibus auras.
Tum venti posuere. jacet sine fluctibus æquor;
Factaque sunt terris, sunt facta silentia ponto.
Mox interfatur: Quod prosperet; ab Jove magno
Ordiar: ordiri consuerunt ab Jove vates.
Vos, nec enim rerum brevis hic mihi nascitur ordo,

Noctur-

Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
Inde Jovis magni cunas, veterisque celebrat
Saturni jussum crudele, dolumque Cybelles;
Ortaque Dictæis Corybantia sacra latebris:
Ut puero nutrix sit olentis lecta mariti
Uxor; & ipsa recens hædos enixa gemellos;
Queis comitata polum modo lucida stella frequentet,
Quæ prius Oleniis balavit bestia campis;
Sub pedibusque terat formosi limen Olympi.
Tantus amor Jovis, & percepti gratia lactis.
Nec tamen hoc niveum manasse fluore nitorem,
In duo secta vias, oculis manifesta videntum,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis;
Tergeminam sed noctem productumque canebat
Alciden mundo; Deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat, sopitæ parvula mammis
Labra pater gnati nisi conjugis admovißet:
Quæ, simul experrecta, simul conterrita, surgens
Uvidulas tenero mammas subtraxerit ori,
Indignata. pavimentum tabulataque cœli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in se revolubilis humor:
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore,
Ducta per æquales medio discrimine partes,
Cæruleum velut argento ferruminet axem:
Axem, cervices qui quum lassaret Atlantis,
Haud gravis Herculeo requierit sarcina collo;
Atque tot ærumnas quem post, manesque subactos,
Ipse suis ornet jam portio magna triumphis;
Hesperidum contra custodem divitis horti
Insurgens Anguem pede nixus; apertaque retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis;
Lerneæque audacem Hydræ succurrere Cancrum;
Monstra novercales testantia jugiter iras
Et frustra bacchatum odium Junonis iniquæ.
Hinc aliam memorat grassatam fraude novercam;

Et

Et transmittendi pavidam nimis æquoris Hellen:
In thalamos sit ut illa tuos, Neptune, recepta:
Phryxeumque pecus, fœtamque heroibus Argo
Phasidos ad fluctus deducit & æthera cantu.
Nec silet Europæ vectoris præmia; vel te,
Bigarum Pelopis perjuri, Myrtile, rector.
Myrtoum pelagus signaras ante caduco
Funere; sublimem nunc tollunt cornua Tauri.
Haud procul his Hyades notat exardescere: sed, quæ
Sunt Hyades Grajis, Suculas dixisse Latinos;
Atque duas septem mutasse Trionibus Arctos;
Arctophylaca pigro, sua plaustra sequente, Bubulco;
Quando bovem prisco vocitabant more trionem,
Quod tereret duro proscissam vomere terram.
Hanc adeo sortem miserans, suspiria ducit;
Buceriumque genus questu compellat inani;
Ah pecus infelix, armentum! sæcla fuerunt,
Pondere quum duro neque vos gemeretis aratri,
Navita nec vestro vocitaret nomine stellas.
Tunc neque sidus erat terris pia Virgo relictis,
Quæ Cereale manu spicum gerit; Icariotis
Sive sit Erigone, cui fida Canicula patrem
Quærenti indigna monstravit cæde peremtum;
Atque, comes dominæ, domino comitem Oarioni
Astra minor socium majorem repperit inter:
Seu magis Astræi sit sanguine creta, perenne
De genitore suo quæ nomen contulit astris:
Sive sit antiquæ Themidis justissima proles,
Aversata jugo vos aspectare gravari,
Tempora dum, pulsis melioribus, ærea surgunt:
Sive sit alma Ceres; horrens fugitiva videre
Vos quoque mactari; nil pejor linquit inausum
Ferrea dum soboles, ipsorum inimica Deorum:
Quos, quasi de terra (nam Dii coluistis & illam)
Sit pepulisse parum, tentavit pellere cælo.
Tum detestatur suffultos angue Gigantas;

Por-

Porphyriona, ſtatu terrentem cuncta minaci;
Rhæcumque; immanemque Gygen, validumque Mimanta;
Enceladumque; manusque rotantem Ægeona centum;
Et, cui par nemo feritate, Typhöea dirum,
Auſos invaſiſſe Deos tellure fugatos,
Ac totum magno cælum compleſſe tumultu,
Undique divulſas jaculantes torviter ornos
De tumulis cumulorum montibus ex aggeſtis.
Terrigenam ut pubem, Divûm penetralia ſancta
Rimantem, Superi mentito fallere vultu
Quæſierint, addit; dispertitosque pavore:
Donec apud late ſtagnantis flumina Nili
Horrificam faciem Pan ſumſerit Ægocerotis;
Ambiguoque ſono Superos animarit ad arma,
Anguipedesque metu dare terga coëgerit omnes:
Cœlo donandos Aſinos auxiſſe timorem
Congerie vocum, perterricrepoque fragore:
Illa cælicolis nam tempeſtate fuiſſe
Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
Evantes in aſellis cum Bacchæo ululatu,
Thyrſis armatos, tectos colocynthide parma.
Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
Venerit Aſſyrii fugiens Euphratis ad undam;
Induerintque gregis (Syriæ poſt numina genti)
Squammigerum formas, gemini nunc aurea Piſces
Lumina, ſigniferum Capricorno juncta per orbem,
Ni fuſa medius ſecernat Aquarius Urna;
Deucalioneos neque non ediſſerit imbres,
Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verſet;
Sive ſit is Cecrops, peplo præſignis Athenæ;
Paſtor Ariſtæus ſeu plena alvearia geſtet,
Quæ ſubter volitetis apes examine denſo.
Qualiter & pandus vectarit Ariona Delphin,
Ac aliter vectum Danaeium Perſea narrat;
Cepheaque, Andromedenque, & mæſtam Caſſiopeiam;
Inſertumque polo vaſtum Piſtricis hiatum:

D *Quem*

Quem Phaëthonteus longo ſinuamine propter
Fulgeat Eridanus declivi proximus Auſtro:
Nuper ad occulti Batavos ubi verticis axem
Intuitos nova ſquammigerum ſimulacra micare:
Sollertes Batavos, imo ſeu gurgite piſcem
Venari ſit opus, vel in alto ſidera cælo.
Tum canit, ut Daphnis ſacra ſub rupe docentem
Viderit Uranien: argutas carmina ſilvas,
Et repetita cavos ediſcere carmina montes:
Ut Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
Stent auditores circum, & Babylonia turba;
Dein quos Graja tulit, quos aut Nilotica tellus;
Itala quos, ac pulchra ſuo cum Cæſare Roma;
Poſt Arabum de ſtirpe viri & regnator Iberus;
Ac tandem quos conſultos Germania miſit
Aſtrorum cælique, ſuæ qui ſidera terræ;
Inferior nullis ut item neque Gallia deſit;
Gallia magnanimi Regis ſplendore ſuperba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther:
Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
Complexus, quanti non conſcia Latmia ſaxa:
Utque Cenon juveni radium donarit, utrimque
Multo inſignem auro, & pellucidulis cryſtallis;
Per quas quod ſpectes, prope fiat; & augmina ſumat:
Dixerit &: Sollers, en, primus quale Batavus
Munus adornarit; ſed Etruſci quo decus Arni
Eſt Antenorea ſenior Tyrrhenus in urbe
Regna Jovis princeps metatus, ab æthere vobis
Nunquam nota prius miracula nuntia portans;
Lunaï montes, vultus tibi, Phoſphore, ternos;
Quove ſatellitio ſubluſtri nocte vagetur
Stella Deûm regis per cærula templa ſuperne.
Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
Hujus erat tibi ſervatus ſollertior uſus;
Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
Accipe fruſtra olim nobis optabile donum.

Daphni-

Daphnidis ad gratum nomen pernice chorea
Exſultant alacres Pueri: neque ſegnius ipſe
Proſequitur; Geminas imitantia lumina falces
Hactenus ut vane Saturni credita ſidus
Oblongo tam diverſa ſub imagine diſco
Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
Splendet, & ambo nigror ſpatii diſterminat intus;
Exiguo circum quos erret ſtellula gyro:
Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
Adjungitque; quod his meritis permulſus, eundem
In ſua magna Chronus ſit adire ſacraria paſſus:
Heic oculis luſtrarit ut omnia; promſerit atque
Inventum ſubtile ſecandi temporis illinc;
Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
Oſcilla ex tenui ſuſpendens mollia filo:
Id labyrintheos curſus qui dirigat alni,
Ignarumque viæ ratis haud ſinat eſſe magiſtrum:
Cui neque quotidie tam certus ſpondeat auctor,
Oceano quantum Titan altiſſimus exſtet;
Ac quibus emergat, queis tunc ſimul occidat oris,
Daphnidos egregio norint conamine docti.
Ille canit: chorus in numerum ſua brachia quaſſant,
Alternoque ſolum pede pulſant. at freta ſaltu
Librabant hilares ſeſe ſuper humida thynni.
Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquiſſe domos, carasque quietes
Vicini nemoris: nulloque frequentior unquam
Caricis arroſor prodiiſſe cuniculus antris
Tempore narratur; narrent ſi vera puellæ
Littoreæ, quæ ſiccandis cuſtodia paſſim
Retibus ad ventos expanſis forte ſedebant.
Pectore Nereïdes nudo, laſciva caterva,
Viſa per incertam Lunam, viſæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul ſub luce maligna;
Tuque, cubans juxta ſtratas prope littora phocas,

Neptuninarum pecudum fidissime custos:
Neu quisquam seræ meminit decedere nocti.
Interea tenebræ densantur; & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, cœli de parte serena
Cinctum non solitis processit crinibus astrum,
Prolixumque trahens albore notabile syrma.
Mirantur chorus attoniti. miratur & ipse;
Præsertim tantum capiti cum demsit honorem,
Ornatumque sequacem omnem mox reddita Luna.
Infit &: Ad sua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil solliciti, curamve foventes.
Insuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Hæc Ancon: mihi visa tibi quæ digna referri,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, cui sidera curæ,*
Nec Phœbum ac Pimplæ fas est contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat astri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃ IↃC LXV.



CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM,
SIVE
DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO
Demonstrationes Geometricæ.

ANNUS agitur ſextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello * publicam fecimus. Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis ſpectantia, viſum eſt ea ſingula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potiſſima ejus pars cenſeri poſſint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius de-

* Vide ſupra pag. 5.

ſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis, pendulo ſimplici naturâ non inerat, cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea, ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadverſâ lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam horologiis adhibuimus, tam conſtans certusque eorum motus evaſit, ut poſt crebra experimenta terra marique capta, manifeſtum jam ſit & Aſtronomiæ ſtudiis & arti Nauticæ plurimùm in iis eſſe præſidii. Hæc ea eſt linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre deſignat; à Geometris noſtri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas ſui proprietates diligenter expenſa; à nobis verò propter eam quam diximus menſurandi temporis facultatem, quam nihil tale ſuſpicantes, ac tantùm artis veſtigiis inſiſtentes, ineſſe ipſi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo poſt primam horologii editionem animadverſa fuit) nunc eandem, demonſtratione quàm potuimus accuratiſſima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonſtratione potiſſima pars hujus libri verſabitur. Ubi primùm neceſſe fuit novis nonnullis demonſtrationibus ſtabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de deſcenſu gravium doctrinam, cujus fructus deſideratiſſimus, atque apex veluti ſummus, hæc ipſa quam invenimus cycloidis eſt proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum uſum aptari poſſet, nova curvarum linearum conſideratio adhibenda fuit, earum ſcilicet

quæ

quæ sui evolutione alias curvas generant. Unde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam ulterius etiam quam præsens necessitas postulabat prosecutus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automatôn demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, à pluribus quidem, sed minus feliciter, hactenus tentata; in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipsa horologii mechanica constructio, penduli que applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

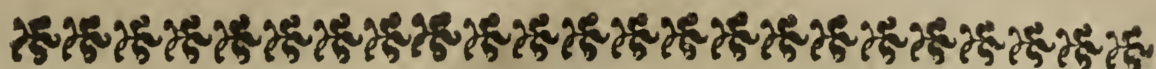
Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic arbitror. Nec sanè aliud fere opponere iis necesse fuerit præterquam id unum, nempe ante annos sexdecim, cum nec dicto nec scripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta esset, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli simplicis usu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controversiam movebit) constructionem eorum propria meditatione me adinvenisse & perficiendam curasse. In sequenti anno, qui nempe hujus sæculi quinquagesimus octavus fuit, deli-

nea-

neationem automati deſcriptionemque typis vulgaſſe; exemplaria, tum operis ipſius, tum libelli, quaquaverſum dimiſiſſe. Nam cum hæc ita omnibus nota ſint, ut nec teſtimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus poſſent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis exiſtimandum ſit, qui ſeptem poſt annis eandem conſtructionem, quaſi à ſe ſuisve amicis profectam, libris ſuis venditarunt. Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, ſi tentaſſe eum, non vero perfeciſſe inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, inveſtigaverim. Cum autem vel ab ipſo Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuiſſe contendunt, horologiaque ejusmodi re ipſâ exhibita, neſcio quomodo ſibi creditum iri ſperent, cum vix veriſimile ſit adeo utile inventum ignoratum manere potuiſſe annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod ſi deditâ operâ celatum fuiſſe dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio poſſe obtendi, qui ſibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, niſi unà quoque oſtendatur, id quod omnes latebat, mihi ſoli innotuiſſe. Et hæc quidem neceſſariæ defenſionis cauſa dicenda fuere. Nunc ad ipſius automati conſtructionem pergamus.



HO-



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS PRIMA,

Descriptionem ejus continens.

FIGURA adscripta horologium à latere inspiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ sunt A A, B B, semipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & semis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut sesquipollice inter se distent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inseruntur. Prima atque infima est quæ notatur C, dentibus 80 incisa, cujus axi orbiculus quoque D affixus est, aculeis ferreis asper, ut funem cum appensis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur postea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem; cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus est generis quas à forma coronarias vocant artifices nostri. Hujus dentibus agitatur tympanum I simulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad instar serræ dentium incisi. Supra mediam rotam K transversus jacet axis pinnatus L M, cujus extrema sustinent hinc inde gnomones N Q & P, seorsim affixi laminæ B B. Notanda vero in gnomone N Q pars deorsum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem L M, simulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem esse diximus, inferiori sui parte gnomoni R innitentem. In lamina B B foramen amplum excavatum est, quo ultra ipsam extendatur axis pinnatus L M, qui subtili cuspide insertus gnomoni P, liberius ita movetur quam si ab ipsa lamina B B sustineretur simulque ultra eam pro- TAB. II. Fig. 1.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

mineret, debet enim prominere necessario ut affigi possit clavula S, quæ simul cum eo versationes faciat. Est autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis L L, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget.

Porro clavula S, ima sui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum est, amplectitur. Hæc vero virga supernè duplici filo suspensa est inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram juxta descripsimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc suspendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum istarum curvatura pluribus postea agendum erit.

TAB. II. Fig. 2.

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes postea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi V X motum sustentari, postquam semel manu incitatum fuerit; & simul perpendiculi statos recursus rotis universis, totique adeo horologio movendi legem normamque præscribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulsu acta, non tantum obsequitur trahenti perpendiculo, sed & singulis recursibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui sua sponte, vel verius occursu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rursus vero, quum ejusmodi sit natura penduli ut eodem semper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri possit; utique postquam flexu lamellarum, inter quas suspensum est, æqualitatem illam consequuti fuimus; nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etsi sæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; sed necessario singuli dentes ejus coguntur æqualibus transire temporibus. Hinc vero manifestum est, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles conversiones effici, cum omnia propor-

tio-

tionaliter moveantur. Quamobrem ſiquid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, ſemperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela eſt Y Y, pollicis quarta parte diſtans ab ea quæ notatur A A. In ea circuli horarii deſcripti ſunt centro eodem α quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum diviſionem habet, alter ſcrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam A A, rota β, tubulo cohærens qui usque ad ε continuatur trans laminam Y Y; atque ita inſidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; ſine illo tamen, ubi opus fuerit, converti poſſit. Ad ε index imponitur, horæ ſpatio circuiturus atque ita ſcrupula prima, ſeu ſexageſimas horarum, demonſtraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipſa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes ſex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ ſuffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipſe ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam deſinit tubulus rotæ β, quem intra ſe complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem ſcrupula prima ſignare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero ſcrupula ut absque errore demonſtrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in ſexaginta partes diviſus inſcribitur, inciſoque in laminâ Y foramine ad Z, eæ diviſiones, cuſpide in ſummo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum diſpoſitio ex figura minori (*fig.* 3.) clarius perſpicitur, exteriorem horologii formam referente.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est, & commodè in schemate exhiberi non potuit. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit, sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem PEDEM HORARIUM in posterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis. nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus, ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam K: cui quum dentes sint quindecim, iisque alternatim pulsentur pinnulæ L L, una conversione rotæ K numerabuntur ictus 30, quibus respondent totidem itus reditusque penduli V X. ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 3600, qui numerus est scrupulorum secundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore semel circumit rota C, cumque ea simul index ad E impositus, qui scrupula prima demonstrat. Et quoniam eodem temporis spatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio suo dentium sex, ad quem numerum duodecuplus est numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H sexaginta conversiones respondere ostenderimus singulis conversionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, sexagies in singulas horas circumferetur, hoc est, semel unius scrupuli primi tempore, ideoque partes sexagesimæ orbiculi λ

secun-

ſecunda ſcrupula tranſitu ſuo oſtendent: atque ita omnia rectè ſe habere manifeſtum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre eſt, plumbeum totum, vel ænea ſuperficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate ſed & figurâ inſuper proſpiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occurſu aëris impedimentum ſentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* ſchemate horologii minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior viſa eſt.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

TAB. II. Fig. 1.

Porro eodem ſchemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologii continuatur, ſuſpendendi ratio expreſſa eſt, quam, incognitam prius, inveſtigare nobis neceſſe fuit, ne interim dum ſurſum retrahitur pondus iſtud, ceſſaret vel impediretur aliquatenus horologii curſus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in ſchemate majori notatus eſt D, amplectitur; inde deſcendens, altera ſui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appenſum eſt, ſubit. Hinc ſuper orbiculum *d* aſcendit, extrinſecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inſuper ſerratis dentibus ita eſt aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi poſſit. Ab hoc orbiculo deſcendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum ſufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo deſcendat. Namque à trochlea *f* rurſus ad ipſum orbiculum D, unde deſcenderat, funis revertitur. Quibus ita ſe habentibus, manifeſtum eſt ſemper pondus *b* dimidia ſui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem ceſſare cum manu funem *e* trahente aſcendere cogitur; adeoque horologii motum nusquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non poteſt, ſed quo minor conſervando motui ſuffecerit, eo melius ac-

Descriptio Horologii.

curatiusque fabrefactum automaton arguet. In noſtris, quæ optima hactenus habemus, ad ſex libras redactum eſt, poſita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere; uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capſam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oſcillationibus peragendis neceſſe eſt. Ipſum vero horologium, ad hominis altitudinem ſuſpenſum, horis 30 moveri perſeverat.

Supereſt nunc forma lamellarum deſcribenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præſtandum vel præcipua eſt opera. Absque his enim Penduli ſimplicis oſcillationes (etſi nonnullis aliter viſum eſt) non erunt æque diuturnæ, ſed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque ſeorſim ſuſpendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, ſimulque è manu dimittantur; non diu utrumque ſimul in partes easdem ferri videbitur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri poſſunt, certâ ſcientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus deſcenſus per totum circuli quadrantem eſt ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29. Adeo ut nequaquam reſiſtentiæ aëris ea diverſitas imputanda ſit, ut quidam voluere, ſed ex ipſa motus natura circulique proprietate naſcatur. Quod alio quoque argumento concludi poſſit ex ipſa Penduli iſochroni conſtructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forſan in noſtris horologiis hiſce, ubi eadem ſemper eſt oſcillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod ſane ita eſſet ſi latitudo omni-

um

um planè eadem conſtanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna ſatis conflatur, idque ita eſſe reipſa atque experimentis evincitur. Etſi enim eadem ſemper ſit ponderis vis, rotæ ſibi proximæ reſpectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non ſemper eadem ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evaneſcente aut ſordeſcente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oſcillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in univerſum, ſed his maxime omnium remedio opus ſit, quo reciprocationum Penduli latiorum anguſtiorumque tempora æqualia evadant. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus poſitum eſt remedium iſtud, in primis Penduli longitudinem ſtatuiſſe oportet, quæ facile ex eo habetur, quod ſint inter ſe longitudines perpendiculorum, ſicut temporum quæ in ſingulos recurſus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod ſcrupula ſecunda metitur, ejus quarta pars, ſive unciæ novem debeantur ei quod ſemiſecunda notaturum ſit. Item ſi Penduli longitudo quæratur, cujus recurſus ſimplices 10000 horæ ſpatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe tripedalis ſcimus 3600 recurſus in horas ſingulas numerari: ergo hujus recurſuum tempora ſingula, majora ſunt temporibus Penduli quæſiti, proportione 10000 ad 3600, ſive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc eſt, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{65}{100}$.

Poſita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis propoſito, inde Cycloïs linea, quæ curvaturam laminarum T datura eſt, hoc modo deſcribetur.

Super tabula plana affigatur regula A B, ſemidigiti craſſitudine. Deinde fiat cylindrus C D E eadem illa altitudine, diametrum TAB. III. Fig. 1.

metrum

Descriptio Horologii. metrum vero baſeos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; ſitque F G H E faſciola, ſeu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta ſit, partim extendatur juxta latus regulæ A B. Cylindro autem infixa ſit ferrea cuſpis D I, pauxillum ultra baſin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte reſpondeat.

His ita ſe habentibus, ſi cylindrus ſecundum regulam A B volvatur, bracteolæ tantum F G craſſitudine intercedente, eâque ſemper quantum poteſt extensâ, deſcribet cuſpis I in ſubjecto tabulæ plano lineam curvam K I, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit C D E, cylindri adhibiti baſis. Quod ſi jam laminam K L ad regulam A B applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione K I, invertemus deinde ipſam, & in ſuperficie adverſa ſimilem lineam K M, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram M K I, accurate ſecundum lineas iſtas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interſtitium aptari oportet, inter quas perpendiculum ſuſpenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum uſum portiones exiguæ arcuum K M, K I; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non poteſt.

TAB. III. Fig. 2. Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras ſemicycloides K M, K I, alio ſchemate hic exprimere viſum fuit, inter quas ſuſpenſum agitatumque Pendulum K N P, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oſcillationes, usque ad maximam omnium per arcum M P I, iisdem temporibus confecturum ſit: atque ita, ut appenſæ ſphæræ P centrum, in linea M P I, quæ & ipſa cyclois integra eſt, ſemper verſetur. Quæ proprietas inſignis, neſcio an alii præter hanc lineæ data ſit, ut nempe ſe ipſam ſui evolutione deſcribat. Hæc autem quæ dicta ſunt, in ſequentibus, ubi de deſcenſu gravium, deque evolutione curvarum agemus, ſingula demonſtrabuntur.

Li-

Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro A B, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, A C, C D, D E, E F, A G, G H, H I, I K, jungantur G C, H D, I E, K F, quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui A F sumatur æqualis linea recta L M, eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu A F, earumque partium uni æquales ponantur singulæ C N, G O in recta C G; duabus vero partibus rectæ L M, æquales fiant singulæ D P, H Q in recta D H. Tribus vero, singulæ E R, I S in recta E I; atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti L M æquales fiant singulæ F T, K V in linea extrema F K. Jam si curvæ describantur per puncta A O Q S V, A N P R T, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet. DESCRIPTIO HOROLOGII. TAB. III. Fig. 3.

Recta autem L M æqualis arcui A F invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus A F subtenduntur, æqualis ponatur X Z, totius vero arcus subtensæ A F æqualis ab eodem termino accipiatur X Y, differentiæque Y Z triens Z Δ ad totam X Z adponatur. Nam tota X Δ toti arcui A F tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est.

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Oculo observatoris certus eligatur locus, unde sidera despici possint, simulque tecta parietesve vicinarum ædium, sic posita, ut, cum eò appulerint stellæ quædam è fixarum numero, simul videri desinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, constituatur, ut sequentibus diebus,

F abs-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

absque errore, oculus ad idem punctum reponi possit. Jam ad momentum ipsum, cum stellarum aliqua è conspectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem postero die, vel potius aliquot diebus intermissis, fiat. Quod si tantum unius diei spatium duabus observationibus intercesserit, oportet in postrema observatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima observatione annotatum fuerat, scrupulis primis 3, secundis 56. Ita enim rectè se habere perpendiculi longitudinem constabit; quum tanto superetur quælibet siderum fixorum revolutio à die solari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies solares, de meridie ad meridiem, non omnes inter se æquales sunt, ut mox amplius exponetur. Si vero post plures demum dies observatio repetatur, in singulos tantundem differentiæ causa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima observatione, ad momentum evanescentis stellæ, adnotata horologii hora 9, cum scrupulis primis 30, secundis 18; deinde, septimo post die, eâdem disparente stellâ, indicet horam 8, cum scrupulis pr. 50, sec. 24. Hæc hora deficit à priore scrupulis pr. 39, secundis 54. Quæ, in septem divisa, dant retardationem diurnam scrupulorum 5′. 42″. Debebat autem esse scrupulorum 3′. 56″. quæ illâ minor est scrupulis 1′. 46″. Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, seu media, dierum mensura.

Cæterum alio quoque modo, ad solem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter se æquales; & quanquam exiguum sit discrimen, tamen plurium dierum intervallo sæpe eo usque excrescit, ut haudquaquam contemni possit. Etenim si & solarium quam perfectissime descriptum habeatur, & horologii automati motus ad verissimam dierum mensuram exactus sit, neque ab ea recedat; eveniet tamen necessario ut, certis anni temporibus, sæpe horæ quadrante, aut etiam semihora, inter se discrepent, ac rursus statis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita esse, ex tabula temporis

poris æquatoria quam ſubjicimus, intelligetur; poſtquam uſum ejus oſtenderimus, qui eſt hujusmodi. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Accipiatur æquatio tabulæ, aſſignata diei qua primum cum ſole, ſive cum ſciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum menſuram temperatum ſit. Quod ſi jam prior æquatio major fuerit ſequente, ſuperare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter ſe æquationes iſtæ differunt. At ſi poſterioris diei æquatio major inveniatur, erit exceſſus penes horam gnomonis, ſive eam quæ ex ſole obſervatur. Ut ſi, exempli gratiâ, die 5 Martii in eandem horam conveniant ſciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, ſcrupulorum primorum 3, ſecundorum 11. lubeatque ſcire ejusdem menſis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die poſteriori adſcripta æquatio ſcrupulorum primorum 7, ſecundorum 27. quæ quia ſuperat præcedentem ſcrupulis primis 4, ſecundis 16, debebit tanto ſerior eſſe hora ſciotherici, quam quæ automato indicatur. Unde, ſi diverſum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies ſingulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem cauſam adhibui, utramque Aſtronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & ſolaris motus anomaliam. Quod cum ratio poſtulat, tum experientia quoque, his ipſis horologiis ſuperſtructa, quæque ſine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hìc propoſita, obſervationes ſolis; quas ſæpe per complures menſes, quotidie ad momentum quo meridianum circulum ſol occuparet, inſtituimus, planiſſime conſentire inventæ ſunt.

Dies.	*Januar.* Min.	Sec.	*Febr.* Min.	Sec.	*Mart.* Min.	Sec.	*Apr.* Min.	Sec.	*Maj.* Min.	Sec.	*Jun.* Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

Descriptio Horologii.

Jam postquam utrovis modo eorum quos diximus, sed priore potius, examen institutum fuerit, si multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima scrupula ascendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipsius penduli longitudine. Ubi hæc tenenda est regula, tot scrupulis primis, in singulos dies, motum horologii acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{1}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram mensuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio transpositione exigui ponderis Δ, virgæ V V adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus sectionem secundum axem in figura 1. expressimus. Et quia tantum vicesimam tricesimamve, aut etiam minorem, partem æquat ponderis X, hinc fit ut sat magnis spatiis è priore loco discedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties versus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde sursum aut deorsum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum sit quo verissimam daturum sit dierum mensuram, divisimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, posito nimirum pondere Δ parte quinquagesima ponderis X, parique gravitate ipsius virgæ V V. Quæ quidem divisiones figura 4. exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes secta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, est A B. Punctum A est centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, centro oscillationis, partes singulæ, quindecim scrupulorum secundorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonstratio autem divisionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oscillationis.

TAB. II. Fig. 1.

TAB. II. Fig. 4.

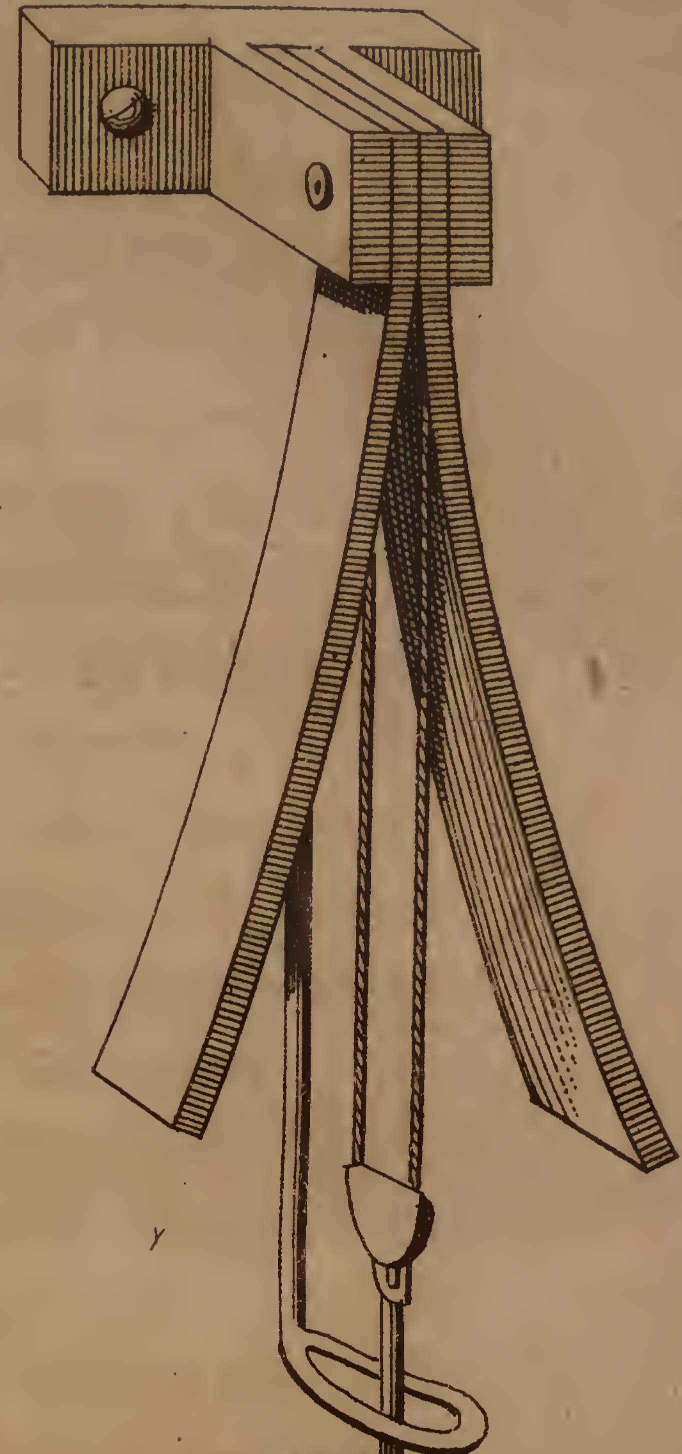
Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratiâ, formam hic describeremus, si quænam maxime ad hunc usum accommodata sit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etsi quidem jam nunc eo res deducta sit, ut parum deesse

TAB. II.

Fig. 1.

Y Z λ λ Y A A N B P Q L L M T K 15 I 24 H G 8 R F 48 48 8 E C S V V Δ X 72 30 β ε θ α ε θ β γ ζ D D 80 C 6 30 γ δ B

Fig. 2.



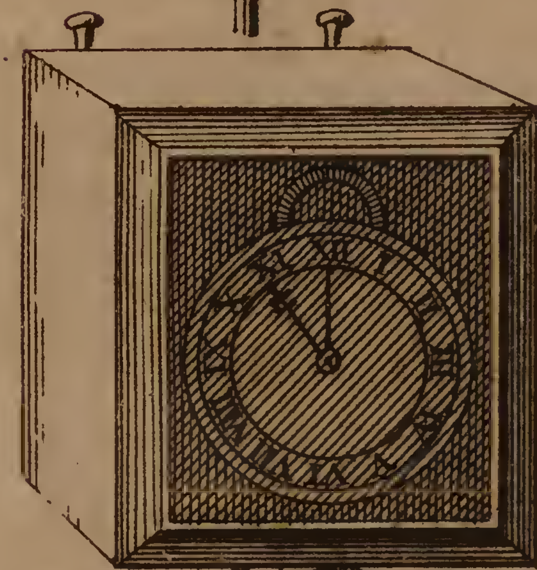
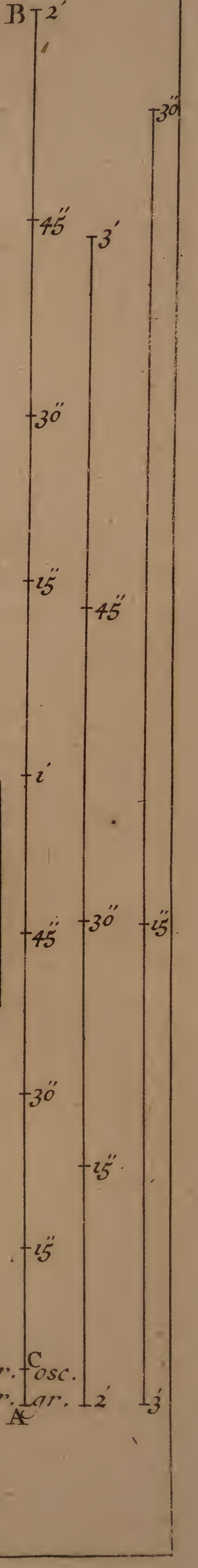


Fig. 3.

a b c d e f g

Fig. 4.



deesse videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hìc tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponere non pigebit.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in spiram convolutam, cujus vi rotæ circumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri solent automatis adhiberi solent. Ut autem jactationem navis perferre possent, è chalybea pila, cylindro æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedali longitudine pendulum) deorsum productam geminaverat, ut literæ F inversæ formam referret; ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe, cum à Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hìc ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aquâ ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse; confisum pen-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt naves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum differentiæ disignatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. scrup. 22′ reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20. scrup. 30′. ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui consensus certissimum veritatis est indicium.

Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui *Maretimo* nomen est, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20′. Item à Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5′, sec. 45″, quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26.

Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum naves



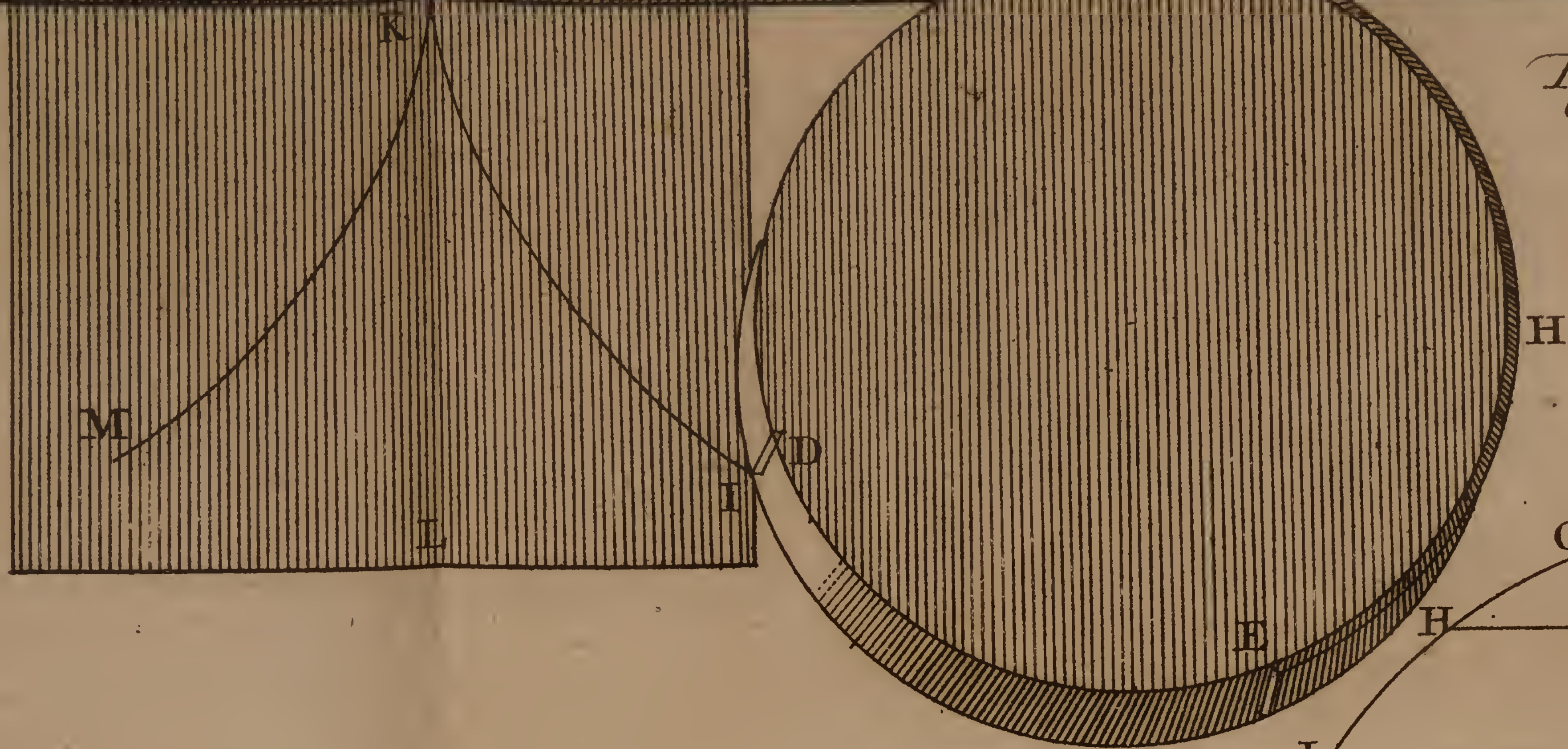


Fig. 1.

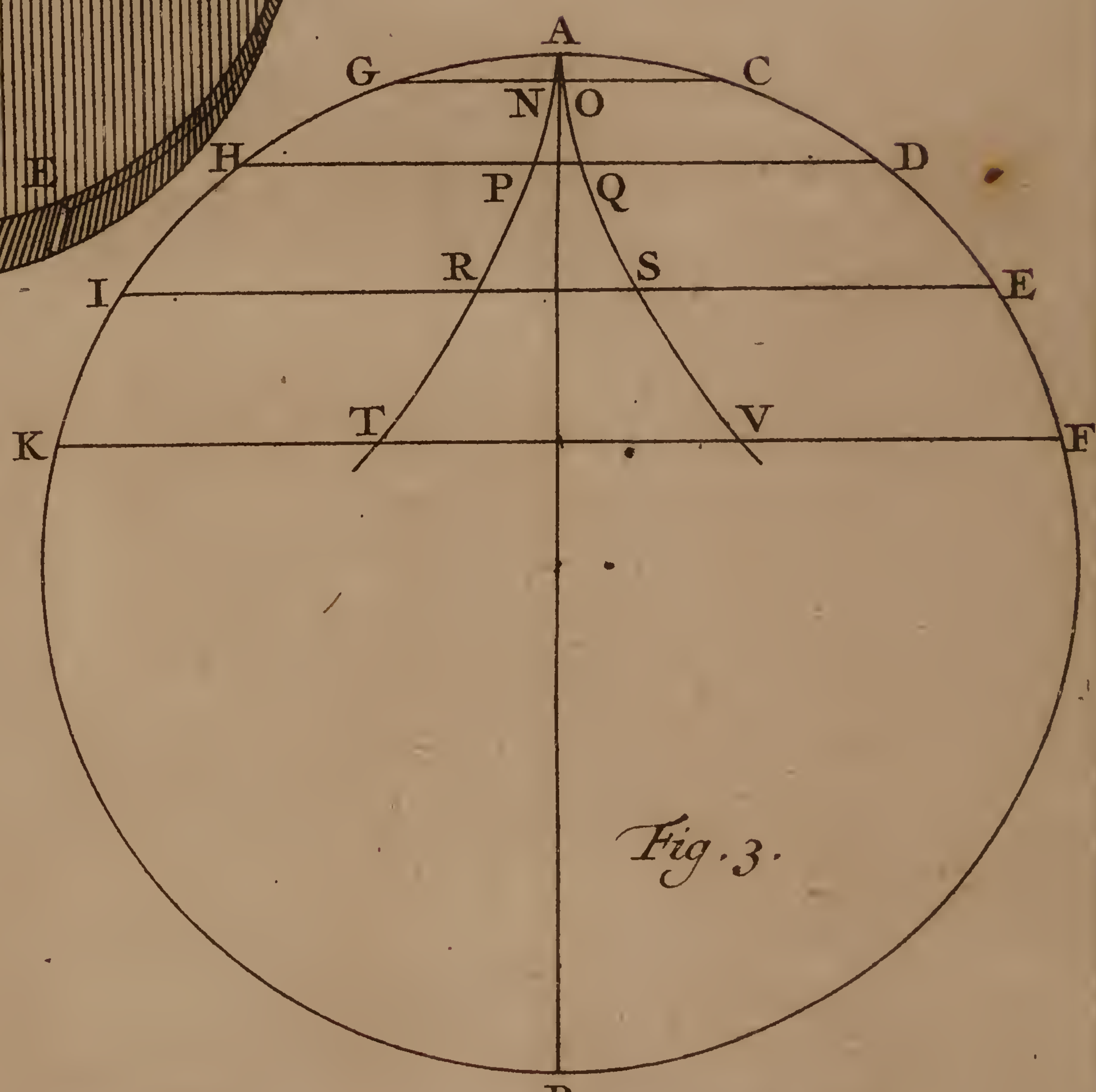
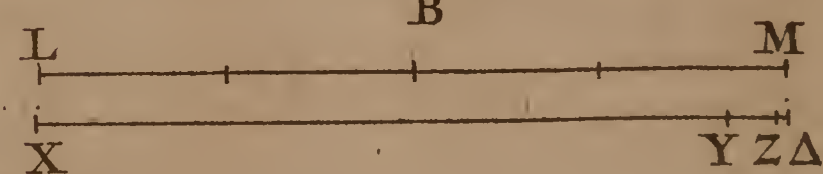


Fig. 3.



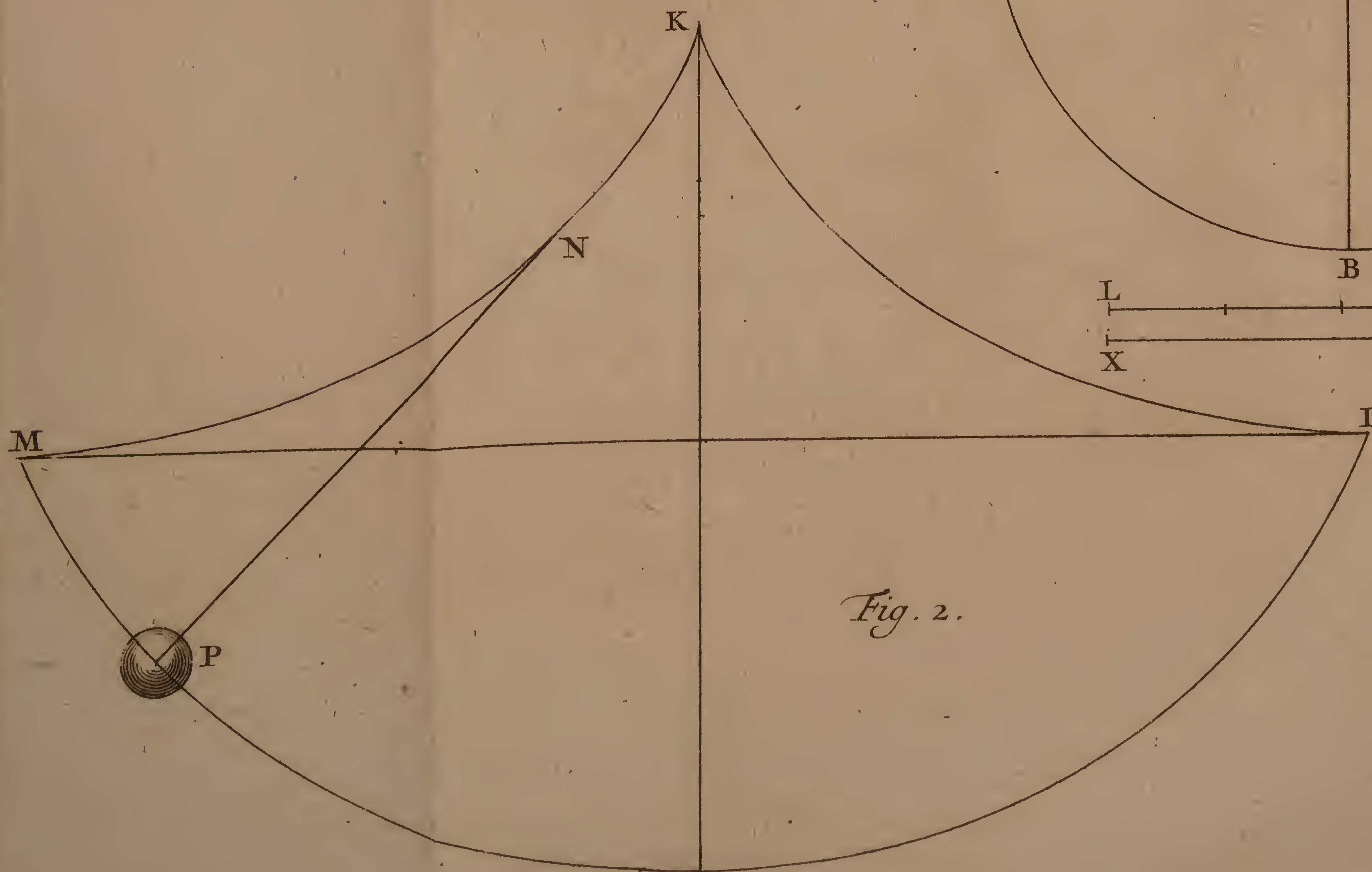


Fig. 2.

ves in anchoris ſtant omnium optima videtur, quod, abſque inſtrumentorum ope, ſolis oculis eæ obſervationes peragantur. Descriptio Horologii.

Pendulum vero unciarum novem longitudine inerat horologiis hiſce, pondere ſemiſſis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca incluſæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum inſuper centum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularem ſitum ſuſpenſa in navi machina ſervaret.

Quanquam autem æquabilis admodum ſibique conſtans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggreſſi ſumus, quæ erat hujuſmodi. Rotæ illi quæ ſerratos dentes habet, penduloque proxima eſt, pondus exiguum ex catenula affabre conſtructa appendimus, quo ſola ipſa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut ſingulis ſemiſcrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem reſtitueret; eadem fere ratione atque in conſtructione horologii ſuperius expoſita videre eſt, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem ſuam horologii motui impertit. Quibus ita conſtructis, cum veluti ad unicam rotam omnia eſſent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam conſtructa ex eodem tigno ſuſpendiſſemus, tignum vero fulcris duobus impoſitum eſſet; motus penduli utriuſque ita ictibus adverſis inter ſe conſenſere, ut nunquam inde vel minimum recederent, ſed utriuſque ſonus una ſemper exaudiretur: imo ſi data opera perturbaretur concordia illa, ſemetipſam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo inſolitam, inveni denique, inſtituto diligenti examine, à motu tigni ipſius, licet haudquaquam ſenſibili, cauſam petendam eſſe. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipſi impreſſum, neceſſario efficere ut ſi aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum u-

G trum-

Descriptio Horologii.

trumque moveatur, eo tamen necessario tandem deveniant; ac tum demum tigni motum penitus interquiescere. Quæ tamen causa non satis efficaciæ haberet, nisi & horologiorum motus aliunde æquabilissimus foret atque inter se consentiens.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præsertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum absque interruptione conservando habendam esse, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadversum sit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipsa suspendimus. Pendulum trianguli formam habet, in cujus vertice deorsum spectante plumbea lens affixa est. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales suspensi sunt. Basis clavulam bifurcatam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota serrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere sed à chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare est A B C; lens plumbea B; laminæ cycloidales E D, F G. Clavula bifurcata H K; rota serratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior est. Lenticulæ ad temperandum penduli motum L L.

Tab. IV. Fig. 1.

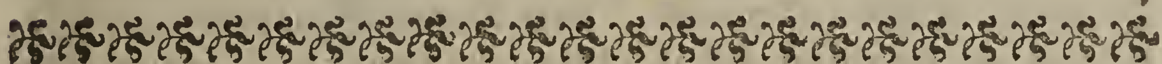
Tab. IV. Fig. 2.

Suspensionis modum altera hæc figura exhibet; ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inserta est; quod deinde rectangulum rursus axibus suis F G ferreo gnomone F H K G sustinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus est. in ima theca pondus 50 librarum appensum est. Quibus ita se habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium. Axis autem C, cum sibi opposito, ita collocati sunt, ut ad rectam lineam respondeant punctis suspensionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipsius oscillatorius machinam nequaquam commovere possit, quo nihil est alioqui quod magis penduli motum destruat. Porro axium C C, & F G crassitudo, quæ polli-

cem

cem æquat, gravitasque plumbi inferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut si forte succussu navis graviore commotum fuerit, continuo ad quietem perpendiculumque suum revertatur. Descriptio Horologii.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur superest, quæ & certam pene successus spem præbet, quod iis quæ hactenus instituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diversitatem perferre reperta sit.



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECUNDA.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

SI gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unumquodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri.

De descensu gravium. Tab. IV. Fig. 3.

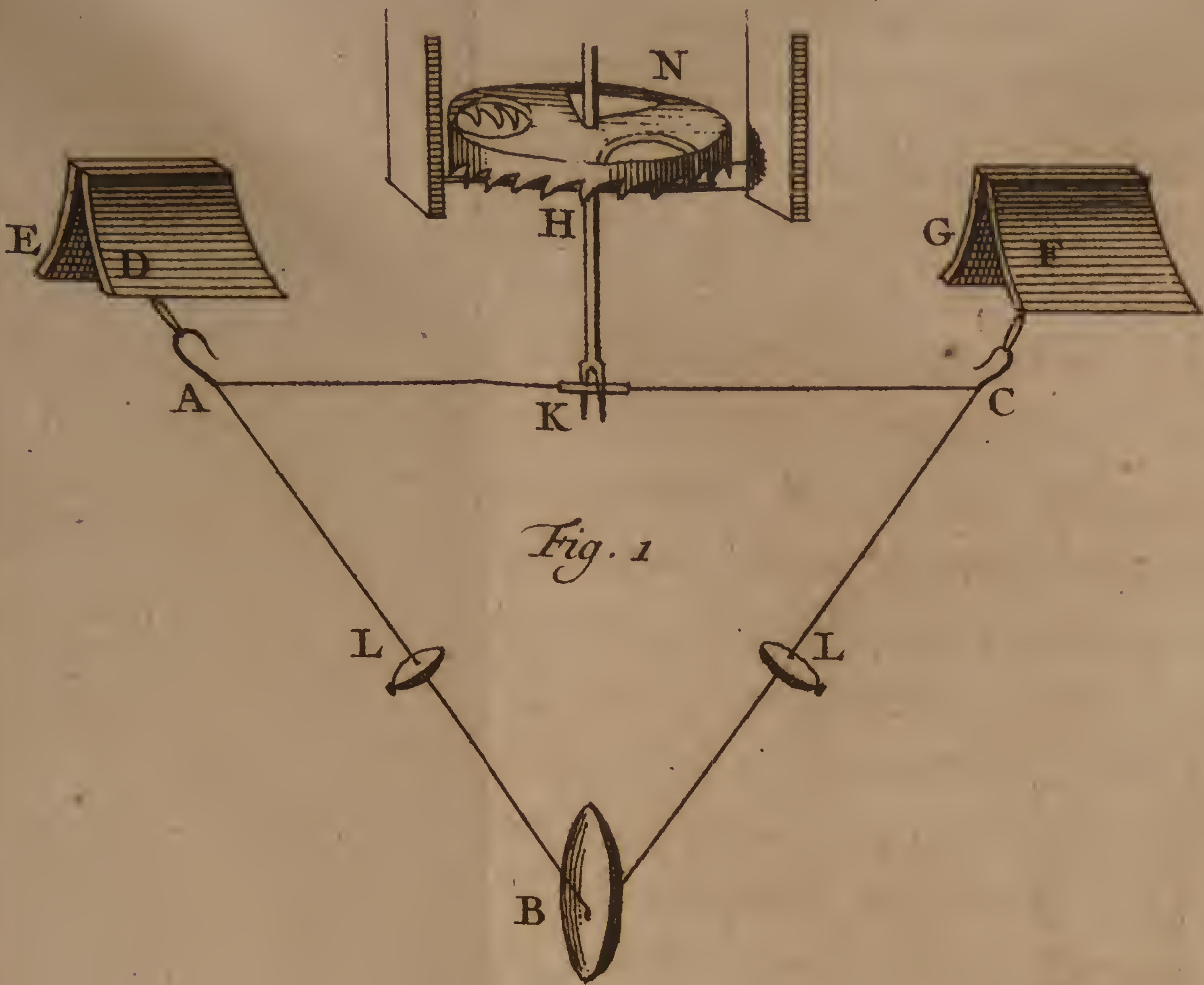
Ponatur grave C è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium C B: Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam C D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium D E semper æquetur spatio C B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis C D, apparet lineam C D, accedente motu ex gravitate, augeri recta D E. Item, cum sursum tendit motus æquabilis C D, ipsam C D diminui recta D E, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur semper in puncto E. Quod si, utroque hoc casu, seorsim, uti diximus, duos motus consideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium causam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo ista simul ostendemus.

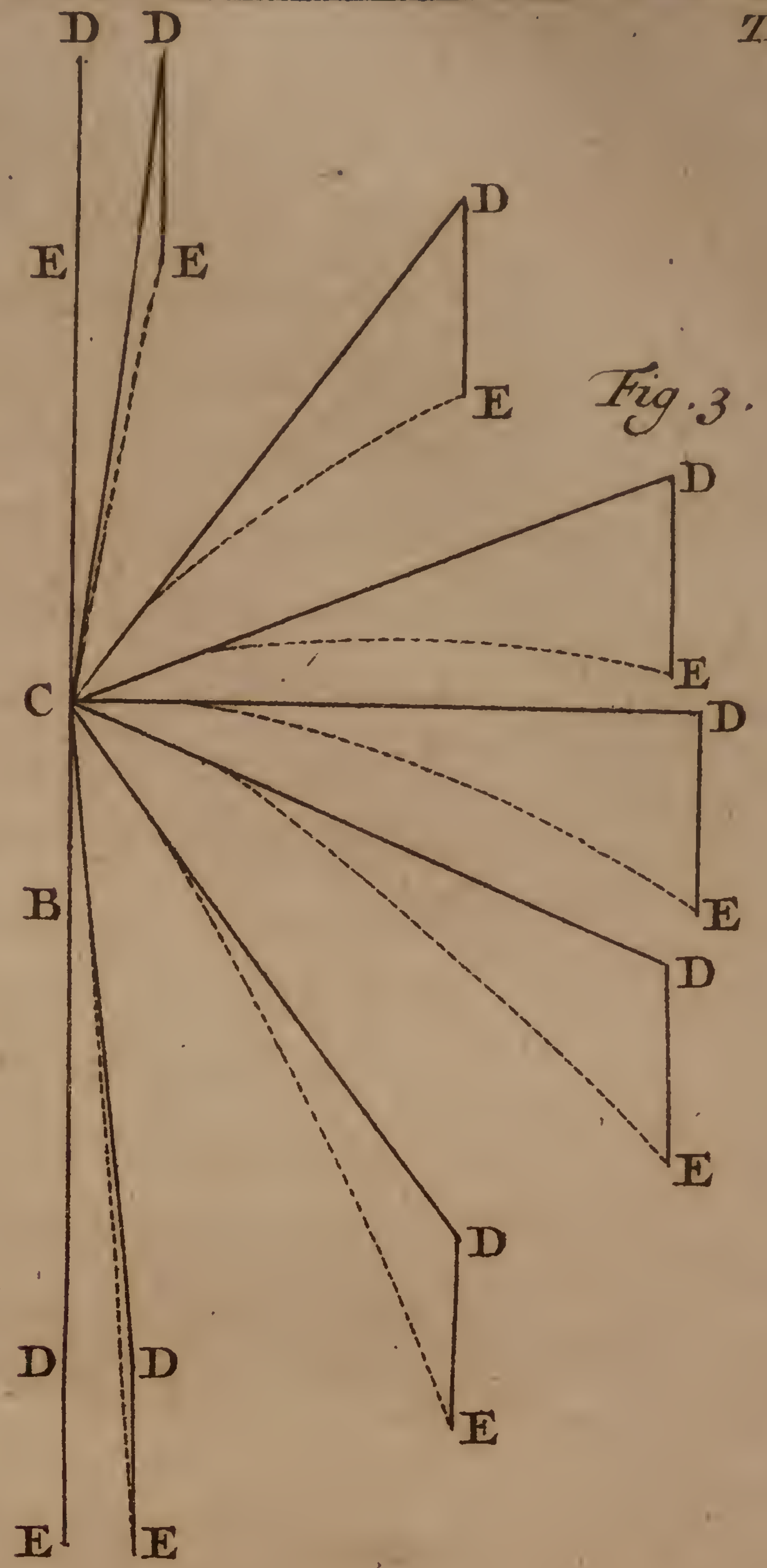
PROPOSITIO I.

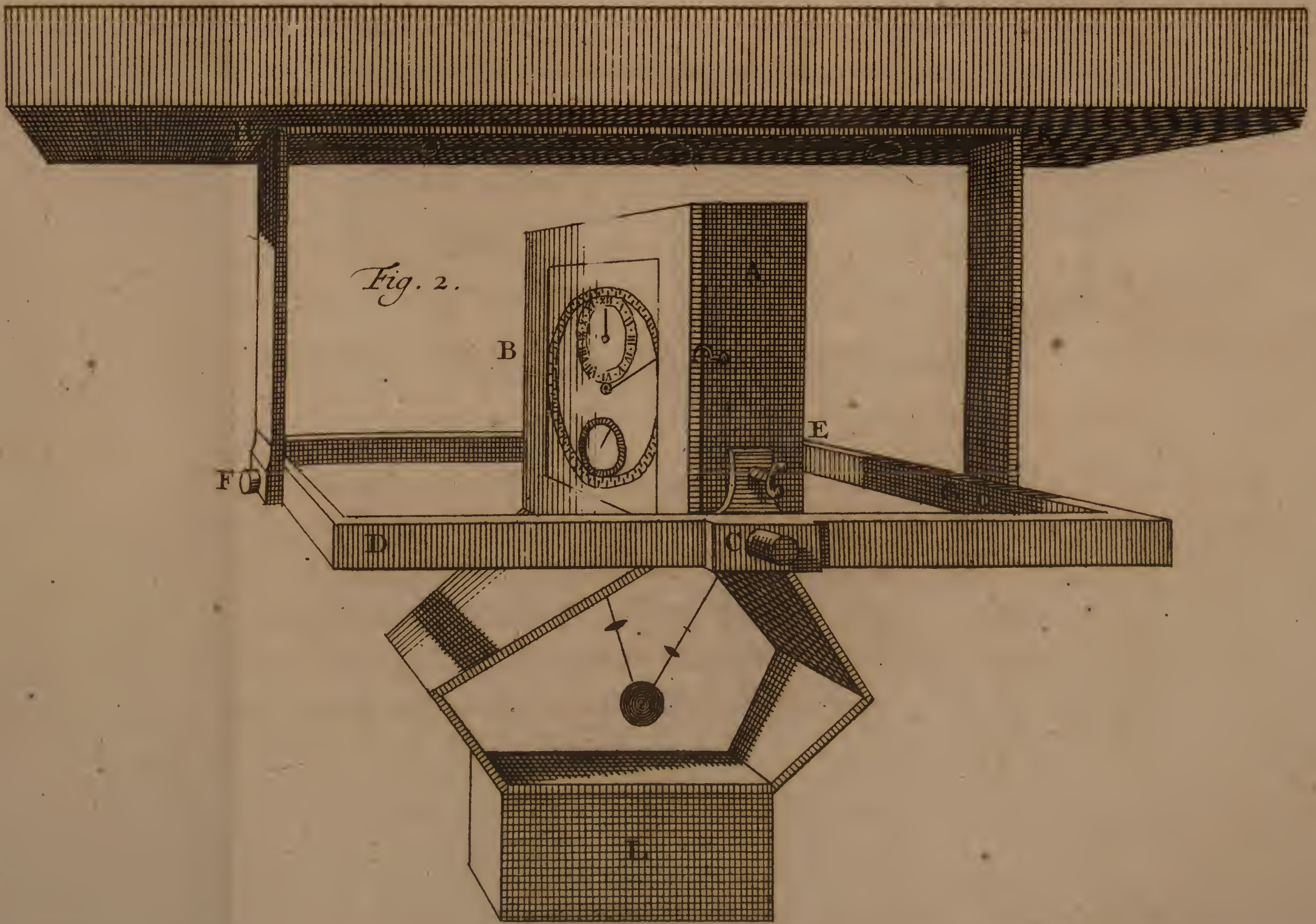
Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accrescere, & spatia æqualibus temporibus ab initio descensus emensa, augeri continue æquali excessu.

Tab. V. Fig. 1.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapsum esse per spatium A B, atque ubi pervenit in B, acquisivisse celeritatem qua deinceps, tempore secundo, motu æquabili, percurrere posset spatium quoddam B D. Scimus ergo spatium secundo tempore peragendum majus fore spatio B D, quia vel cessante in B omni gravitatis actione spa-


N
H
E
D
G
F
A
K
C
Fig. 1
L
L
B


D D
E E
D
E
Fig. 3.
D
E
C
D
B
E
D
E
D
D D
E
E E


Fig. 2.
A
B
E
F
D
C
L

ſpatium B D percurreretur. Feretur vero motu compoſito ex æquabili quo percurſurum eſſet ſpatium B D, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi neceſſe eſt per ſpatium ipſi A B æquale. Quare ad B D addita D E, æquali A B, ſcimus tempore ſecundo grave perventurum ad E. DE DESCENSU GRAVIUM.

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium E F, quod duplum futurum ſit ſpatii B D; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium E F, etiam ſpatium F G, ipſi A B vel D E æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium G H triplum ſpatii B D, & ſpatium H K ipſi A B æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi.

DE DESCENSU GRAVIUM.

Atque ita ſpatia quotlibet deinceps conſiderata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali exceſſu, qui ipſi B D æqualis ſit, creſcere manifeſtum eſt; ſimulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete caſum inchoante, dimidium eſt ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

TAB. V. Fig. 1.

Ponantur quæ in propoſitione præcedenti, ubi quidem A B erat ſpatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. B D vero ſpatium quod pari tempore tranſiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquiſita erat in fine primi temporis, ſeu in fine ſpatii A B. Dico itaque ſpatium B D duplum eſſe ad A B.

Quum enim ſpatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente tranſmiſſa ſint A B, B E, E G, G H, quorum inter ſe certa quædam eſt proportio: ſi eorum temporum dupla tempora ſumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus ſpatia A B, B E, peracta fuere; pro ſecundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere ſpatia E G, G K, oportet jam ſpatia A E, E K, quæ ſunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter ſe eſſe ſicut ſpatia A B, B E, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur ſit ut A B ad B E, ita A E ad E K; & convertendo, ut E B ſive D A ad A B ita K E ad E A: erit quoque, dividendo, D B ad B A ut exceſſus K E ſupra E A ad E A. Quum ſit autem, ex oſtenſis propoſitione præcedenti, K E æqualis tum duplæ A B, tum quintuplæ B D: E A vero æqualis tum duplæ A B, tum ſimplici B D; apparet dictum exceſſum K E ſupra E A æquari quadruplæ B D.

B D. Sicut igitur D B ad B A ita erit quadrupla D B ad E A: unde E A quadrupla erit ipſius B A: eadem vero E A æquatur, uti diximus, & duplæ A B & ſimplici B D. ergo B D duplæ A B æqualis erit; quod erat demonſtrandum.

DE DESCENSU GRAVIUM.

PROPOSITIO III.

Spatia duo, à gravi cadente quibuslibet temporibus transmiſſa, quorum utrumque ab initio deſcenſus accipiatur, ſunt inter ſe in ratione duplicata eorundem temporum, ſive ut temporum quadrata, ſive etiam ut quadrata celeritatum in ſine cujusque temporis acquiſitarum.

Quum enim oſtenſum ſit propoſitione antecedenti ſpatia A B, B E, E G, G K, quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente, peracta, creſcere æquali exceſſu, qui exceſſus ſit ipſi B D æqualis: Patet nunc, quoniam B D eſt dupla A B, ſpatium B E fore triplum A B; E G quintuplum ejuſdem A B; G K ſeptuplum; aliaque deinceps auctum iri ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, ſeſe conſequentium, ſumma faciat quadratum, cujus latus eſt ipſa adſumptorum numerorum multitudo (velut ſi tres primi addantur, facient novem, ſi quatuor ſexdecim) ſequitur hinc ſpatia, à gravi cadente tranſmiſſa, quorum utrumque à principio caſus inchoetur, eſſe inter ſe in ratione duplicata temporum quibus caſus duravit, ſi nempe tempora commenſurabilia ſumantur. TAB. V. Fig. 1.

Facile autem & ad tempora incommenſurabilia demonſtratio extendetur. Sint enim tempora hujuſmodi, quorum inter ſe ratio ea quæ linearum A B, C D. ſpatiaque temporibus his tranſmiſſa ſint E, & F, utraque nimirum ab initio deſcenſus adſumpta. Dico eſſe, ut quadratum A B ad quadratum C D, ita ſpatium E ad F. TAB. V. Fig. 2.

Si

De descensu gravium.

Si enim negetur; habeat primo, si potest, spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D, nempe eam quam quadratum A B ad quadratum C G, sumta C G minore quam C D, & à C D auferatur pars D H, minor quam D G excessus C D supra C G, atque ita ut reliqua H C commensurabilis sit ipsi A B; hoc enim fieri posse constat. Erit ergo C H major quam C G. Atqui ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C H, ita spatium E, quod tempore A B peractum est, ad spatium peractum tempore C H, per superiùs ostensa. Hoc vero spatio majus est illud quod tempore C D percurritur, nempe spatium F. ergo spatii E ad spatium F minor est ratio quam quadrati A B ad quadratum C H. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C G; ergo minor quoque erit ratio quadrati A B ad quadratum C G, quam quadrati A B ad quadratum C H, ac proinde quadratum C G majus quadrato C H; quod est absurdum, quum C H major dicta sit quam C G. Non habet igitur spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D.

Habeat jam, si potest, minorem; sitque ratio spatii E ad F eadem quæ quadrati A B ad quadratum C L, sumptâ C L majore quam C D, & à C L auferatur L K minor excessu L D, quo C D superatur à C L, atque ita ut reliqua K C sit commensurabilis A B. Quia ergo ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C K, ita est spatium E, peractum tempore A B, ad spatium peractum tempore C K. Hoc vero spatio minus est spatium peractum tempore C D, nempe spatium F. erit proinde spatii E ad F major ratio quam quadrati A B ad quadratum C K. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C L. Ergo major erit ratio quadrati A B ad quadratum C L quam ejusdem quadrati A B ad quadratum C K, ideoque quadratum C L minus erit quam qu. C K. quod est absurdum, quum C L major sit quam C K. Ergo neque minorem rationem habet spatium E ad F quam qua-

quadratum A B ad quadratum C D. quare necesse est ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum A B, C D acquisitæ sint inter se sicut ipsamet tempora; apparet rationem spatiorum E ad F eandem quoque esse quæ quadratorum temporum A B, C D, quibus transmissa sunt. Itaque constat propositum.

DE DESCENSU GRAVIUM.

PROPOSITIO IV.

SI grave celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, fiet ut paribus temporis partibus, spatia quæ prius sursum, eadem deorsum transeat, adeoque ad eandem unde descenderat altitudinem ascendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

TAB. V. Fig. 1.

Sunto enim ut in propositione 2, spatia quotlibet, æqualibus temporis partibus cadendo è quiete peracta, quorum primum A B; secundum compositum ex B D, quod celeritate æquabili acquisita per A B transeundum erat, & ex D E ipsi A B æquali; tertium compositum, ex E F, duplo ipsius B D, & ex F G, eidem A B æquali; quartum compositum ex G H, triplo ipsius B D, & ex H K ipsi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro crescentia, si plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem spatia K G, G E, E B, B A, singula singulis peragenda esse à gravi sursum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine descensus K acquisita.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque designetur deinceps longitudine spatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in descensu consideravimus, transmissurum esset.

Itaque ex ostensis dicta propositione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem G H auctam celeritate B D,

H hoc

DE DESCENSU GRAVIUM.

hoc eſt celeritatem K F, quia K F æquatur ipſis H G, B D, ſunt enim partes ſingulæ H K, F G, æquales ipſi A B, ac proinde utraque ſimul ipſi B D, quam eſſe duplam A B oſtendimus propoſitione 2. Itaque celeritatem in fine deſcenſus K acquiſitam ſurſum convertendo, ſi grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte ſpatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur aſcenſus K F ſpatio F G ipſi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypotheſin initio ſumptam. Ergo parte prima temporis aſcendet grave tantum per K G, quo eodem ſpatio parte temporis noviſſima deſcenderat. Simul vero & celeritati tantum deceſſiſſe neceſſe eſt, quantum acquiritur temporis parte una deorſum cadendo, hoc eſt celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G aſcenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio aſcenſus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Eſt autem ipſi H G æqualis G D; quum æquetur ipſi F E una cum D B, hoc eſt una cum dupla A B, hoc eſt una cum duabus F G & E D; Ergo ſi ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, conficeret una parte temporis ſpatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur aſcenſus iſte ſpatio D E, ipſi A B æquali. Ergo, hac ſecunda parte temporis, aſcendet per ſpatium G E, quod ſimili temporis parte etiam cadendo tranſierat. Simul autem celeritati tantum deceſſiſſe denuo debet quantum temporis parte una ex caſu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubi uſque ad E aſcenderit, habet duntaxat celeritatem F E, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate G D aufertur celeritas B D. Nam B D, ut jam diximus, æqualis eſt duabus D E, F G.

Eſt autem ipſi F E æqualis E A, quum F E æquetur ipſi B D bis ſumptæ, hoc eſt ipſi B D una cum dupla A B, hoc eſt una cum duabus A B, D E. Ergo ſi ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, confecturum eſſet una temporis parte ſpatium E A. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur aſcenſus iſte ipſo ſpatio A B. Proinde hac parte temporis per ſpatium E B tantum aſcen-

ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam B D reliquam, cum in E habuerit celeritatem F E ipsius B D duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi D B, hoc est duplum A B. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi A B æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium B A, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas B D, patet jam gravi in A constituto nullam celeritatem superesse, ac proinde non altius excursurum. Itaque ostensum est ad eandem unde decidit altitudinem pervenisse, & singula spatia, quæ æqualibus descensus temporibus transmiserat, eadem totidem ascensus temporibus remensum esse: sed & æqualibus temporibus æqualia ipsi decessisse celeritatis momenta apparuit. Ergo constat propositum.

DE DESCENSU GRAVIUM.

Quia vero in demonstratione propositionis secundæ, ex qua pendet præcedens, adsumptum fuit certam quandam esse proportionem spatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem sit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita se habere necesse est, & si negetur, fatendum frustra proportionem istorum spatiorum investigari. Tamen, quia propositum etiam absque hoc demonstrari potest, Galilei methodum sequendo, operæ pretium erit demonstrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conscribere. itaque rursum hic demonstrabimus.

De descensu gravium.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete casum inchoante, dimidium esse ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum celeritate quam acquisivit ultimo casus momento.

Tab. V. Fig. 3.

Sit tempus descensus totius A H, quo tempore mobile peregerit spatium quoddam cujus quantitas designetur plano P. ductaque H L perpendiculari ad A H, longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine casus acquisitam. Deinde completo rectangulo A H L M, intelligatur eo notari quantitas spatii quod percurreretur tempore A H, cum celeritate H L. Ostendendum est igitur planum P dimidium esse rectanguli M H, hoc est, ducta diagonali A L, æquale triangulo A H L.

Si planum P non est æquale triangulo A H L, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, si fieri potest, planum P minus triangulo A H L. dividatur autem A H in tot partes æquales A C, C E, E G &c. ut, circumscriptâ triangulo A H L figurâ è rectangulis quorum altitudo singulis divisionum ipsius A H partibus æquetur, ut sunt rectangula B C, D E, F G, alteráque eidem triangulo inscriptâ, ex rectangulis ejusdem altitudinis, ut sunt K E, O G &c. ut, inquam, excessus illius figuræ supra hanc, minor sit excessu trianguli A H L supra planum P. hoc enim fieri posse perspicuum est, cum totus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti H L. Erit itaque omnino excessus ipsius trianguli A H L supra figuram inscriptam minor quam supra planum P, ac proinde figura triangulo inscripta major plano P. Porro autem, quum recta A H tempus totius descensus referat, ejus partes æquales A C, C E, E G, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportione qua tempora descensus *; sitque celeritas in

* Prop. 1. huj.

in fine totius temporis acquisita H L; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis A C acquiretur, C K; quia ut A H ad A C, ita H L ad C K. Similiter quæ in fine partis temporis secundæ C E acquiritur, erit E O, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo A C, spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo; tempore vero secundo C E transmissum esse spatium quod majus sit quam K E, quia spatium K E transmissum fuisset tempore C E, motu æquabili, cum celeritate C K. habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore A H, celeritate æquabili H L percurri posuerimus spatium M H, sequitur tempore C E, cum celeritate C K, percurri spatium K E, quum ratio rectanguli M H ad rectangulum K E componatur ex rationibus A H ad C E, & H L ad C K.

Quum ergo, ut dixi, spatium K E sit illud quod transmitteretur tempore C E, cum celeritate æquabili C K, mobile autem feratur tempore C E motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem C K; manifestum est isto accelerato motu, tempore C E, majus spatium quam K E confectum. Eadem ratione, tempore tertio E G, majus spatium conficiet quam O G, quia nempe hoc confectum esset tempore eodem E G, cum celeritate æquabili E O. Atque ita deinceps, singulis temporis A H partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum spatium motu accelerato peractum majus erit ipsa figura inscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P. Itaque figura inscripta minor erit spatio P. quod est absurdum; eodem enim spatio major ostensa fuit. Non est igitur planum P minus triangulo A H L. At neque majus esse ostendetur.

Sit enim, si potest; & dividatur A H in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inscripta circumscriptaque rursus, ut ante, sit triangulo A H L figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori excessu quam quo planum

DE DESCENSU GRAVIUM. P superat triangulum A H L, erit igitur necessario figura circumscripta minor plano P. Constat jam, prima temporis parte A C, minus spatium à mobili transmitti quam sit B C, quia hoc percurreretur eodem tempore A C cum celeritate æquabili C K, quam demum in fine temporis A C mobile adeptum est. Similiter secunda parte temporis C E, minus spatium motu accelerato transmittetur quam sit D E, quia hoc percurreretur eodem tempore C E, cum celeritate æquabili E O, quam demum in fine temporis C E mobile assequitur. Atque ita deinceps, singulis partibus temporis A H, minora spatia à mobili trajicientur quam sunt rectangula figuræ circumscriptæ, ipsis partibus adjacentia. Quare totum spatium motu accelerato peractum, minus erit ipsa figura circumscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumscripta. quod est absurdum, cum figura hæc plano P minor ostensa fuerit. Ergo planum P non majus est triangulo A H L, sed nec minus esse jam ostensum fuit. Ergo æquale sit necesse est; quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonstrata sunt, gravibus per plana inclinata descendentibus atque ascendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire sciendum est: cum, quæ de effectu gravitatis posita fuerunt, eadem ratione utrobique sint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonstrare propositionem sequentem quam concedi sibi, ut quodammodo per se manifestam, Galileus postulavit. nam demonstratio illa quam postea adferre conatus est, quæque in posteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Est autem propositio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ, æquales sunt, si planorum elevationes fuerint æquales.

Ele-

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus secundum perpendiculum. DE DESCENSU GRAVIUM.

Sunto itaque plana inclinata, quorum sectiones factæ plano ad horizontem erecto, A B, C B; quorumque elevationes A E, C D sint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rursus ex C per planum C B. dico utroque casu eundem gradum velocitatis in puncto B acquisiturum. TAB. V. Fig. 4.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, posita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rursus per totam B C possit ascendere *. Ergo & per F B acquiret eam velocitatem qua possit ascendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, si continuet porro motum per B C; quod repercussu ad superficiem obliquam fieri potest; ascendet usque in C, hoc est, altius quam unde decidit, quod est absurdum.

* Prop. 4. huj.

Eodem modo ostendetur neque per planum A B decidenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonstrandum.

Quod si verò, pro plano alterutro, sumatur perpendiculum ipsum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, sic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri constat; eadem namque est demonstratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonstratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de descensu super planis inclinatis tradidit, superstruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

Tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, esse inter se ut planorum longitudines.

Sint

De descensu gravium. Tab. V. Fig. 5.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B. dico tempus descensus per planum A C ad tempus descensus per A D esse ut longitudo A C ad A D. Est enim tempus per A C æquale tempori motus æquabilis per eandem A C, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per A C *. Similiter tempus per A D est æquale tempori motus æquabilis per ipsam A D, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur casu per A D. Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per A C, ad tempus motus æquabilis per A D, erit ut A C ad A D. Ergo & tempora singulis istis æqualia, nimirum tempus descensus per A C, ad tempus descensus per A D, eandem rationem habebunt, nempe quam A C ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj:

* Prop. præced.

Eodem modo ostendetur & tempus descensus per A C, ad tempus casus per A B perpendicularem, esse ut A C ad A B longitudine.

PROPOSITIO VIII.

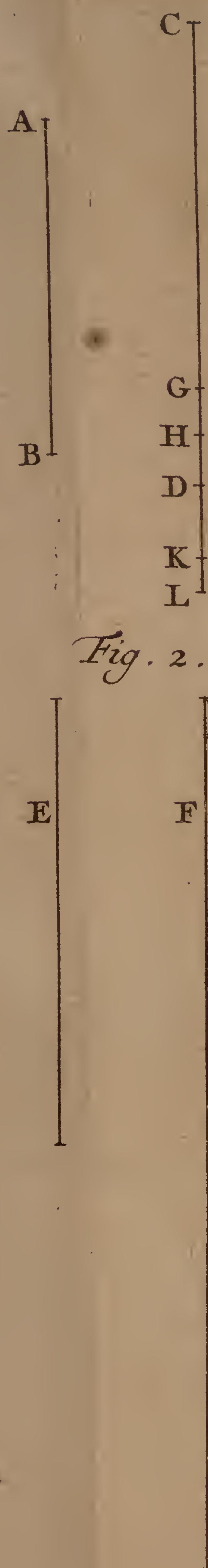
Si ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

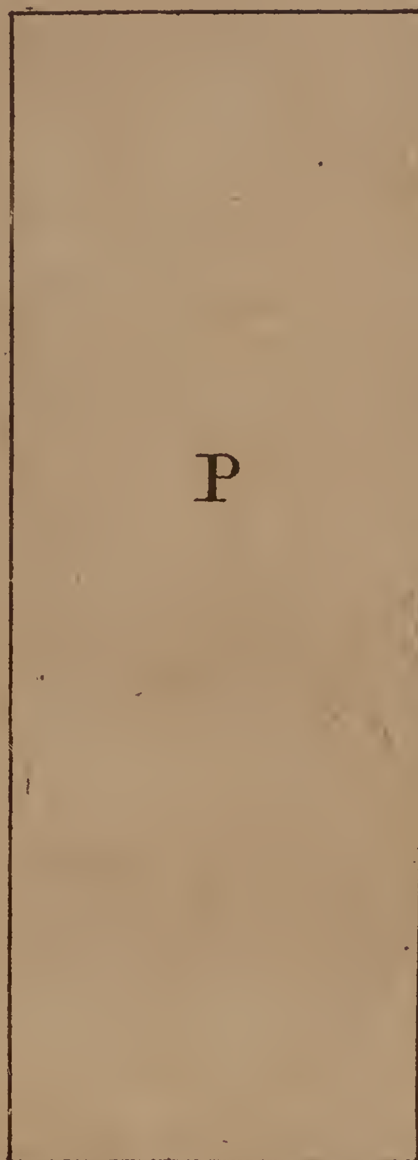
Tab. VI. Fig. 1.

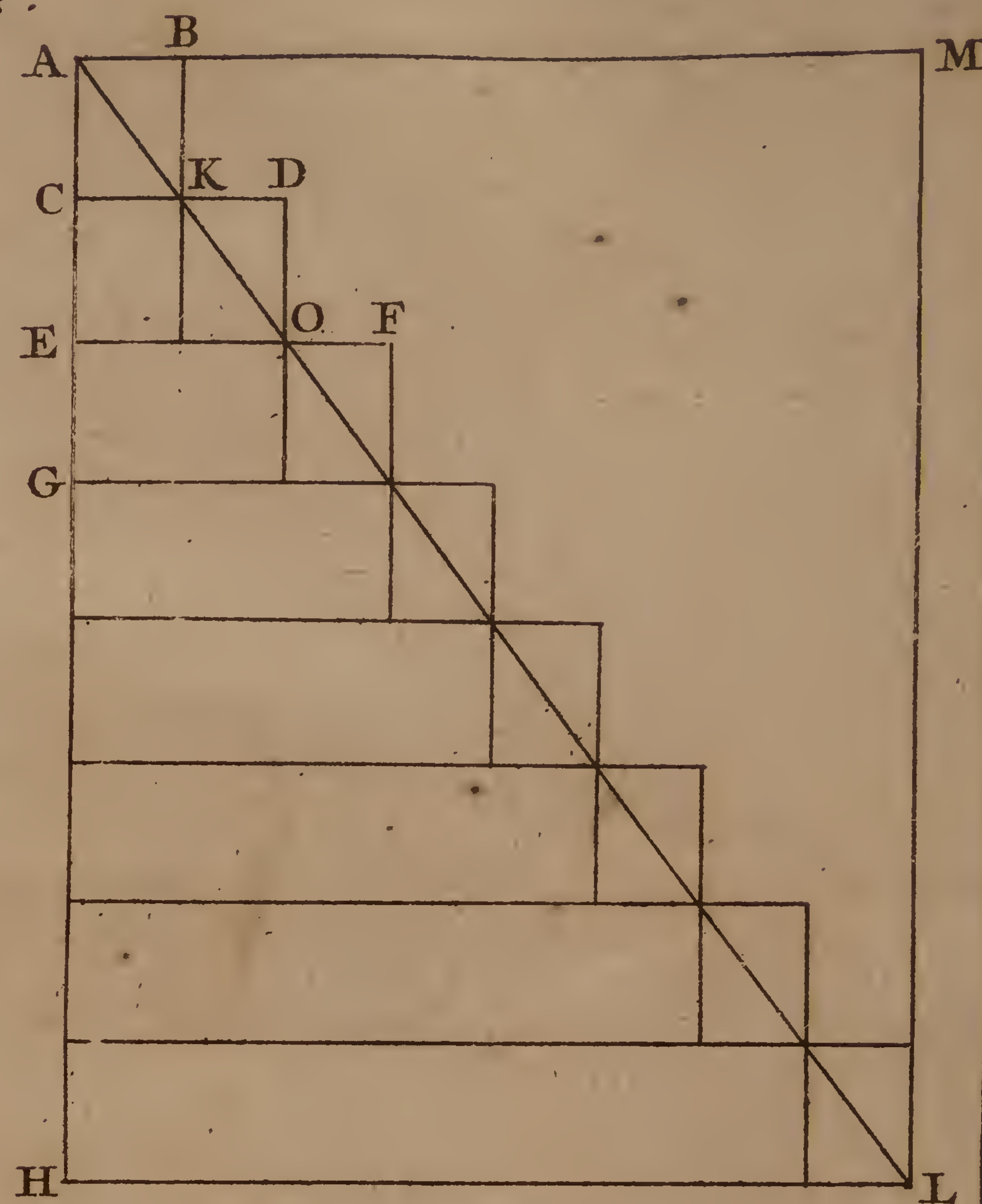
Sint plana contigua A B, B C, C D, quorum terminus A, supra horizontalem lineam D F per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis E F. descendatque mobile per plana illa ab A usque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

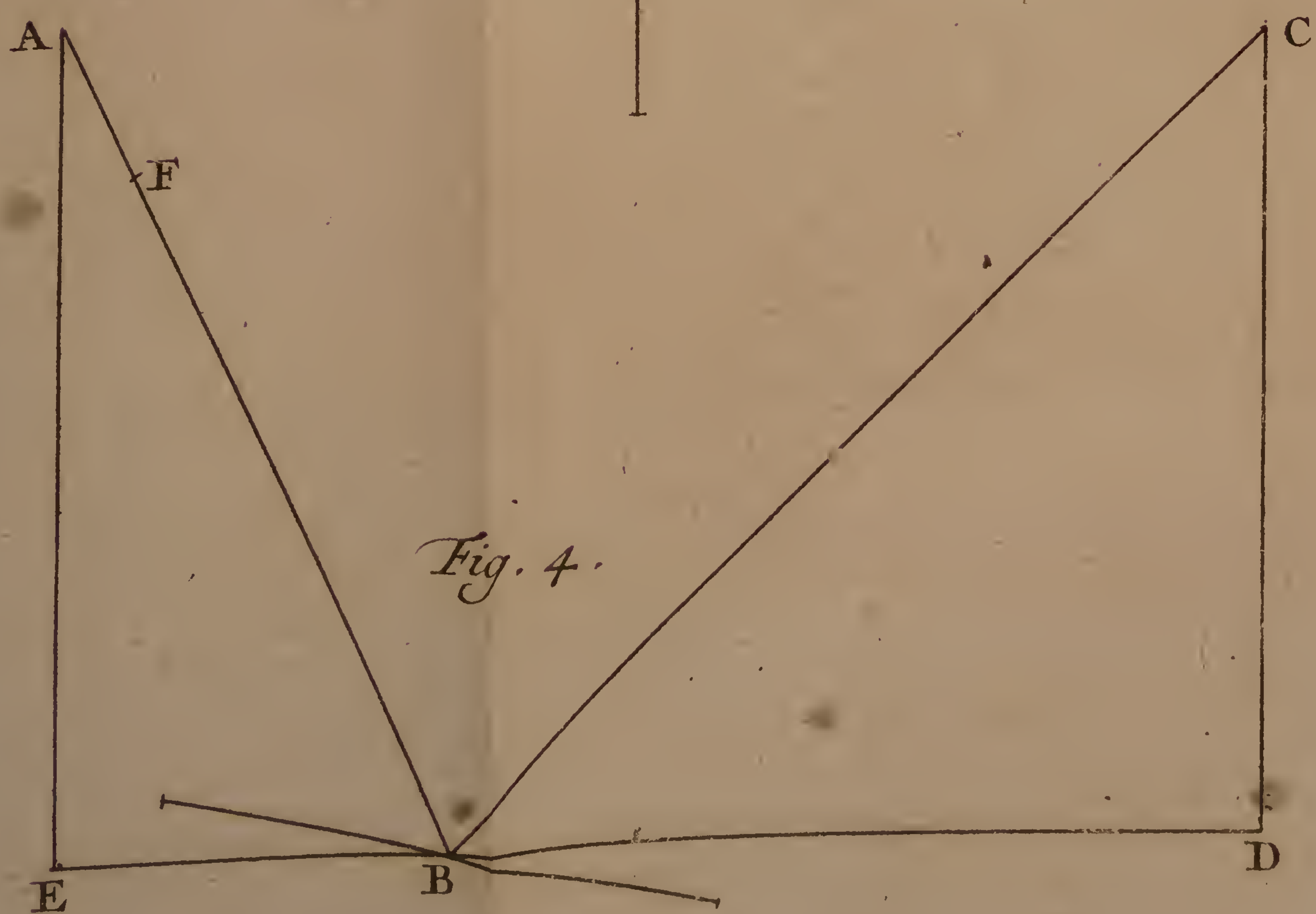
Producta enim C B occurrat rectæ A E in G. Itemque D C producta occurrat eidem A E in E. Quoniam itaque per

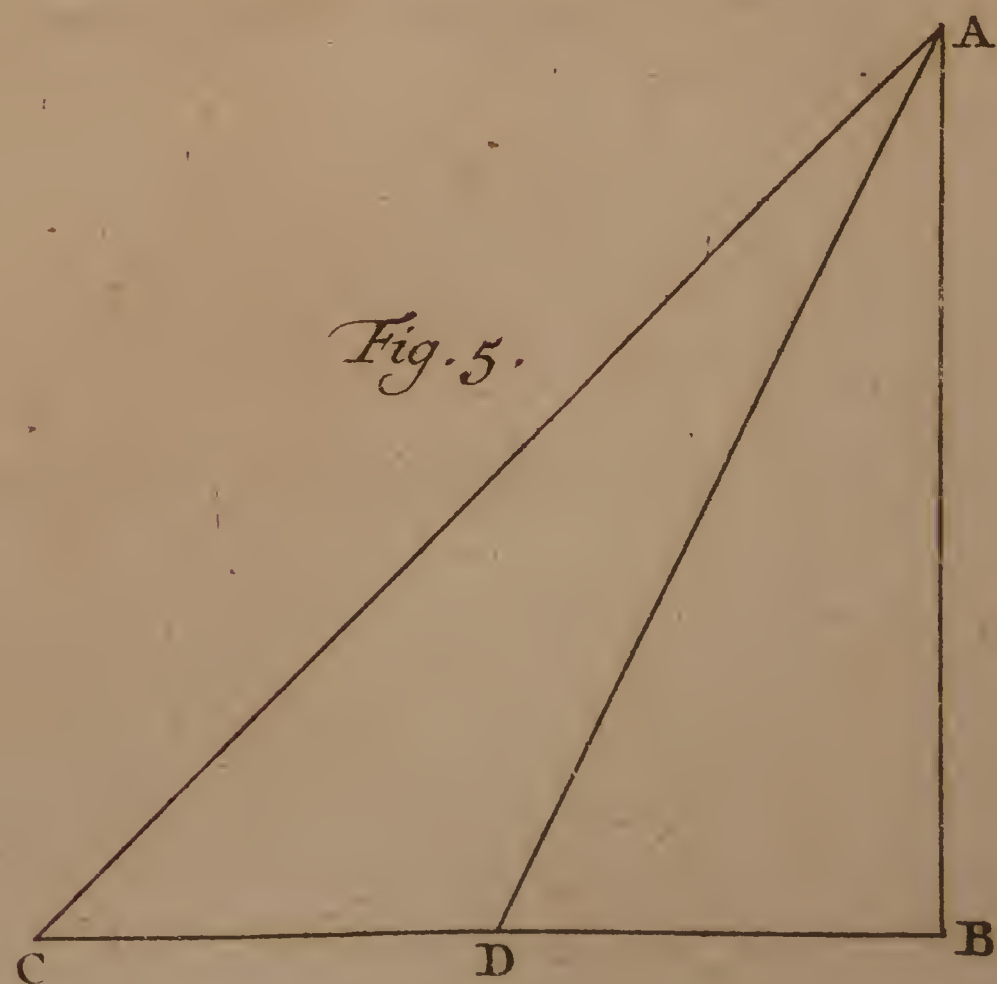

A
B
D
E
Fig. 1.
F
G
H
K


A
B
C
G
H
D
K
L
Fig. 2.
E
F


P


Fig. 3.
A
B
M
C
K
D
E
O
F
G
H
L


A
F
C
Fig. 4.
E
B
D


A
Fig. 5.
C
D
B

per A B descendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque descendens per G B *; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per G C planum descendisset; hoc est, quantam haberet ex descensu per E C. Quare & reliquum planum C D eodem modo transibit ac si per E C advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum E D, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per E F. quod erat demonstrandum. DE DESCENSU GRAVIUM. * Prop. 6. huj.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ essent hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

PROPOSITIO IX.

SI grave, à descensu, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quascunque planas superficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, incesserit.

Cadat grave ex altitudine A B, & ex puncto B inclinata sint sursum plana B C, C D, D E, quorum extremitas E sit eadem altitudine cum puncto A. Dico si mobile, post casum per A B, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum usque in E. TAB. VI. Fig. 2.

Dicatur enim, si fieri potest, tantum ad G perventurum. Producantur B C & C D, donec occurrant horizontali G F in F & H. Cum igitur mobile, superatis planis B C, C D, habeat tantum eam velocitatem quâ possit ascendere per D G, vel per D H; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus esse constat ex propositione 6; Ergo, superato plano B C, eam duntaxat habebat qua potuisset ascendere per C H,

De descensu gravium.

vel per C F. Ergo in B duntaxat eam qua potuisset ascendere per B F, hoc est, eandem quam acquireret descendendo per F B. Atqui in B habet velocitatem qua potest ascendere usque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave descendendo per F B, posset ascendere per B A, hoc est, altius quam unde discesserat, quod fieri non potest.

Est autem eadem prorsus demonstratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile ascendat. Unde & si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile assurget.

PROPOSITIO X.

SI mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æque altis eandem semper velocitatem.

Tab. IV. Fig. 3.

Ut si mobile ex altitudine A B decidens, motum deinde continuet per superficiem B C D, in qua punctum C sit pari altitudine atque in A B est punctum E. Dico in C eandem velocitatem inesse mobili atque in E fuerat.

Quum enim in C ea velocitas supersit mobili qua porro ascendat usque ad D punctum, æque altum ac A*: cumque & ex descensu per A E velocitatem eam acquirat qua, converso motu, ascensurum sit per C D*; Patet cum pervenit ad C ascendendo, eandem ipsum habere velocitatem, quam habebat in E descendendo; quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

* Prop. præced.

PROPOSITIO XI.

SI mobile per superficiem aliquam deorsum tendat, ac deinde converso motu sursum per eandem

dem superficiem vel aliam similem similiterque positam feratur, æqualibus temporibus per idem spatium descendet atque ascendet. DE DESCENSU GRAVIUM.

Velut si per superficiem A B descendat mobile, atque, ubi ad B pervenerit, converso motu sursum per eandem A B, vel ei similem & respectu plani horizontalis similiter positam B C, ascendat, constat ex ante demonstratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat ascendendo ac descendendo *; apparet eandem lineam bis eadem velocitate singulis sui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia esse necesse est; quod erat demonstrandum. TAB. VI. Fig. 4. * Prop. præced.

PROPOSITIO XII.

E*sto circulus* A B C, *diametro* A C, *cui ad angulos rectos sit* F G; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* A F *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* B D, *lineis* G F, A F *interceptum, minorem esse recta* D F. TAB. VI. Fig. 5.

Jungatur enim B C, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam recta B E, quæ necessario occurret rectæ F G inter F & D. Est igitur angulus B A C in circulo æqualis angulo E B C*. quare & angulus F B E, qui una cum E B C constituit angulum rectum F B C, erit æqualis B C A. Quia autem similia sunt triangula A B C, A G F, erit & angulus F æqualis angulo A C B. Ergo idem angulus F æqualis angulo F B E. Itaque isosceles est triangulus F E B, habens crura æqualia F E, E B. Addita ergo utrique eorum recta E D, fiet F D, æqualis duabus B E, E D. Hasce vero duas majores esse constat arcu B D, iisdem termi- * Prop. 32. Lib. 3. Eucl.

De descensu gravium. nis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & F D eodem arcu B D major erit: quare constat propositum.

PROPOSITIO XIII.

Tab. VI. Fig. 6. *Isdem positis, si recta* A B *occurrat ipsi* D G *intra circulum; Dico arcum* B D, *rectis* G D, A B *interceptum, majorem esse recta* D F.

Jungatur enim D C & ducatur arcui D B subtensa D B. Quoniam ergo angulus A B D æqualis A C D, hoc est, angulo A D G; angulus autem D F B major angulo A D F, sive A D G; erit idem D F B etiam major D B F. Ergo in triangulo D F B latus D B majus latere D F; unde multo magis arcus D B superabit eandem D F. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Tab. VII. Fig. 1. *Sit cyclois* A B C *cujus basis* A C *axis* B D. *Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror. Et circa axem* B D, *circulus descriptus sit* B G D, *& à quolibet puncto* E *in cycloide sumpto agatur* E F *basi* A C *parallela, quæ occurrat axi* B D *in* F, *secetque circumferentiam* B G D *in* G, *Dico rectam* G E *arcui* G B *æqualem esse.*

Describatur enim per E punctum circulus L E K ipsi B G D æqualis, quique tangat basin cycloidis in K, & ducatur diameter K L. Est igitur recta A K arcui E K æqualis; sed tota A D æqualis semicircumferentiæ K E L; ergo K D æqualis arcui E L sive G B. Est autem K D sive N F æqualis E G, quoniam E N æqualis G F, & communis utrique N G. Ergo constat & G E æqualem esse arcui G B.

PRO-

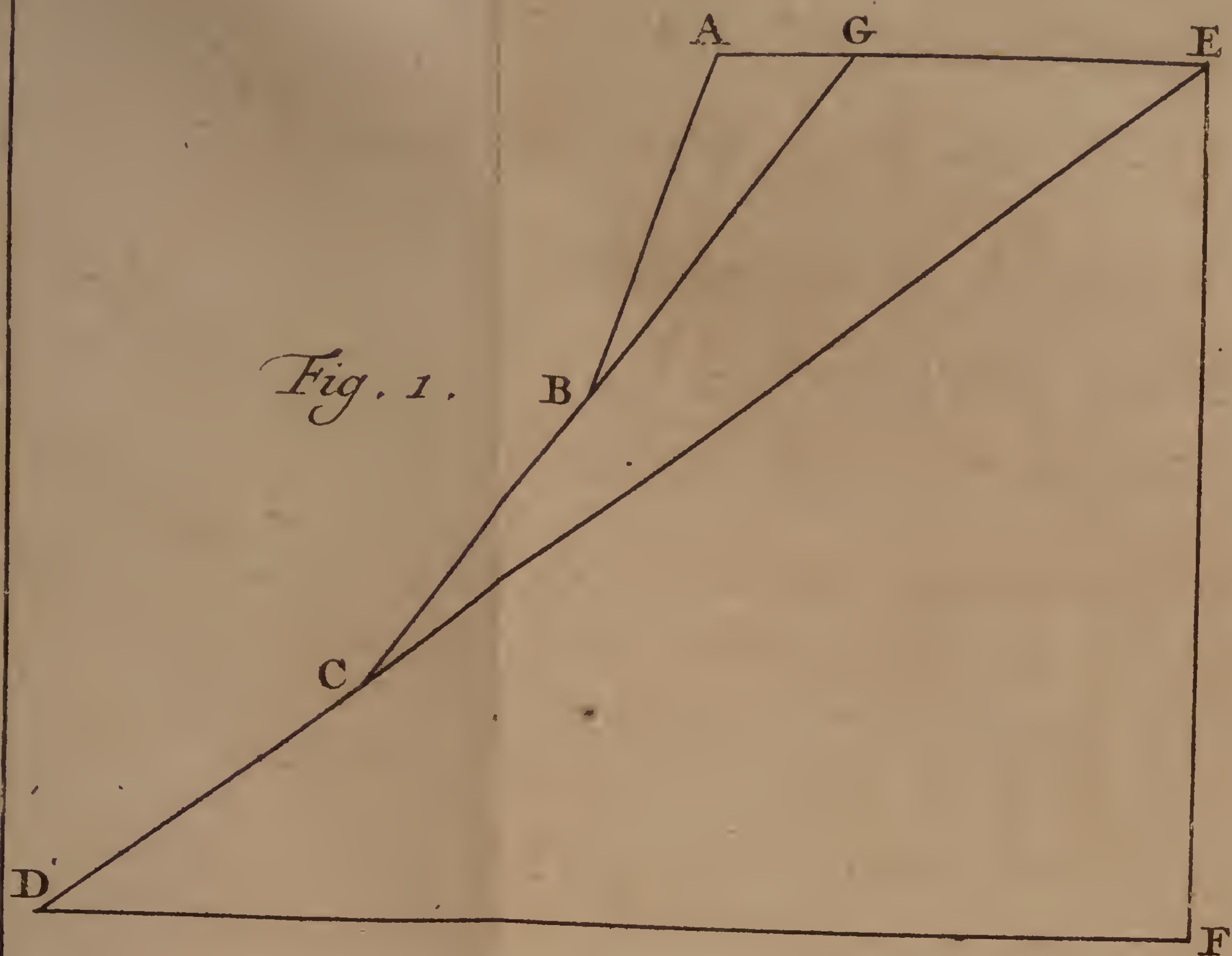


Fig. 1.

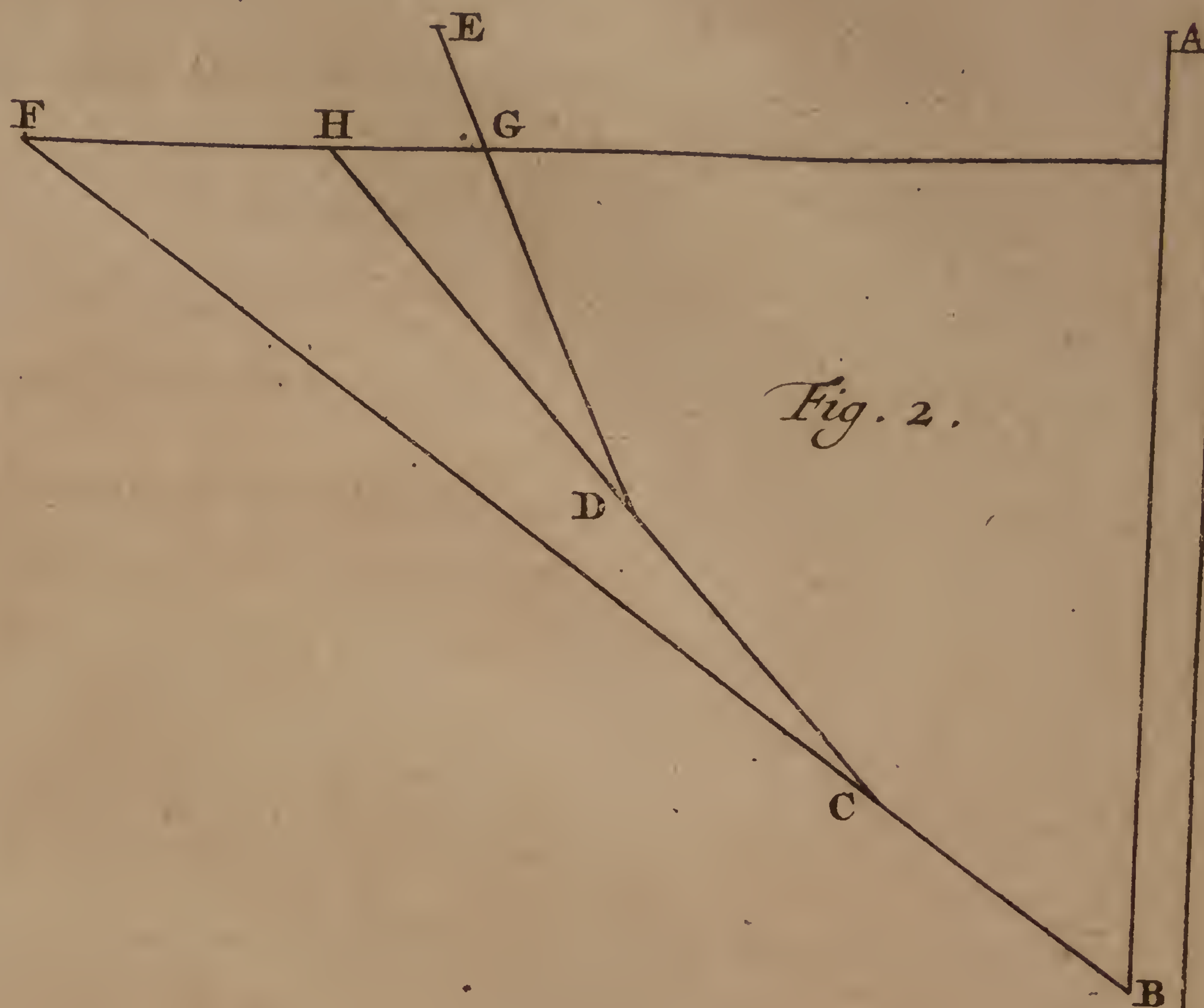


Fig. 2.

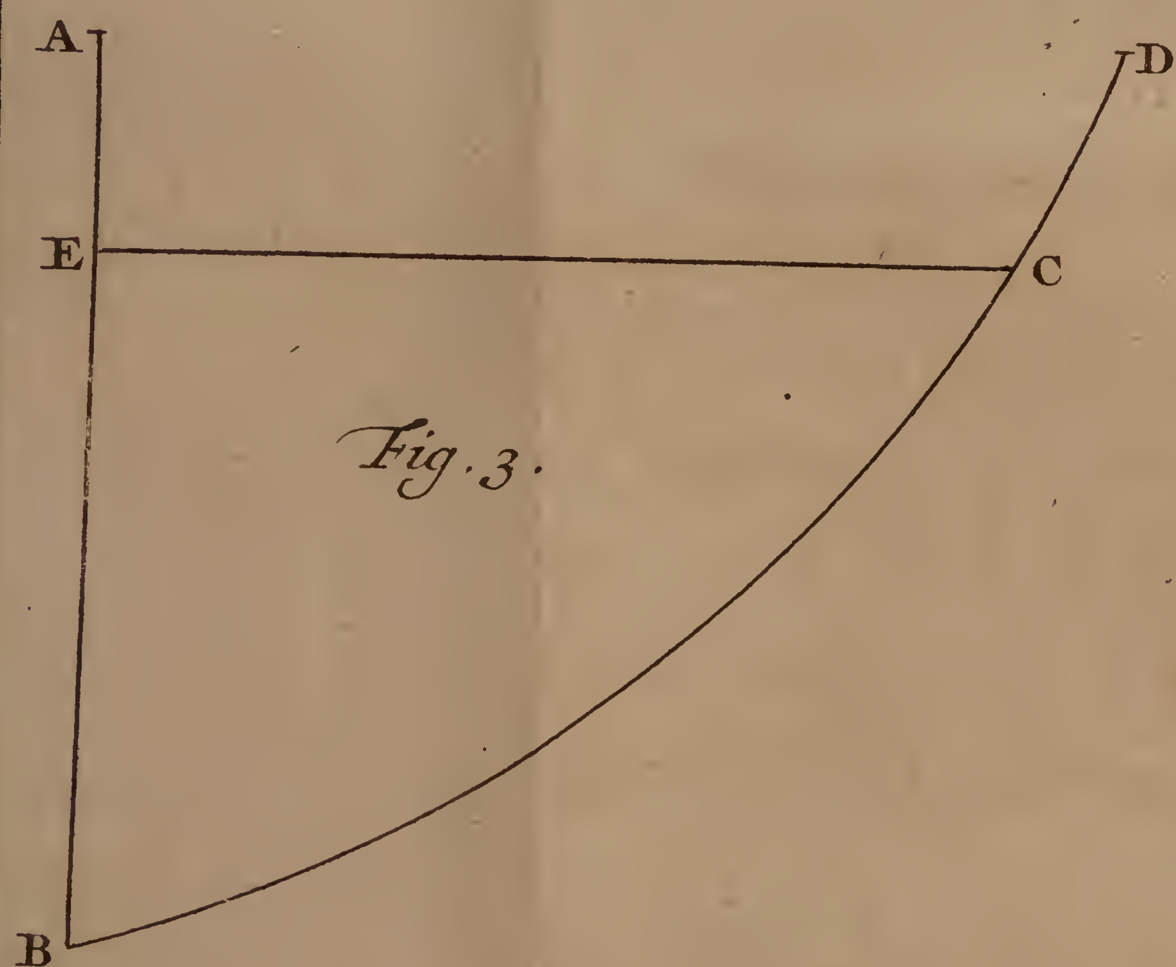


Fig. 3.

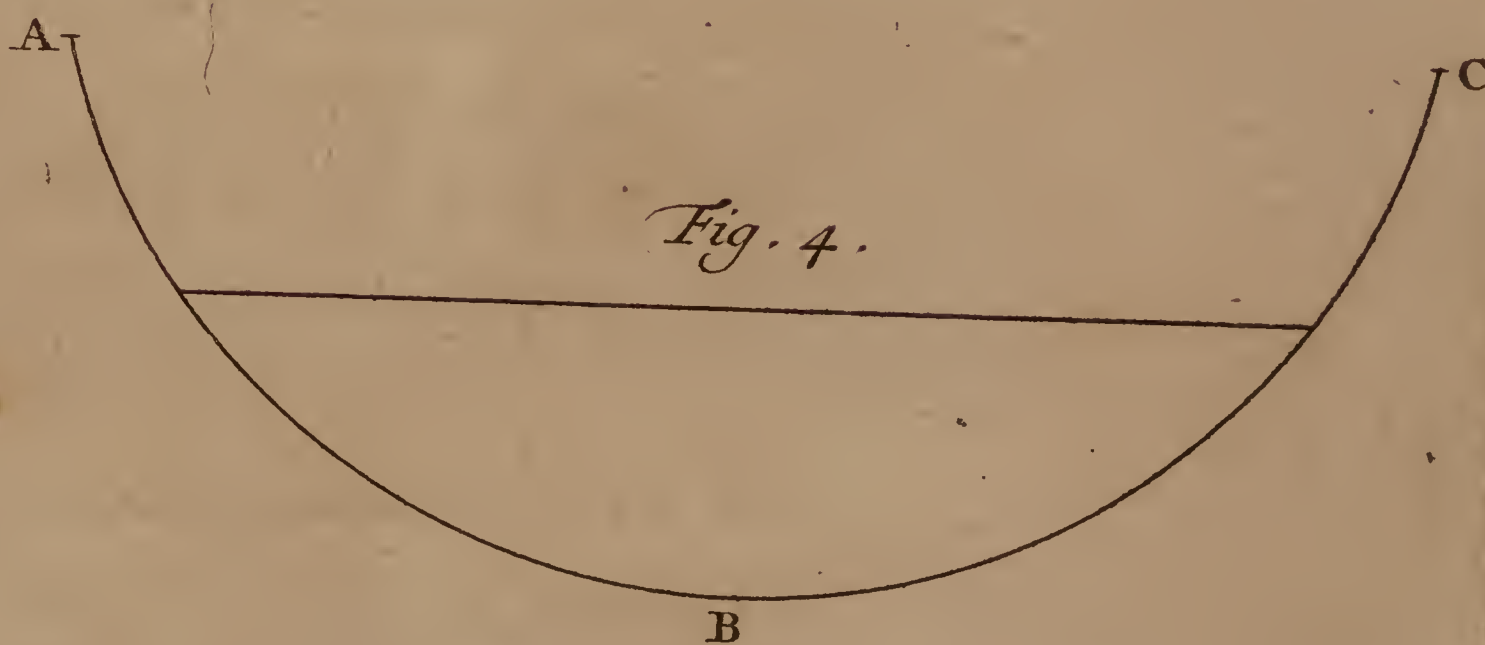


Fig. 4.

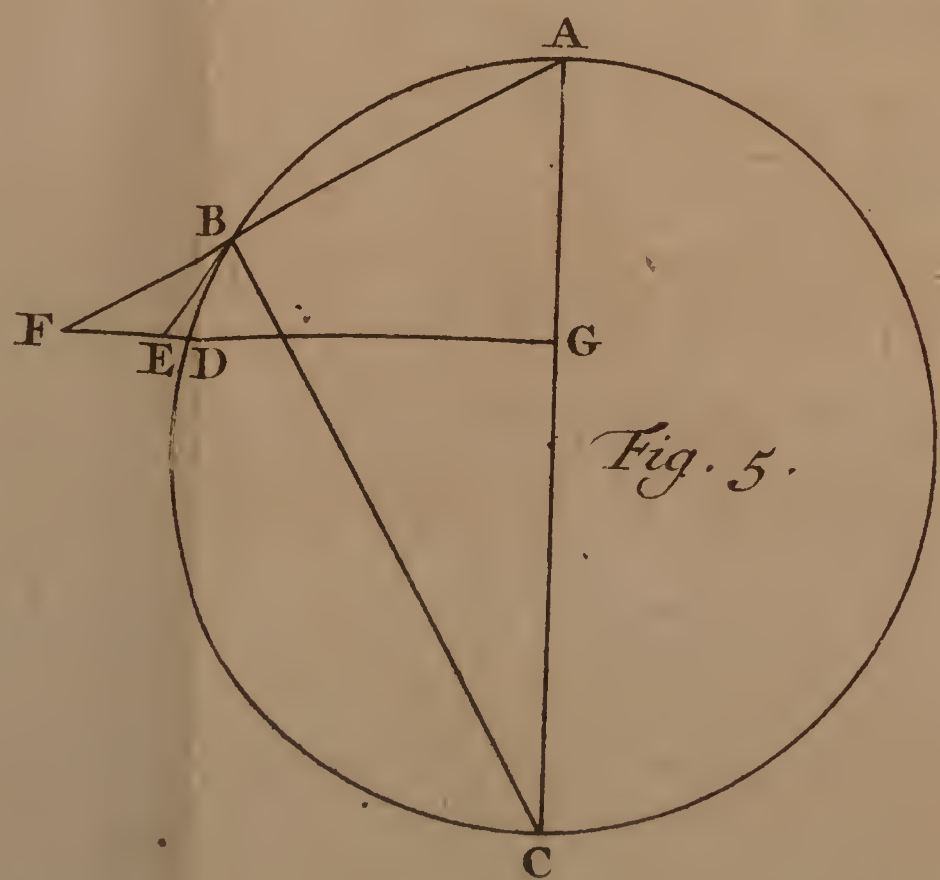


Fig. 5.

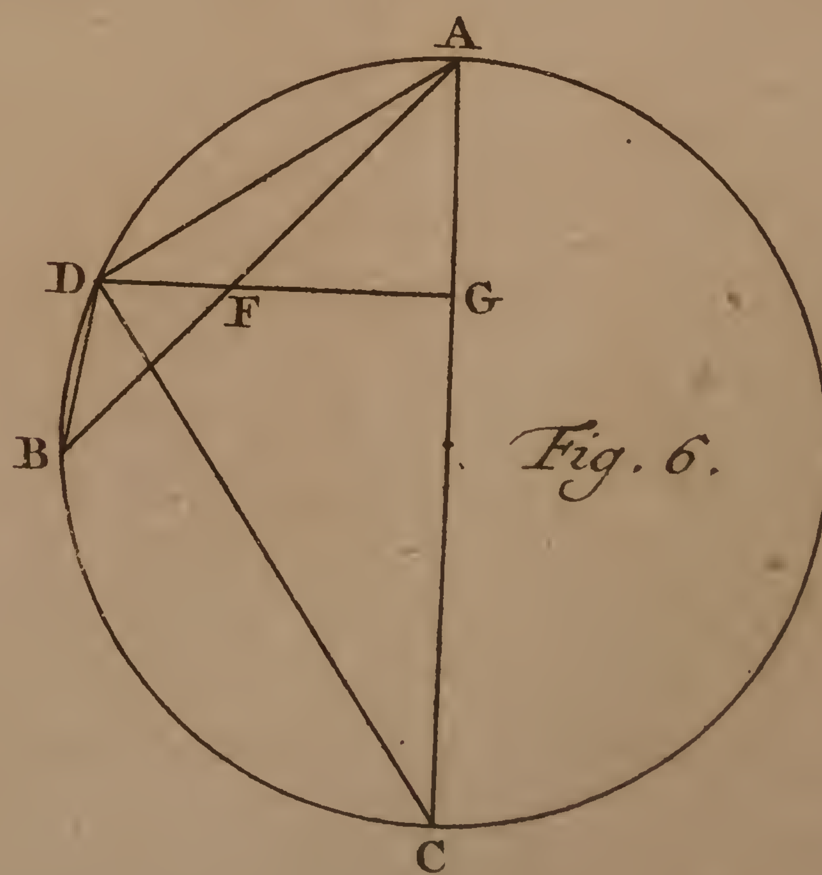


Fig. 6.

PROPOSITIO XV.

De descensu gravium.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat. TAB. VII. Fig. 2.

Circa axem cycloidis A D describatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac primo versus superiora velut H, & per H ducantur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K L est æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc est, rectâ E B, sive M H; unde apparet punctum H esse extra cycloidem.

Deinde in recta H N sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo A E D in O, rectæ A E productæ in P. Quia ergo O Q, æqualis est arcui O A; O P autem major arcu O E; erit P Q minor arcu E A, hoc est, rectâ E B, sive P N. Unde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta H B N sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei absimilem à clarissimo Wrennio editam inveniam in libro Wallisii de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi, quæ non cycloidi tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva N A B, orta ex circumvolutione figuræ TAB. VII. Fig. 3.

De descensu gravium.

O L super regula L D; describente nempe puncto N, in circumferentia figuræ O L sumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangentem ducere. Ducatur recta C A à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum describens esset in A: quod punctum contactus semper inveniri potest, siquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter se parallelæ ducendæ sint, quarum altera transeat per punctum describens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter se distent quantum distat punctum datum A ab regula L D: dico ipsam C A occurrere curvæ ad angulos rectos, sive circumferentiam M A F descriptam centro C radio C A, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad A C, per punctum A, ducta curvam ibidem continget.

Ducatur enim C B primum ad punctum curvæ B, quod distet ultra punctum A ab regula L D, intelligaturque figuræ positus in B E D, cum punctum describens esset in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum describens esset in A, hic jam sublatum sit in E; & jungantur E C, E B, tangatque figuram in E recta K H, occurrens regulæ in H.

Quia ergo recta C D æqualis est curvæ E D; eâdem vero curva major est utraque simul E H, H D; erit E H major quam C H. Unde angulus E C H major quam C E H, & proinde E C L minor quam C E K. Atqui addendo angulum K E B, qui æqualis est L C A, ad K E C, fit angulus C E B: & auferendo ab E C L angulum L C B, fit E C B. Ergo angulus C E B major omnino angulo E C B. Itaque in triangulo C E B, latus C B majus erit quam E B. sed E B æquale patet esse C A, cum sit idemmet ipsum unà cum figura transpositum. Ergo C B etiam major quam C A, hoc est, quam C F. unde constat punctum B esse extra circumferentiam M A F.

Sit rursus punctum N in curva sumptum inter regulam L D & punctum A. Cumque punctum describens esset in N, ponatur situs figuræ fuisse in V L, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, sit jam subla-

fublatum in V: & jungantur C N, N V, V C, V L. Erit ergo V N æqualis C A; imo erit ipsa C A translata in V N. Jam quia recta L C æquatur curvæ L V, ac proinde major est recta L V, erit in triangulo C L V angulus L V C major quam L C V. Quare addito insuper angulo L V N ad L V C, fiet totus N V C major utique quam L C V, ac proinde omnino major angulo N C V, qui pars est L C V. Ergo in triangulo C V N latus C N majus erit latere V N, cui æquatur C A, ideoque C N major quoque quam C A, hoc est quam C M. Unde apparet punctum N cadere extra circulum M A F, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Est autem eadem quoque tum constructio tum demonstratio, si curva genita sit à puncto describente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ sumpto. Nisi quod, hoc posteriori casu, pars quædam curvæ infra regulam descendit, unde nonnulla in demonstratione oritur diversitas.

Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda est, datum in parte curvæ N A B, quæ infra regulam C L descendit, descripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam sumpto, sed certam positionem in eodem ipsius plano habente. Invento igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam C D quum punctum describens esset in A, ducatur recta C A. Dico hanc curvæ N A B occurrere ad rectos angulos, sive circumferentiam radio C A centro C descriptam tangere curvam N A B in puncto A. Ostendetur autem exterius ipsam contingere, cum in curvæ parte supra regulam C D posita interius contingat. TAB. VIII. Fig. 1.

Positis enim & descriptis iisdem omnibus quæ prius, ostenditur rursus angulus E C H major quam C E H. atqui ad E C H addito H C B fit angulus E C B; & à C E H auferendo H E B, qui æqualis est D C A, fit angulus C E B. Ergo E C B major omnino quam C E B. unde in triangulo E C B latus E B majus quam C B. sed ipsi E B æqualis est C A, sive C F. Ergo & C F major quam C B: ideoque punctum circumferentiæ F est ultra curvam N A B à centro remotum.

Item

De descensu gravium.

Item rursus ostenditur angulus L V C major L C V. Quare C V P, qui cum L V C duos rectos æquat, minor erit quam V C D. Atqui addendo ad V C D angulum D C N, fit V C N; & auferendo ab C V P angulum P V N, fit C V N. Ergo angulus V C N omnino major quam C V N. In triangulo itaque C V N, latus V N majus erit quam C N. Est autem ipsi V N æqualis C A sive C M. Ergo & C M major quam C N, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam N A B à centro C remotum. Itaque constat circumferentiam M A F tangere curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

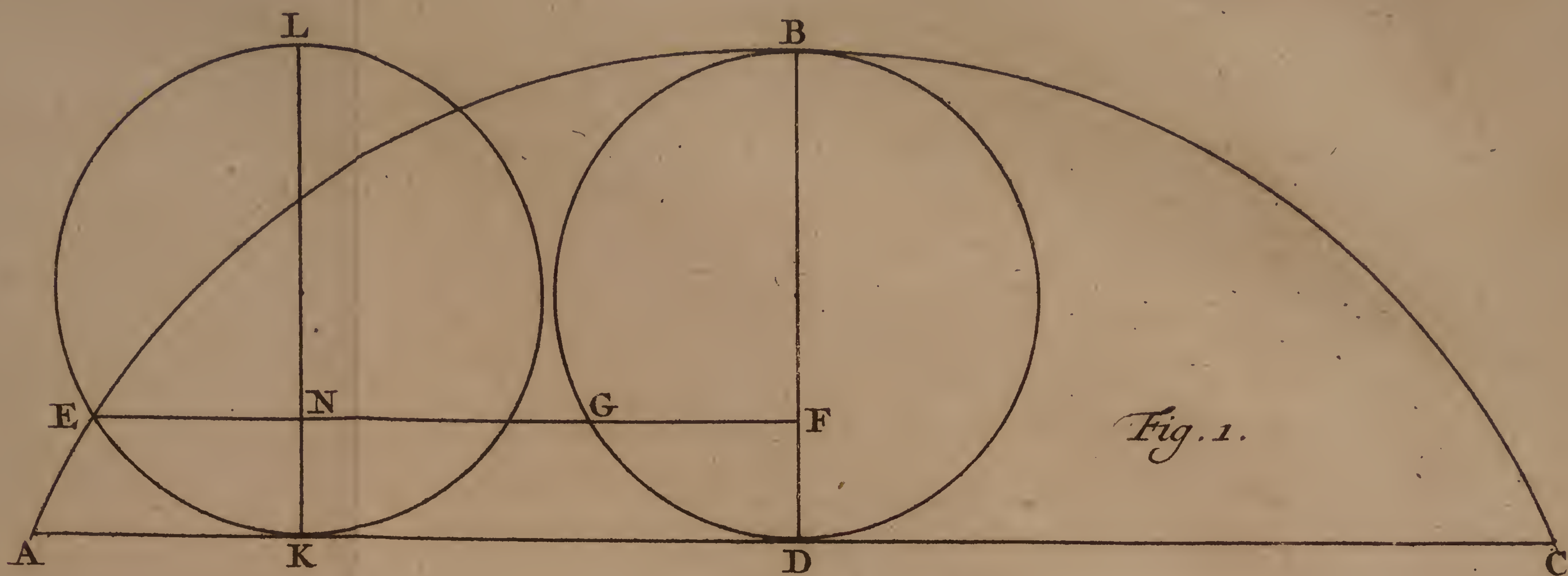
Quod si punctum curvæ per quod tangens ducenda est, sit illud ipsum ubi regula curvam secat, erit tangens quæsita semper regulæ perpendicularis; ut facile esset ostendere.

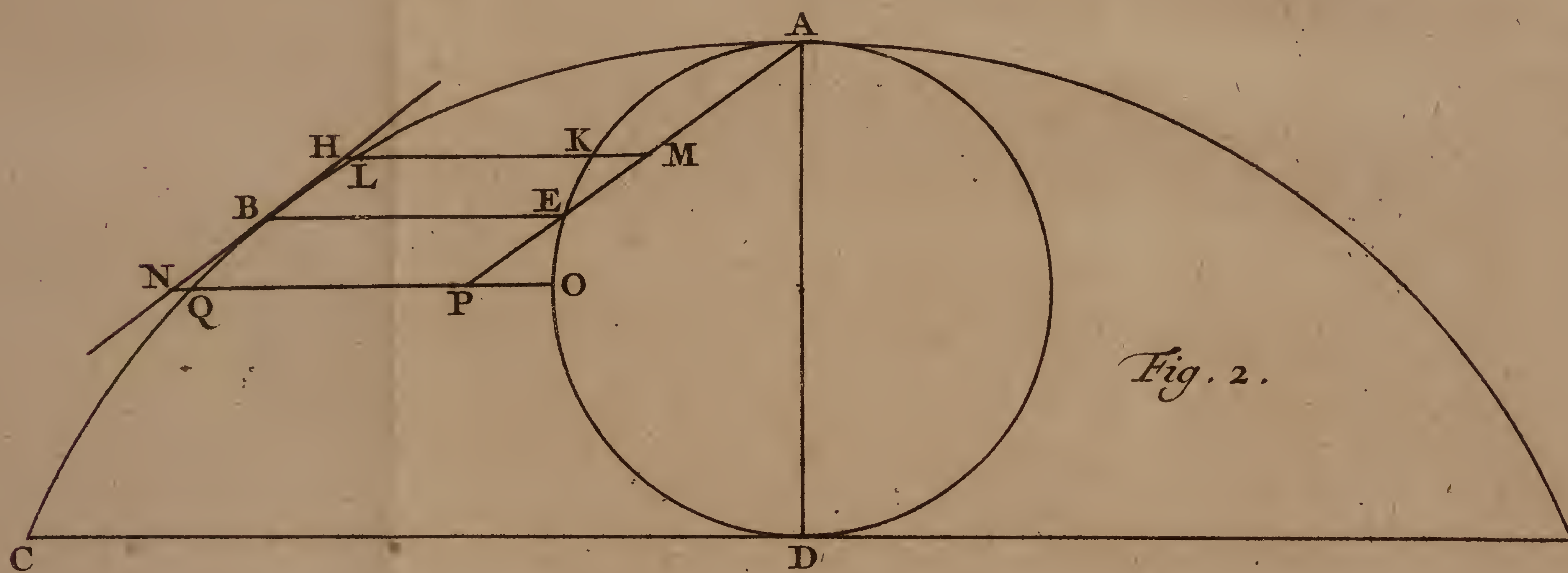
PROPOSITIO XVI.

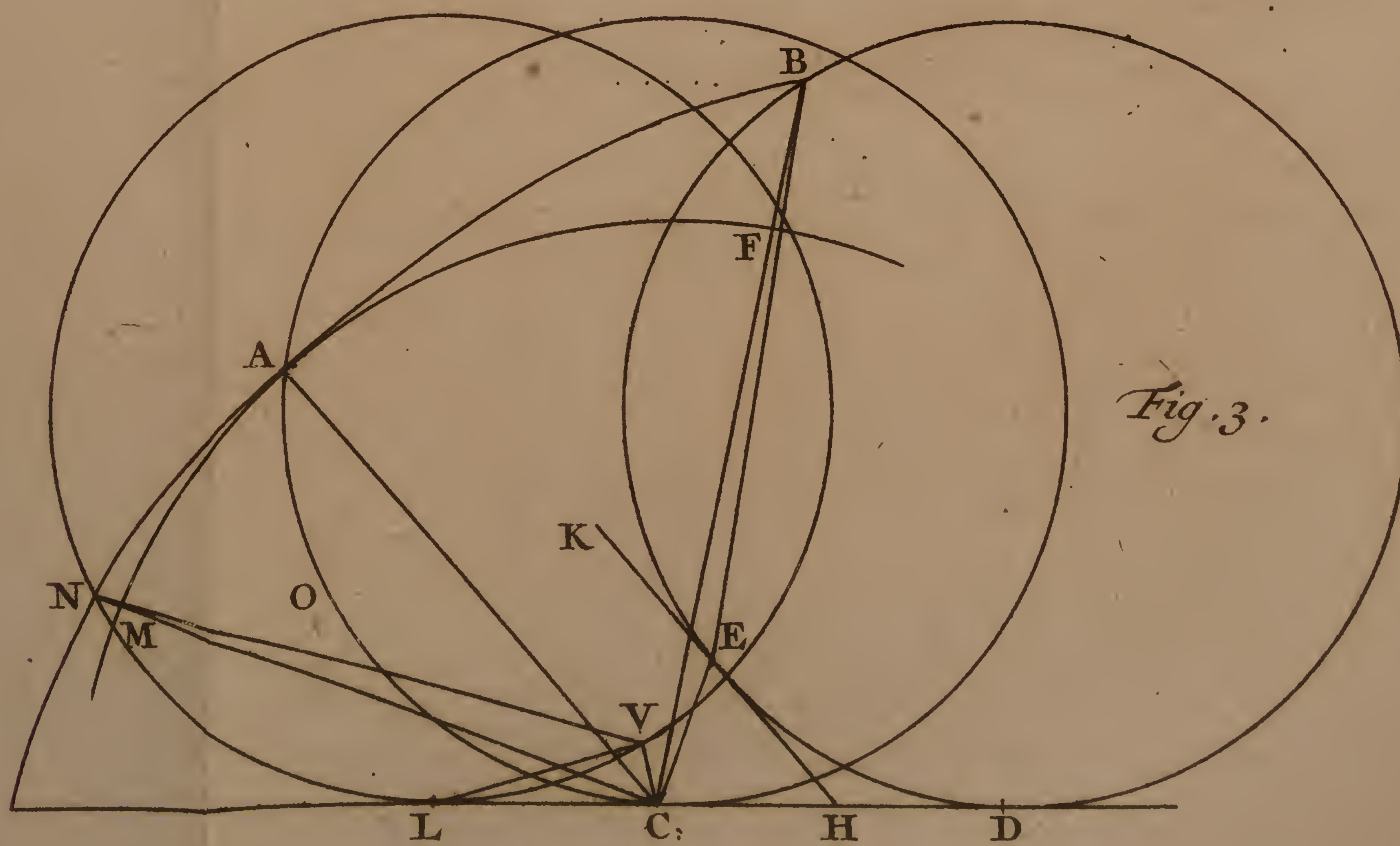
De motu in Cycloide. Tab. VIII. Fig. 2.

Si circuli circumferentiam, cujus centrum E, *secent rectæ duæ parallelæ* A F, B G, *quarum utraque ad eandem partem centri transeat, vel altera* A F *per centrum ipsum: & à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam secat, ducatur recta ipsam contingens: dico partem hujus* A B, *à parallela utraque interceptam, minorem esse arcu* A C, *ab utraque eadem parallela intercepto.*

Ducatur enim arcui A C subtensa recta A C. Quia ergo angulus B A F est æqualis ei quem capit portio circuli A H F, quæ vel major est semicirculo vel semicirculus, erit proinde angulus B A F, vel minor recto vel rectus; ideoque angulus A B C vel major recto vel rectus. Quare in triangulo A B C latus A C, angulo B subtensum, majus erit latere A B. sed idem latus A C minus est arcu A C. Ergo omnino & A B arcu A C minor erit.


L
B
E
N
G
F
A
K
D
C
Fig. 1.


A
H
K
M
L
B
E
N
Q
P
O
C
D
Fig. 2.


B
F
A
K
N
O
M
E
V
L
C
H
D
Fig. 3.

PROPOSITIO XVII.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

TAB. VIII. Fig. 3.

Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K, *circulum secuerit, quæ ab ea quæ centro propior est* A F, *tantundem distet quantum hæc à reliqua* B G: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* A D, *arcu* A C *à primis duabus parallelis intercepto minorem esse.*

Hoc enim patet quum A D ipsi A B æqualis sit, quam antea ostendimus arcu A C minorem esse.

PROPOSITIO XVIII.

TAB. VIII. Fig. 4.

Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ secuerint* A F, B G; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior est, vel tantundem atque altera distat, circumferentiæ occurrit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus* B A, *à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto* B C.

Ducatur enim in puncto C, recta M C L circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti B A in L. In triangulo igitur A C L, angulus C æqualis est angulo M C F, hoc est, ei quem capit portio circuli C B F. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli B C G, quæ portio quum sit major vel æqualis portioni C B F, quippe quum B G vel ulterius distet à centro quam C F, vel tantundem: erit proinde trianguli A C L angulus A minor vel æqualis angulo C: & consequenter latus C L vel minus vel æquale lateri A L. Atqui C L una cum L B majores sunt arcu C B. Ergo & A L una cum L B, hoc est, tan-

De motu in Cycloide.

gens A B, eodem arcu C B major erit: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

TAB. VIII. Fig. 5.

Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K *circulum secet, quæ tantundem distet ab ea quæ remotior est à centro quantum hæc à reliqua* A F: *Erit pars tangentis in* B, *à parallela media, & ultimo addita* D K, *intercepta, nimirum* B D, *major arcu* B C.

Hoc enim manifestum est cum B D fiat ipsi B A æqualis, quam ostendimus arcu B C majorem esse.

PROPOSITIO XX.

TAB. VIII. Fig. 6.

SI arcus circuli, semicircumferentia minor, A B, *in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituant, quales sunt* C D, E F, G H, K L *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquæque occurrat proximæ dictarum parallelarum; cujusmodi sunt tangentes* A C, D E, F G, H K *&c. Dico has tangentes, dempta prima* A C, *simul sumptas, minores esse arcu proposito* A B. *Easdem vero omnes, non omissa* A C, *majores esse arcu* A B *diminuto parte extrema* N B, *hoc est, majores arcu* A N.

Ponamus enim primo perallelarum aliquas transire ab utra-

traque parte centri Z, & ſit G H, earum quæ ſunt à parte B, centro proxima, vel per ipſum centrum tranſeat. Itaque tangentes omnes inter G H & B O comprehenſæ, ut H K, L M, N O, ſingulæ ſuis arcubus minores ſunt *. Porro autem & tangens G F, arcu ſequente F D minor eſt *, & ſimiliter tangens E D arcu D A. Itaque tangentes omnes inter B O & C D interjectæ, minores ſunt arcubus B H & F A, ac proinde omnino minores arcubus B H, H A, ſive arcu B A, quod erat primo oſtendendum.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

* Prop. 16. huj.

* Prop. 17. huj.

Porro jam demonſtrabimus tangentes omnes inter B O & A majores eſſe arcu A N. Enimvero parallela G H, vel propius centrum Z tranſit quam parallela E F, quam pono proximam eſſe earum quæ à parte A tranſeunt, vel erit remotior, vel æque diſtabit.

Quod ſi E F longius à centro vel æque remota eſt ac G H, erit tangens F G major arcu ſuo F H, & reliquæ tangentes verſus A, nimirum E D, C A majores ſingulæ arcubus ſuis *; adeo ut omnes ſimul G F, E D, C A majores ſint arcu H A. ſed & arcu H L major erit tangens L M *, & arcu L N tangens N O; itaque tangentes omnes, præter H K, majores ſimul erunt arcu A N; multoque magis, accedente ipſa H K, tangentes omnes inter A & B comprehenſæ arcu eodem A N majores erunt.

* Prop. 18. huj.

* Prop. 19. huj.

Si vero G H à centro longius diſtat quam E F, erit tangens K H major arcu H F *, & tangens M L ut ante major arcu L H, & tangens O N major arcu N L, & omnes proinde tangentes O N, M L, K H majores arcu N F. Sed & tangens E D major eſt arcu ſuo F D *, & tangens C A major ſimiliter arcu ſuo D A. Itaque tangentes omnes inter B O & A, præter G F, majores erunt arcu N A; multoque magis tangentes eædem, accedente G F, hoc eſt, omnes quæ inter B O & A interjiciuntur, eodem arcu N A majores erunt.

* Prop. 19. huj.

* Prop. 18. huj.

Ex his vero etiam demonſtratio manifeſta eſt in caſibus aliis, qualiſcunque ſemicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem ſit ubique, vel pars tantum præcedentis demonſtrationis.

De motu in Cycloide.

PROPOSITIO XXI.

SI mobile descendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

TAB. IX. Fig. 1. Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ A B C D E, F G H K L, atque ita ut bina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero seriei F G H K L magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei A B C D E. Dico breviori tempore absolvi descensum per A B C D E, quam per F G H K L.

Nam primo quidem tempus descensus per A B, brevius esse constat tempore descensus per F G, quum sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum A B ad F G*, sitque A B minor quam F G, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ C B, H G, occurrantque horizontali A F in M & N. Itaque tempus per B C post A B, æquale est tempori per eandem B C post M B, cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per A B, sive per M B descendenti *. similiterque tempus per G H post F G, æquale erit tempori per eandem G H post N G. Est autem tempus per B C post M B ad tempus per G H post N G, ut B C ad G H longitudine, sive ut C M ad H N, cum hanc rationem habeant & tempora per totas M C, N H, & per partes M B, N G*, ideoque etiam tempora reliqua. Estque B C, minor quam G H propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per B C post M B sive post A B,

* Prop. 7. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.

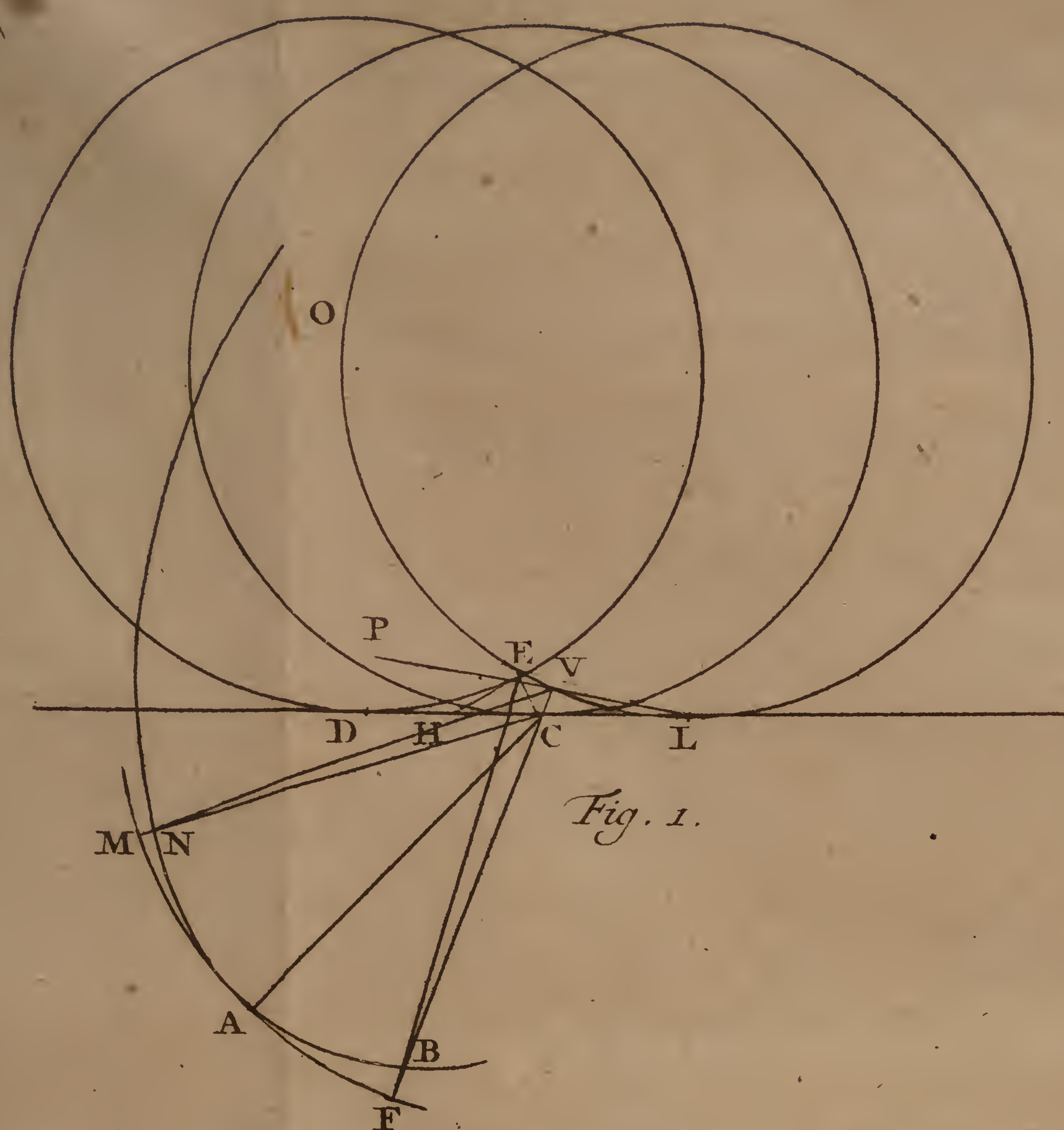


Fig. 1.

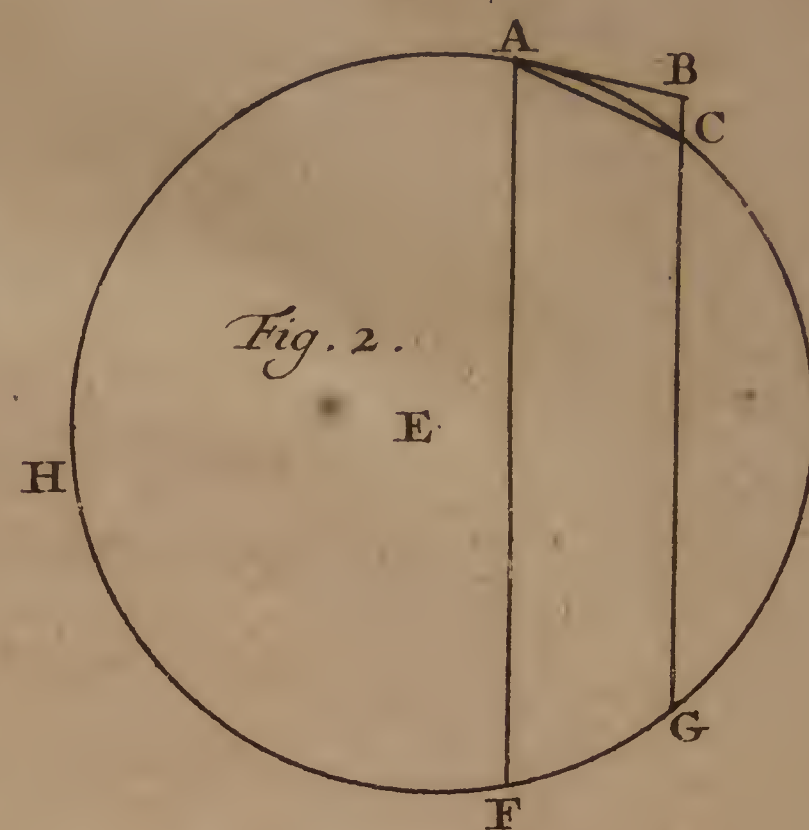


Fig. 2.

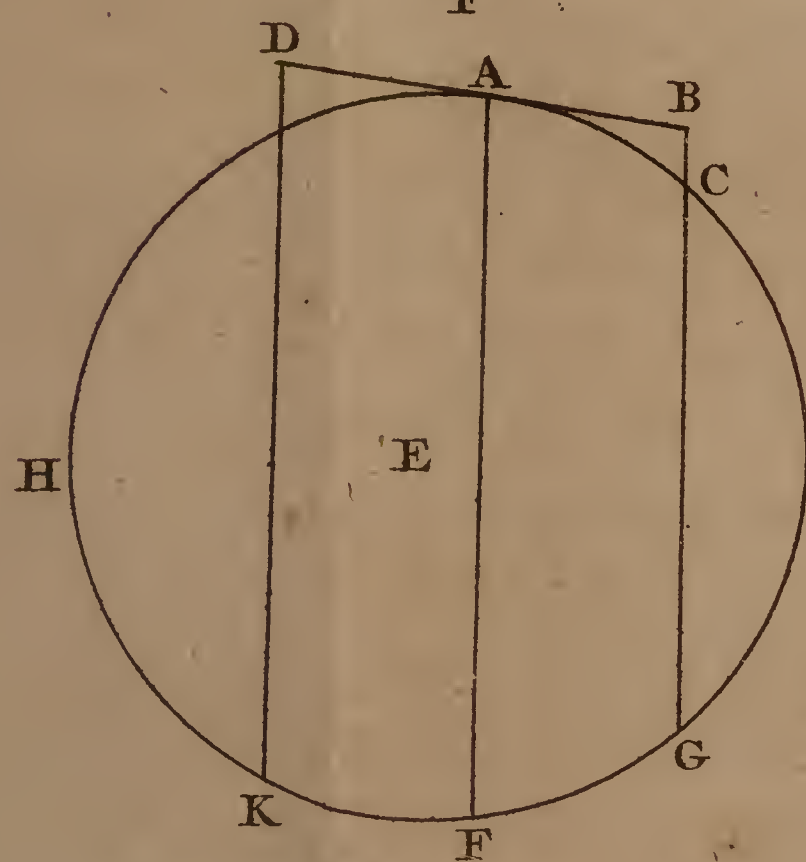


Fig. 3.

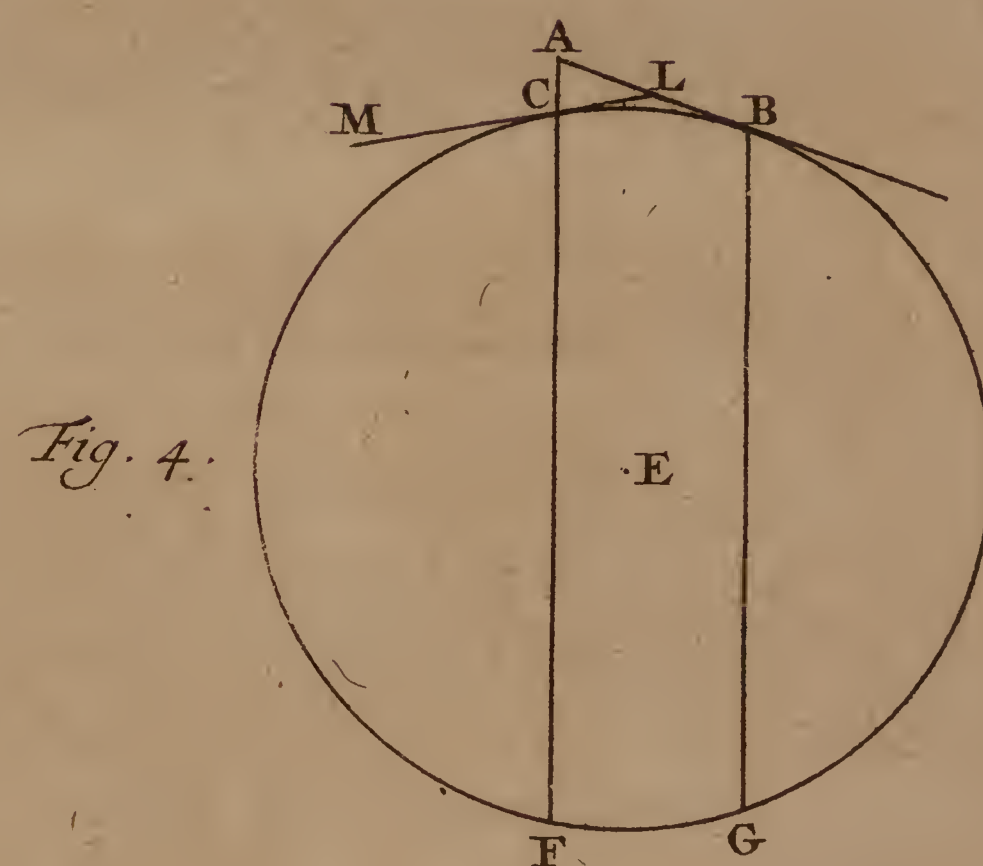


Fig. 4.

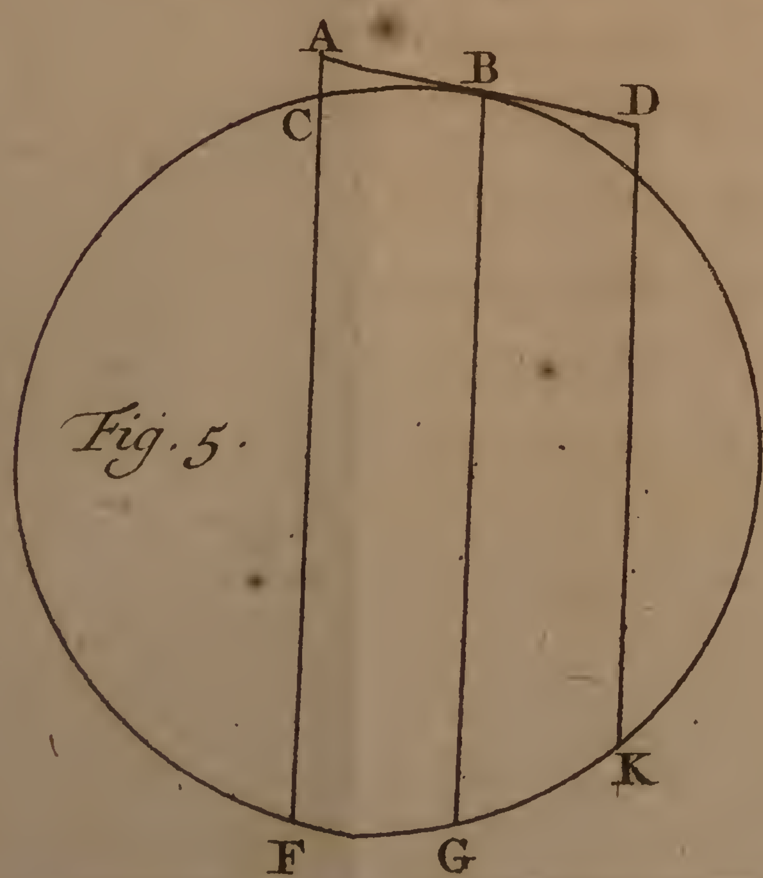


Fig. 5.

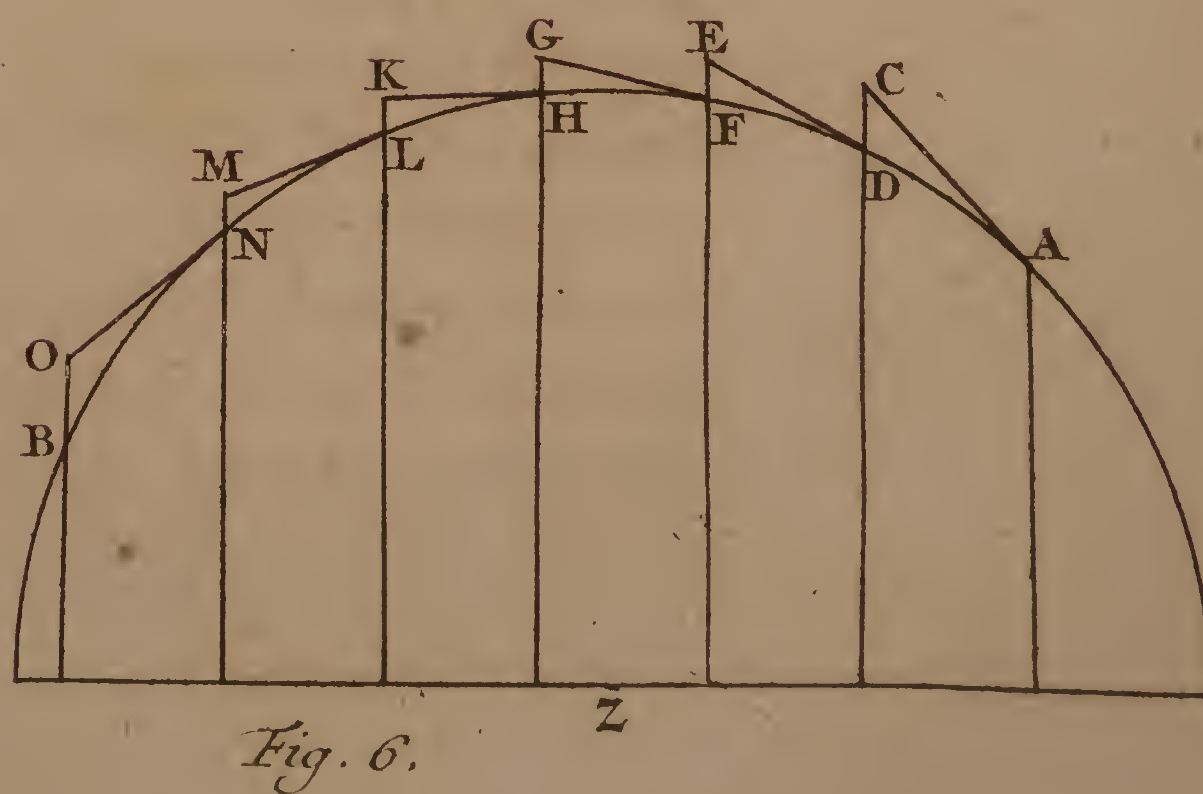


Fig. 6.

A B, brevius esse tempore per G H post N G sive post F G. Similiter ostendetur, productis D C, K H sursum, donec occurrant horizontali A F in O & P, tempus per C D post A B C, sive post O C, brevius esse tempore per H K post F G H sive post P H. Ac denique tempus per D E post A B C D, brevius esse tempore per K L post F G H K. Quare totum tempus descensus per A B C D E, brevius erit tempore per F G H K L. quod erat demonstrandum. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

Velut si sint duæ superficies inclinatæ secundum curvas A B, C D, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major sit inclinatio ipsius C D quam A B, hoc est, ut recta tangens curvam C D in F, magis inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam A B tangit in puncto E. erit tempus descensus per A B brevius quam per C D. TAB. IX. Fig. 2.

Idemque continget si altera linearum recta fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

SI in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus stat, vertice deorsum spectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici; erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.

Sit Cyclois A B, cujus axis A C ad perpendiculum erectus, vertex A deorsum spectet; & accipiantur in ea por- TAB. IX. Fig. 3.

 tio-

tiones B D & E F, æqualis altitudinis, hoc eſt, ejusmodi ut parallelæ horizontales B C, D H, quæ ſuperiorem portionem B D includunt, æque inter ſe diſtent ac E G, F K, inferiorem partionem E F includentes. Dico tempus deſcenſus per curvam B D brevius fore tempore per E F.

Sumatur enim in B D punctum quodlibet L, &. in E F punctum M, ita ut eadem ſit altitudo E ſupra M quæ B ſupra L. Et deſcripto ſuper axe A C ſemicirculo, occurrant ei rectæ horizontales L N, M O, in N & O, & jungantur N A, O A. Itaque quum punctum N ſit altius puncto O, manifeſtum eſt rectam N A minus ad horizontem inclinari quam O A. Eſt autem ipſi N A parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipſi O A parallela tangens curvæ in M. Ergo curva B D in puncto L minus inclinata eſt quam curva E F in puncto M. Quod ſi igitur portio E F, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *e f*, ita ut inter eaſdem parallelas cum portione B D comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *e f* in puncto *m*, quæ eadem eſt inclinationi curvæ E F in M, major inclinatione curvæ B D in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *e f*, major oſtendetur inclinatio quam curvæ B D in puncto æque alto. Itaque tempus deſcenſus per B D brevius erit tempore per *e f* *, ſive, quod idem eſt, per E F. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 15. huj.

* Prop. præced.

L E M M A.

Tab. IX. Fig. 4.

Esto circulus diametro A C, *quem ſecet ad angulos rectos* D E, *& à termino diametri* A *educta recta* A B *occurrat circumferentiæ in* B, *ipſi vero* D E *in* F. *Dico tres haſce*, A B, A D, A F, *proportionales eſſe.*

Sit enim primo interſectio F intra circulum; & arcui B D recta ſubtenſa ducatur. Quia igitur arcus æquales ſunt A E,

A D,

A D, erunt anguli ad circumferentiam ipsis insistentes, E D A, A B D æquales. Itaque in triangulis A B D, A D F, æquales anguli A B D, A D F. Communis autem utrique est angulus ad A. Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque B A ad A D ut A D ad A F.

Sit jam punctum intersectionis *f* extra circulum, & ducatur *b* H parallela D E, quæ occurrat rectæ A D in H. Itaque secundum jam demonstrata erit ut D A ad A *b*, ita A *b* ad A H, hoc est, ita A *f* ad A D: Ideoque rursus proportionales erunt A *f*, A D, A *b*. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

TAB. IX. Fig. 5.

S*It Cyclois* A B C, *cujus vertex* A *deorsum conversus sit, axe* A D *ad perpendiculum erecto; sumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B I *quæ Cycloidem tangat, terminetur que recta horizontali* A I. *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & divisa bifariam* F A *in* X, *super ea describatur semicirculus* F H A. *Ductâ deinde per punctum quodlibet* G *in curva* B A *sumptum, rectâ* Σ G *parallelâ* B F, *quæ circumferentiæ* F H A *occurrat in* H, *axi* A D *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* M S, N T *interceptæ sint* M N, S T. *Iisdemque rectis* M S, N T *includantur tangentis* B I *pars* O P, *& axis* D A *pars* Q R.

Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam M N, *celeritate æquabili quan-*

De motu in Cycloide.

quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis B G, *fore ad tempus quo percurretur recta* O P, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem* B I, *sicut est tangens* S T *ad partem axis* Q R.

Describatur enim super axe A D semicirculus D V A secans rectam B F in V, & Σ G in Φ, & jungatur A V secans rectas O Q, P R, G Σ in E K & Λ. Jungantur item H F, H A, H X & A Φ; quæ postrema secet rectas O Q, P R in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per M N ad tempus per O P, rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum M N ad O P, & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta*, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex B I sive ex F A, ad celeritatem ex B G, sive ex F Σ*. Atqui tota celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ, est in subduplicata ratione longitudinum F A ad F Σ*, ac proinde eadem quæ F A ad F H. Ergo dimidia celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ erit ut F X ad F H. Itaque tempus dictum per M N ad tempus per O P habebit rationem compositam ex rationibus M N ad O P, & F X ad F H. Harum vero prior ratio, nempe M N ad O P, eadem ostendetur quæ F H ad H Σ.

* Prop. 5. Galil. de motu æquab.
* Prop. 8. huj.
* Prop. 3. huj.

Est enim tangens Cycloidis B I parallela rectæ V A, similiterque tangens M G N parallela rectæ Φ A; ac proinde recta M N æqualis Δ Π, & O P æqualis E K. Ergo dicta ratio rectæ M N ad O P eadem est quæ Δ Π ad E K; hoc est, Δ A ad E A; hoc est, Φ A ad Λ A; hoc est V A ad Φ A*. Est autem ut V A ad A Φ ita F A ad A H; nam quia quadratum V A æquale est rectangulo D A F, & quadratum A Φ æquale rectangulo D A Σ, quæ rectangula sunt inter se ut F A ad Σ A, hoc est ut quadratum F A ad quadratum A H, erit proinde & quadratum V A ad quadratum Φ A ut quadratum F A ad quadratum A H; atque etiam

* Lemma præced.

etiam V A ad A Φ longitudine, ut F A ad A H. Ratio itaque M N ad O P, eadem erit quæ F A ad A H, hoc est, propter triangula similia F A H, F H Σ, eadem quæ F H ad H Σ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per M N ad tempus per O P, componitur ex rationibus F X ad F H & F H ad H Σ, ideoque eadem erit quæ F X sive X H ad H Σ. Sicut autem radius X H ad H Σ, ita est tangens S T ad rectam Q R; hoc enim facile perspicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per M N, ad tempus per O P constat esse sicut S T ad Q R. quod erat demonstrandum.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

PROPOSITIO XXIV.

TAB. X. Fig. 1.

S*It rursus ut in præcedenti propositione Cyclois* A B C, *cujus vertex* A *deorsum spectet*, *axis* A D *ad horizontem erectus sit*; *& sumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B Θ *quæ Cycloidem tangat*, *occurratque rectæ horizontali* A Θ *in* Θ: *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur*, *& super* F A *describatur semicirculus* F H A. *Deinde alia recta* G E, *parallela* F B, *secet Cycloidem in* E, *rectam* B Θ *in* I, *circumferentiam* F H A *in* H, *& denique axem* D A *in* G.

Dico tempus descensus per arcum Cycloidis B E, *esse ad tempus per tangentem* B I *cum celeritate dimidia ex* B Θ, *sicut arcus* F H *ad rectam* F G.

Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum B E ad dictum tempus per B I, vel majorem rationem quam arcus F H ad rectam F G vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, majorem.

De motu in Cycloide.

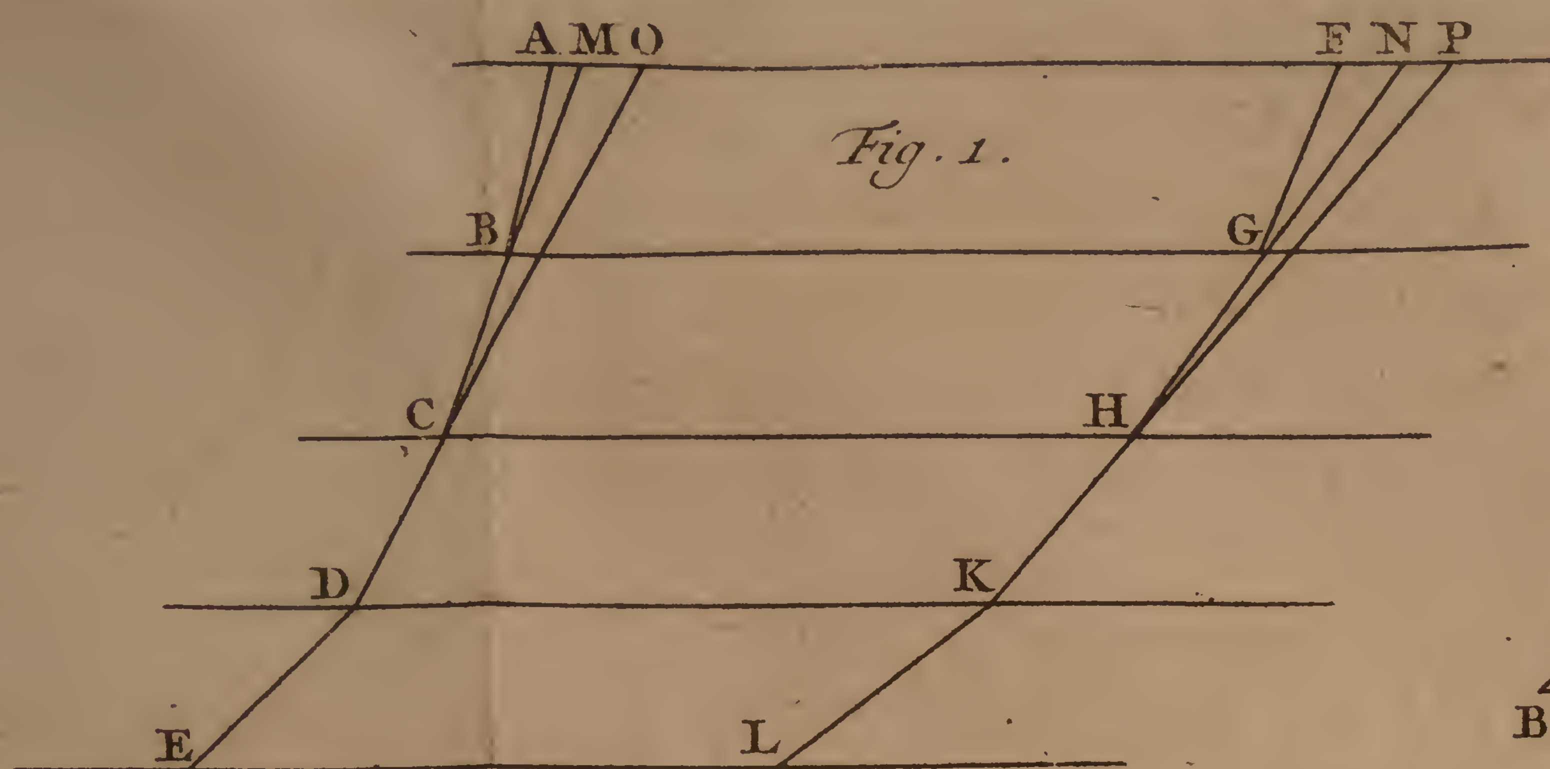
Itaque tempus aliquod brevius tempore per B E (sit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per B I ut arcus F H ad rectam F G. Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N, erit tempus per B E post N B, brevius tempore per B E. Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B, ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus Z superatur à tempore per B E. Sit itaque punctum N ita sumptum. unde quidem tempus per B E post N B majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per B I cum dimidia celeritate ex B Θ, quam arcus F H ad rectam F G. Habeat itaque eam quam arcus F H O ad rectam F G.

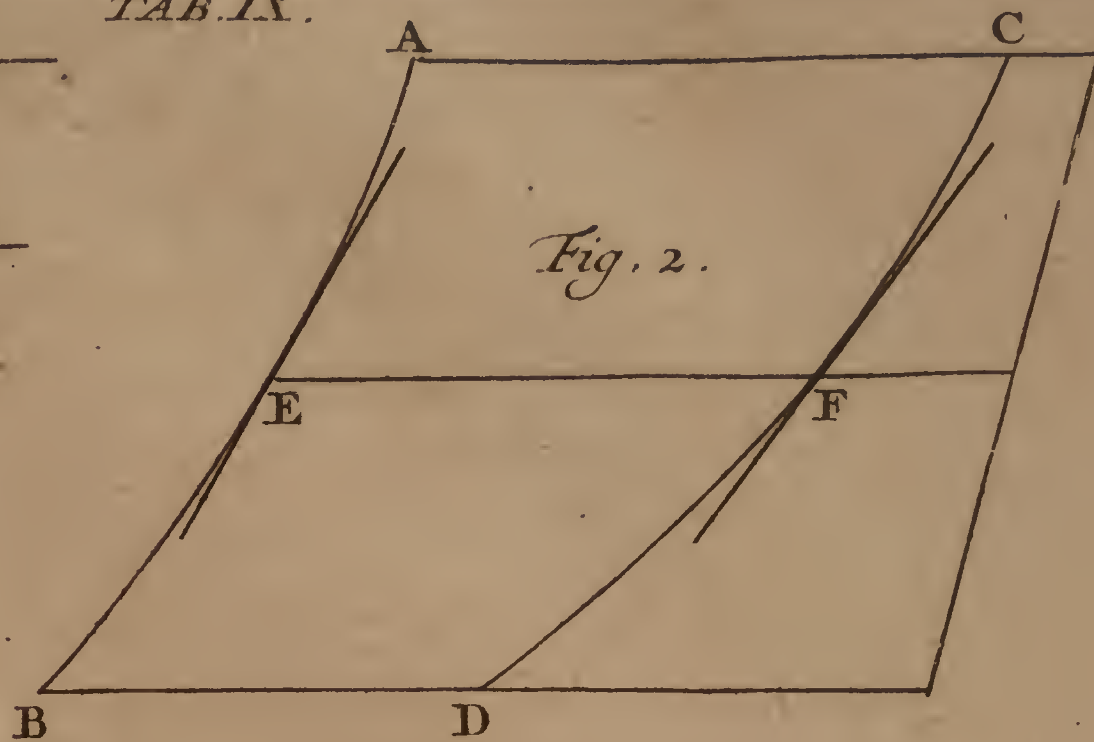
Dividatur F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ N B, atque item altitudine arcus H O; hoc enim fieri posse manifestum est; & à punctis divisionum agantur rectæ, basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ P Λ, Q Ξ, &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam F H, ab iis, itemque à puncto H, tangentes sursum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut Δ X, Γ Σ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes sursum ducantur velut S V, T M &c. additâ vero ad rectam F G parte una G R æquali iis quæ ex divisione, ductâque R Φ parallelâ similiter ipsi D C, patet eam occurrere circumferentiæ F H A inter H & O, quia G R minor est altitudine puncti H supra O. Jam vero sic porro argumentabimur.

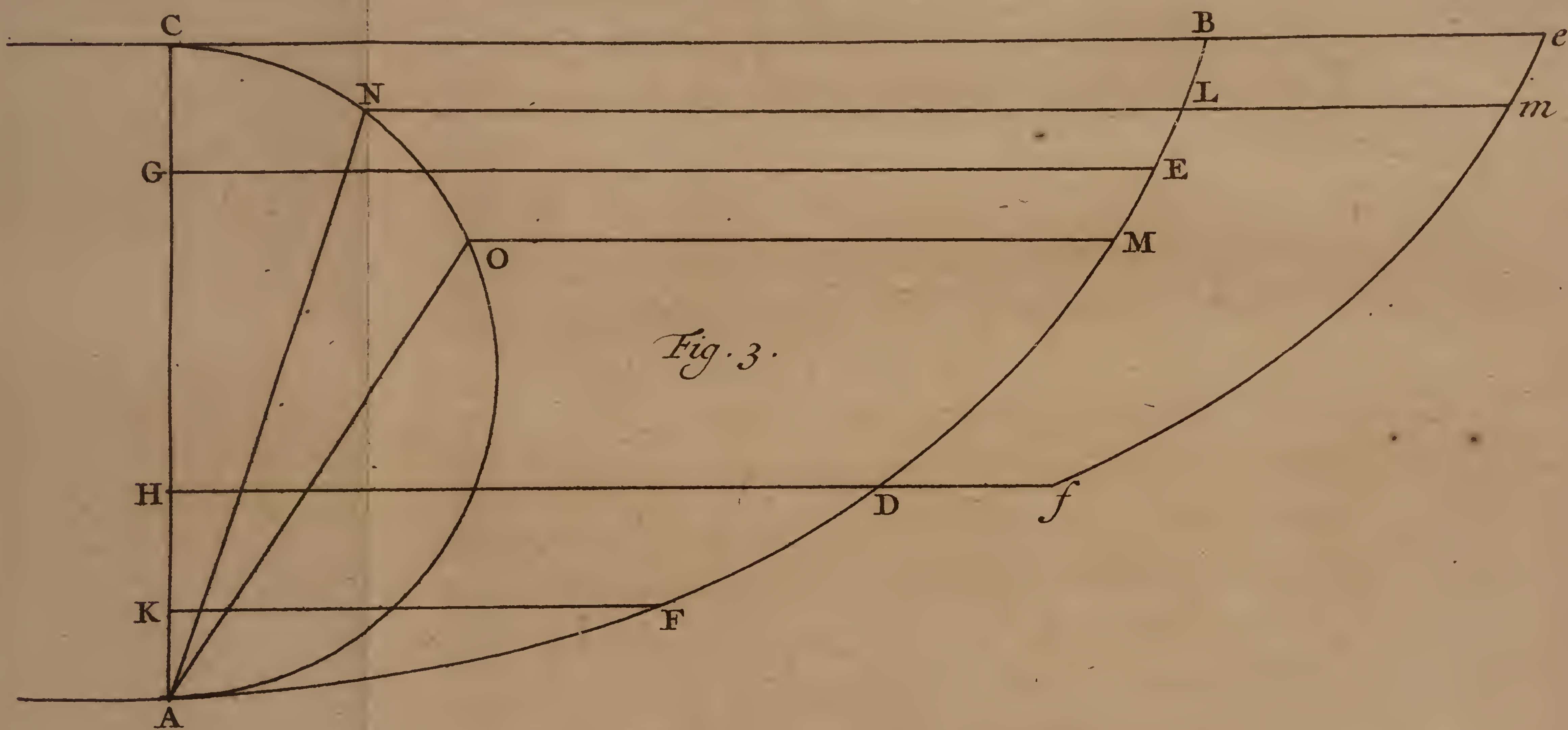
Tempus per tangentem V S cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex B S, majus est tempore motus continue accelerati per arcum B S post N B. Nam celeritas ex B S minor est celeritate ex N B, propterea quod minor altitudo B S quam N B. At celeritas ex B S æquabiliter continuari ponitur per tangentem V S, cum celeritas acquisita ex N B continue porro acceleretur per arcum B S, qui arcus minor

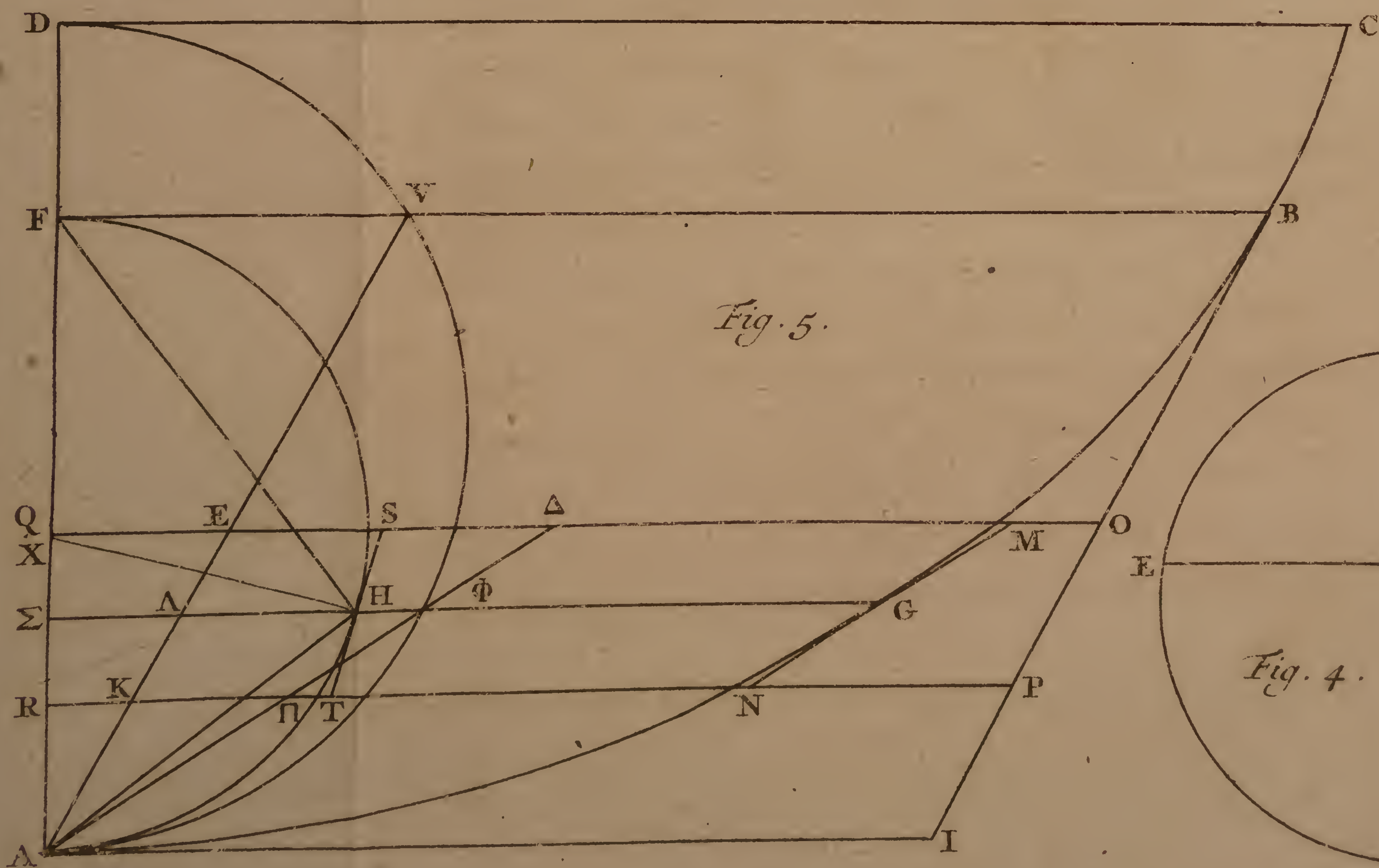
in-

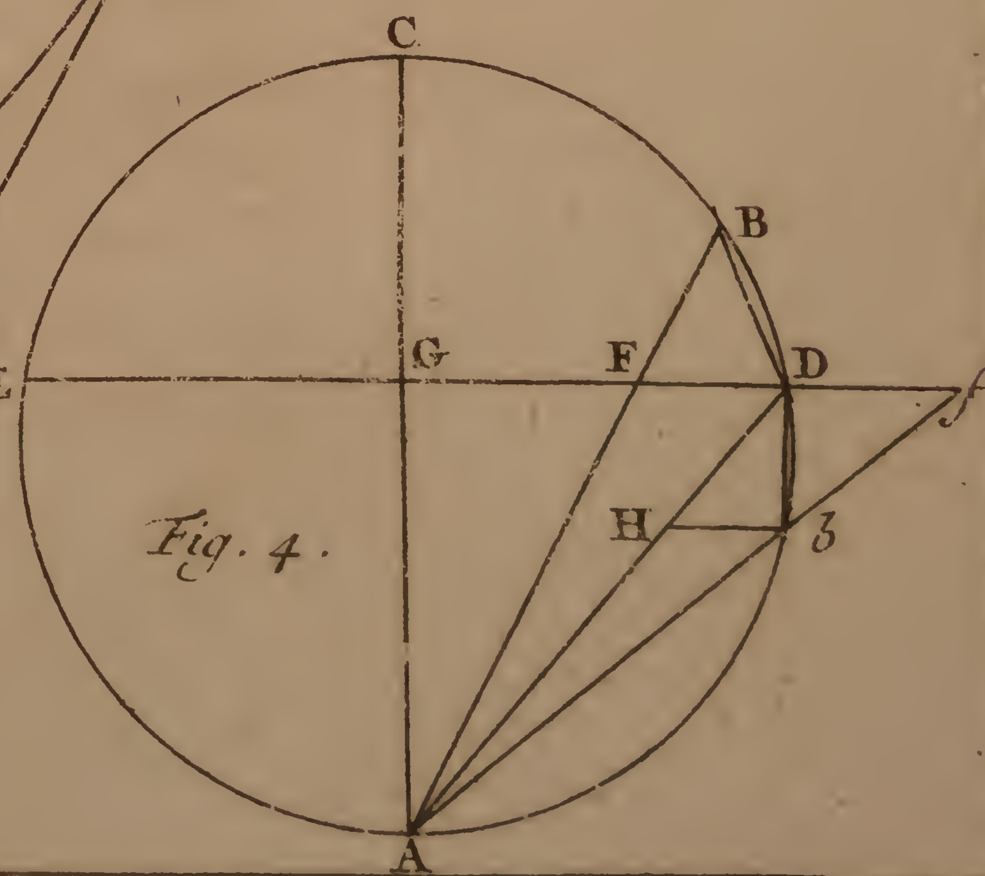
TAB. IX.


A M O
F N P
Fig. 1.
B
G
C
H
D
K
E
L


A
C
Fig. 2.
E
F
B
D


C
B
e
N
L
m
G
E
O
M
Fig. 3.
H
D
f
K
F
A


D
C
V
F
B
Fig. 5.
Q
E
S
Δ
M
O
X
Σ
Λ
H
Φ
G
R
K
Π
T
N
P
A
I


C
B
E
G
F
D
f
H
z
Fig. 4.
A

insuper est tangente V S, omnibusque partibus suis magis erectus quam ulla pars tangentis V S. Adeo ut omnino majus sit futurum tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, tempore per arcum B S post N B. Similiter tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, majus erit tempore per arcum S T post N S, & tempus per tangentem Π Y cum celeritate ex B Y, majus tempore per arcum T Y post N T. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipsarum contactus, majora simul erunt tempore per arcum B E post N B. Eadem vero & minora essent, ut nunc ostendemus.

De motu in Cycloide.

Considerentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et est quidem tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, ad tempus per rectam B Λ cum celeritate dimidia ex F A, ut tangens circumferentiæ Δ X ad partem axis F P*. Similiterque tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, ad tempus per rectam Λ Ξ cum eadem dimidia celeritate ex F A, ut tangens Γ Σ ad rectam P Q. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ B I cum celeritate dimidia ex B Θ, sicut tangentes circumferentiæ F H, iisdem parallelis comprehensæ, ad partes rectæ F G ipsis respondentes.

* Prop. præced.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ F P, P Q, &c. & totidem aliæ, tempora scilicet quibus percurruntur rectæ B Λ, Λ Ξ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex B Θ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli Δ X, Γ Σ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus

De Motu in Cycloide.

qualem diximus per tangentes cycloidis V S, M T &c. Ergo, ſicut ſe habent omnes ſimul priores ad omnes eas ad quas ipſæ referuntur, hoc eſt, ſicut tota F G ad tangentes omnes X Δ, Γ Σ, &c. ita tempus quo percurritur tota B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis V S, M T, &c*. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam B I cum celeritate dimidia ex B Θ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ F H ad rectam F G; ac minorem proinde quam arcus F O ad rectam eandem F G; quia arcus F Φ, ideoque omnino & arcus F O major eſt dictis omnibus arcus F H tangentibus *. Atqui tempus per B E poſt N B, ad tempus per B I cum celeritate dimidia ex B Θ, poſuimus eſſe ut arcus F O ad rectam F G. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora ſimul erunt tempore per B E poſt N B, cum antea majora eſſe oſtenſum ſit; quod eſt abſurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis B E, ad tempus per tangentem B I, cum celeritate dimidia ex B Θ vel ex F A, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ F H ad rectam F G.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

* Prop. 20. huj.

Habeat jam, ſi poteſt, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum B E, (ſit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per B I, ut arcus F H ad rectam F G.

TAB. X. Fig. 2.

Quod ſi jam ſumatur arcus N M æqualis altitudine cum arcu B E, ſed cujus terminus ſuperior N ſit humilior puncto B, erit tempus per arcum N M majus tempore per arcum B E*. Manifeſtum autem quod punctum N tam propinquum ſumi poteſt puncto B, ut differentia dictorum temporum ſit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z ſuperat tempus per arcum B E. Sit itaque punctum N ita ſumptum. Unde quidem tempus per N M minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum dimidia celeritate ex B Θ, minorem rationem quam arcus F H ad rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus L H ad rectam F G.

* Prop. 22. huj.

Dividatur jam F G in partes æquales F P, P Q, &c.

qua-

quarum unaquæque minor sit arcus cycloidis B N altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ F L; & additâ ad F G unâ earum partium G ζ, ducantur à punctis divisionum rectæ basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ, P O, Q K, &c; itemque à puncto ζ recta ζ Ω quæ secet cycloidem in V, circumferentiam in η; quibusque in punctis ductæ parallelæ secant circumferentiam F H, ab iis tangentes deorsum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θ Δ, Γ Σ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζ Ω in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorsum, velut S Λ, T Ξ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζ Ω in R. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Quia igitur P ζ æqualis est F G altitudini arcus B E, cui æqualis est ex constructione altitudo arcus N M, erit & P ζ æqualis altitudini arcus N M. Est autem recta P O ex constructione superior termino N. Ergo & ζ Ω, & in ea punctum V, superius termino M. Quare, cum arcus S V æqualis sit altitudinis cum arcu N M, sed termino S sublimiore quam N, erit tempus per S V brevius tempore per N M *. * Prop. 22. huj.

Atqui tempus per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, brevius est tempore descensus accelerati per arcum S T, incipientis in S. Nam celeritas ex B S, qua tota S Λ transmissa ponitur, æqualis est celeritati ex S T *, quæ motui per arcum S T in fine demum acquiritur; ipsaque S Λ minor est quam S T. Similiter tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, brevius est tempore descensus accelerati per arcum T Y post S T; quum celeritas ex B T, qua tota T Ξ transmissa ponitur, sit æqualis celeritati ex S Y, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum T Y post S T; ipsaque T Ξ minor sit arcu T Y. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati * Prop. 8. huj.

De motu in Cycloide.

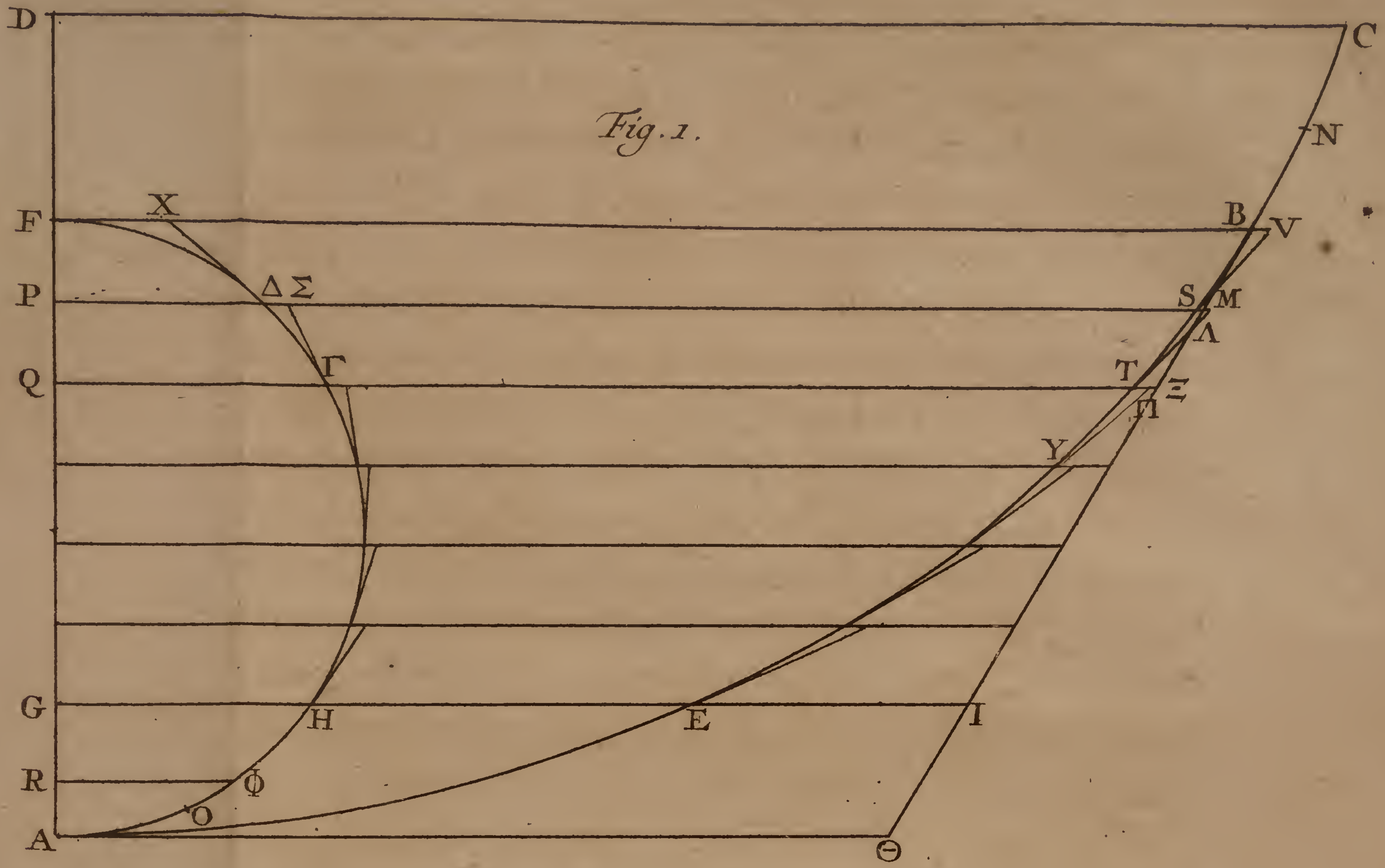
per arcum S V. Eadem verò & longiora essent, ut nunc ostendemus.

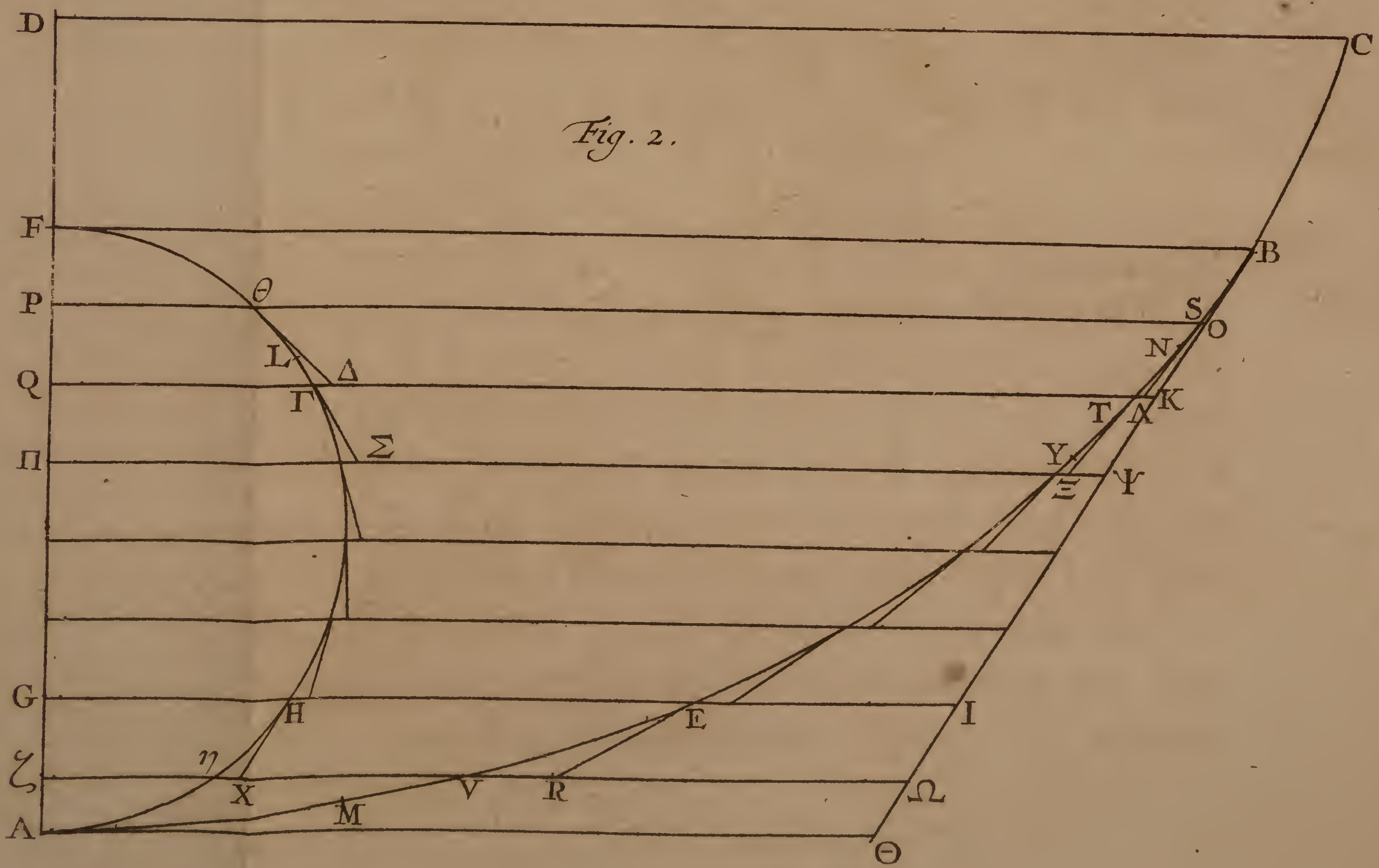
Est enim tempus dictum per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, ad tempus per rectam O K cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, sicut tangens semicirculi θ Δ ad rectam P Q *. similiterque tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, est ad tempus per rectam K Ψ cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ut tangens Γ Σ ad rectam Q Π. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ut tangentes circumferentiæ θ η, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ P ζ ipsis respondentes. Unde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas P Q, Q Π &c. hoc est, totam P ζ esse ad omnes simul tangentes θ Δ, Γ Σ, &c. sicut tempus quo percurritur tota O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis S Λ, T Ξ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam O Ω, sive per B I, quam dictæ tangentes omnes arcus θ η ad rectam P ζ vel F G, ac proinde majorem quam arcus L H ad rectam F G; est enim arcus θ H, adeoque etiam omnino arcus L H, minor dictis tangentibus arcus θ η *. Sed tempus per N M posuimus ab initio ad idem tempus per B I se habere ut arcus L H ad rectam F G. Ergo tempus per N M, multoque magis tempus per S V, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum S V, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis B E ad tempus per tangentem B I cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, non minorem rationem habere quam arcus F H ad rectam F G. Sed nec majorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

* Prop. 20. huj.

P R O-


Fig. 1.
D
C
N
F
X
B
V
P
Δ Σ
S
M
Λ
Q
Γ
T
Ξ
Π
Y
G
H
E
I
R
Φ
O
A
Θ


Fig. 2.
D
C
F
B
P
θ
S
O
N
L
Δ
Q
Γ
T
Λ
K
Π
Σ
Y
Ξ
Ψ
G
H
E
I
ζ
η
X
V
R
Ω
A
M
Θ

PROPOSITIO XXV.

De motu in Cycloide.

IN Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se æqualia; habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum.

Esto cyclois A B C cujus vertex A deorsum spectet, axis vero A D ad perpendiculum erectus sit, & à puncto quovis in cycloide sumpto, velut B; descendat mobile impetu naturali per arcum B A, sive per superficiem ita inflexam. Dico tempus descensus hujus esse ad tempus casus per axem D A, sicut semicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonstrato, etiam tempora descensus, per quoslibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter se æqualia esse constabit. TAB. XI. Fig. 1.

Describatur super axe D A semicirculus, cujus circumferentiam secet recta B F, basi D C parallela, in E; junctâque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: sitque etiam super F A descriptus semicirculus F H A.

Est igitur, per præcedentem, tempus descensus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus semicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori descensus naturaliter accelerati per eandem B G, sive per E A, quæ ipsi parallela est & æqualis; hoc est, tempori descensus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus descensus per axem D A, ut semicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

Quod

De motu in Cycloide.

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum B A descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. Deinde rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem D A, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XXVI.

TAB. XI. Fig. 1.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis H I *quæ arcum* B A *secet in* I, *circumferentiam vero* F H A *in* H: *dico tempus per arcum* B I, *ad tempus per arcum* I A *post* B I, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* F H *ad* H A.

Occurrat enim recta H I tangenti B G in K, axi D A in L. Est itaque tempus per arcum B A, ad tempus motus æquabilis per B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus F H A ad rectam F A *. Tempus autem dicti motus æquabilis per B G, est ad tempus motus æquabilis per B K, cum eadem celeritate dimidia ex B G, sicut B G ad B K longitudine, hoc est, sicut F A ad F L. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per B K, ad tempus per arcum B I, sicut F L ad arcum F H *. Igitur ex æquo erit tempus per arcum B A ad tempus per B I, ut arcus F H A ad F H. Et dividendo, & convertendo, tempus per B I, ad tempus per I A post B I, ut arcus F H ad H A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 24. huj.

* Prop. 24. huj.

H O-



HOROLOGII OSCILLATORII

De lineArum curvarum evolutione.

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

DEFINITIONES.

I.

LINEA in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, hæ ipsæ productæ pro tangentibus habentur.

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta curvæ ABC, ADE, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.* TAB. XI. Fig. 2.

III.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper extensa maneat; manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.

M IV.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. TAB. XI. Fig. 2.

I V.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori, A B C *est evoluta,* A D E *descripta ex evolutione* A B C, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extensa sit* D B *recta, reliqua parte* B C *adhuc applicata curvæ* A B C. *Manifestum est autem* D B *tangere evolutam in* B.

PROPOSITIO I.

R*Ecta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.*

TAB. XI. Fig. 3. Sit A B evoluta, A H vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem F D C, tangens curvam A D in D, occurrat in C curvæ A C H. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur C E recta perpendicularis C D, dico eam in C tangere curvam A C H. Quia enim D C tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ A C H, nusquam pertingere ad rectam C E præterquam in C puncto, manifestum erit rectam C E ibidem curvam A C H contingere.

Sumatur punctum aliquod in A C præter C, quod sit H, sitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse H G, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo H G lineam A B in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ C H, evolutus sit arcus D G, occurret C D à parte D producta ipsi H G, ut in F. Ponatur autem G H occurrere rectæ C E in E. Quia igitur duæ simul D F, F G, majores sunt quam D G, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam D C, ut rectæ C F, F G simul majores sint recta

C D

C D & ipſa D G. Sed propter evolutionem, apparet utrisque ſimul, rectæ C D, & lineæ D G, æquari rectam H G. Ergo duæ ſimul C F, F G majores quoque erunt recta H G; & ablata communi F G, erit C F major quam H F. Sed F E major eſt quam F C, quia angulus C trianguli F C E eſt rectus. Ergo F E omnino major quam F H. Unde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam C E. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C, ſitque fili poſitio H G, tunc cum ejus extremitas eſſet in H, & ducantur rectæ D G, D H, quarum hæc occurrat rectæ C E in E: apparet autem D G rectam non poſſe eſſe in directum ipſi H G, adeoque H G D fore triangulum. Jam quia recta D G vel minor eſt quam D K G, vel eadem, ſi nempe evolutæ pars D G recta ſit; additâ utrique G H, erunt rectæ D G, G H ſimul minores vel æquales duabus iſtis, ſcilicet D K G & G H, ſive his æquali rectæ D C. Duabus autem rectis D G, G H minor eſt recta D H. Ergo hæc minor utique erit rectâ D C. Sed D E major eſt quam D C, quia in triangulo D C E angulus C eſt rectus. Ergo D H multo minor quam D E. Situm eſt ergo punctum H, hoc eſt extremitas fili G H, intra angulum D C E. Unde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam C E. Ergo C E tangit curvam A C in C; ac proinde D C, cui C E ducta eſt perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonſtrandum. TAB. XII. Fig. 1.

Hinc etiam manifeſtum eſt curvam A H C in partem unam inflexam eſſe, & in eandem partem cavam ac ipſa A G B, cujus evolutione deſcripta eſt. Omnes enim tangentes lineæ A H C, cadunt extra ſpatium D G A H C: omnes vero tangentes lineæ A G D, intra dictum ſpatium. unde liquet cavitatem A H C reſpicere convexitatem A G D.

De linearum curvarum evolutione.
Tab. XII. Fig. 2.

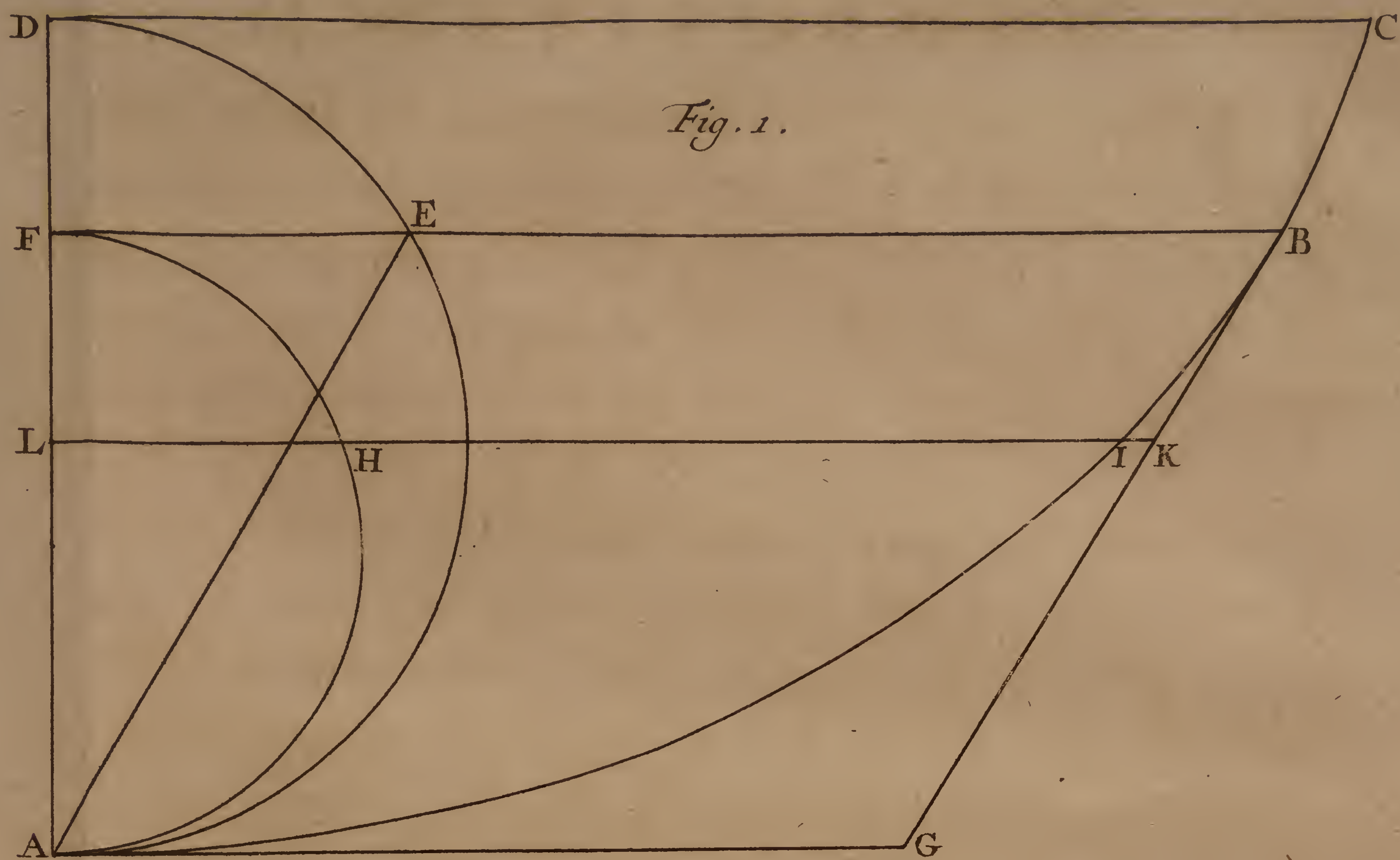
PROPOSITIO II.

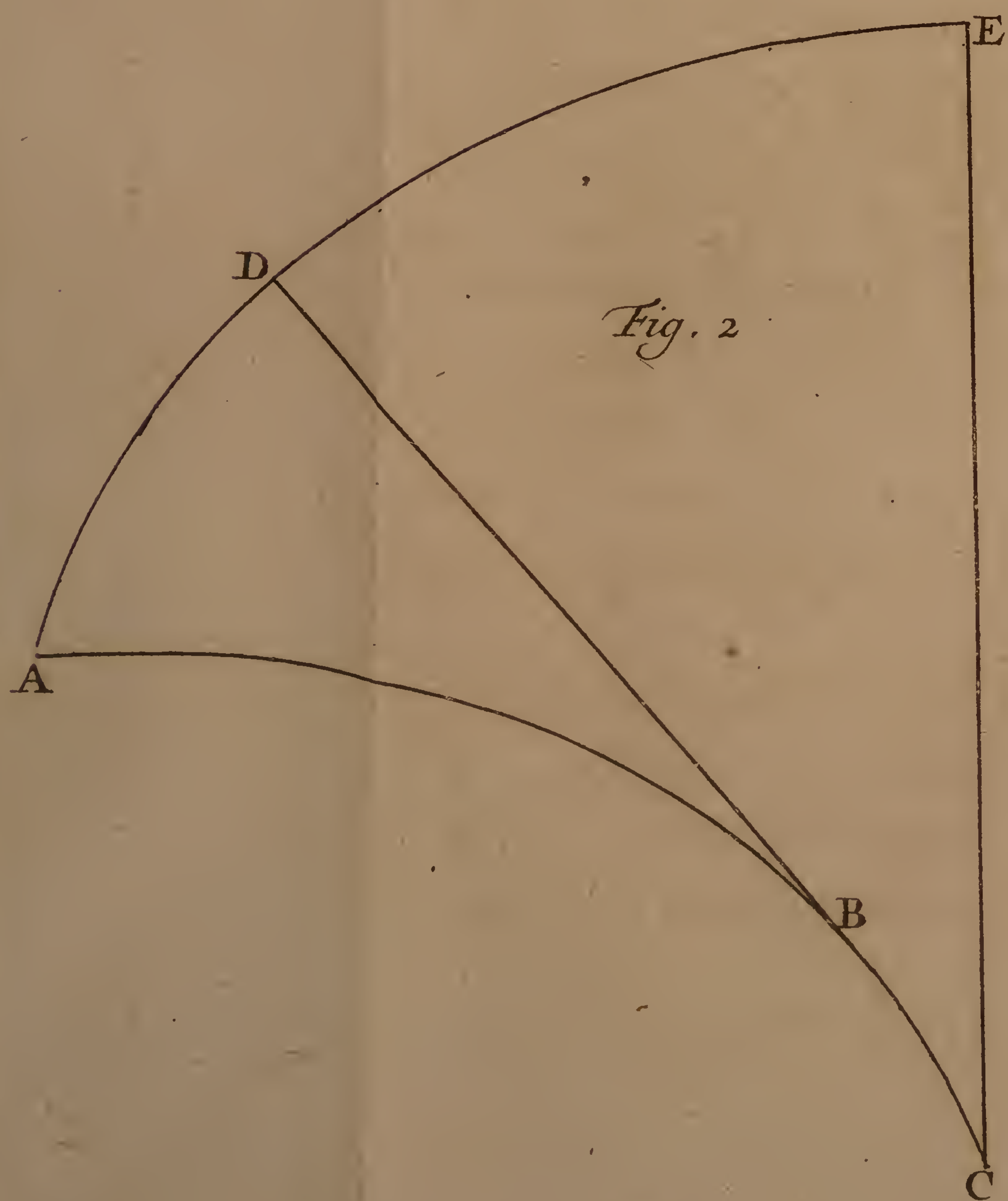
Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut A B D, *ut potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensæ rectæ ducantur, velut* A B, B C, C D; *& à singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* A N, B O, C P, *quæ occurrant iis, quæ in proxime sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistunt, quales sunt lineæ* B N, C O, D P; *ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* A B *ad* B N, B C *ad* C O, C D *ad* D P, *rationem majorem quavis ratione proposita.*

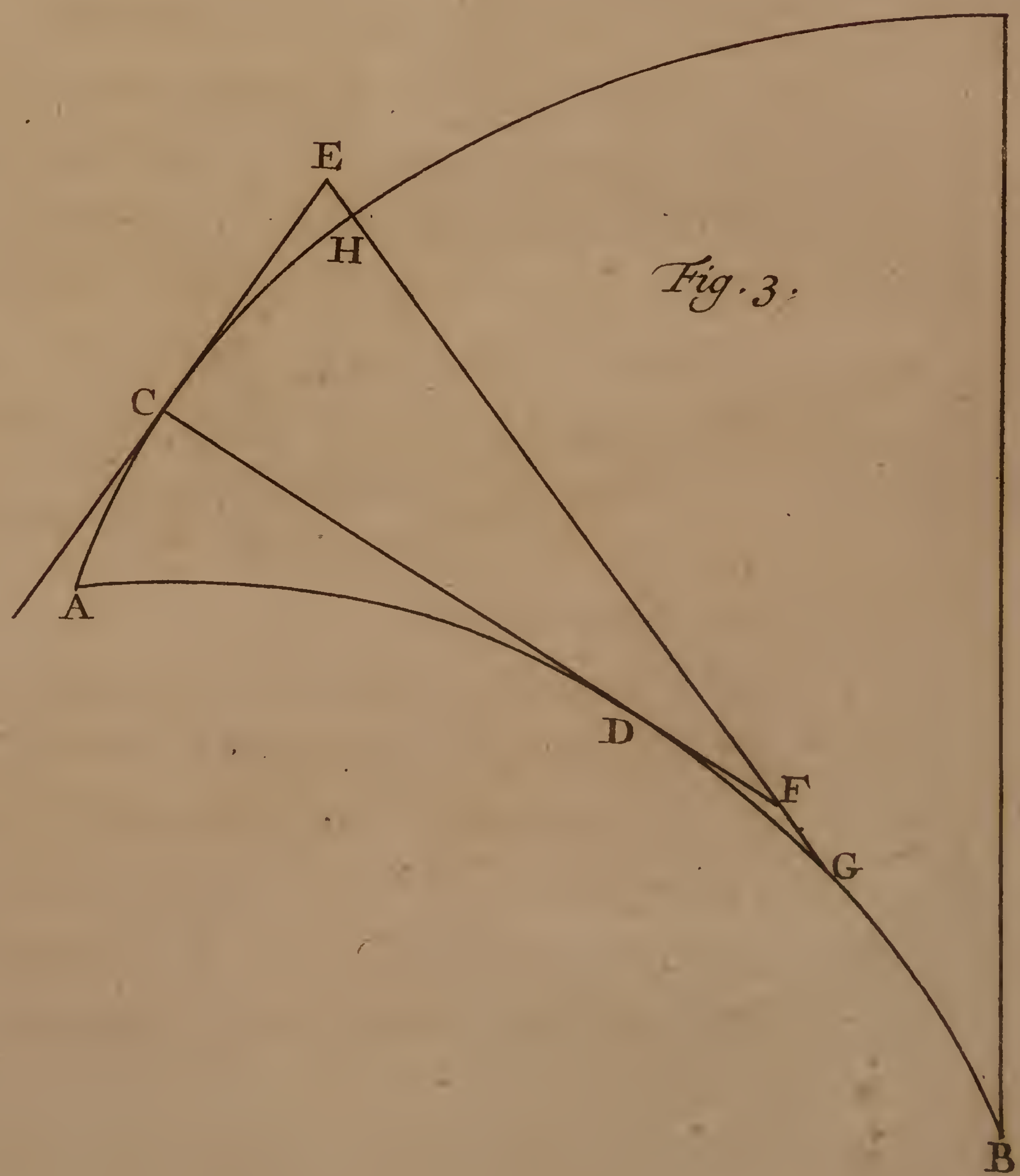
Sit enim data ratio lineæ E F ad F G, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta G E H.

Intelligatur primo curva A B D in partes tam exiguas secta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo F E H; quales sunt anguli A K B, B L C, C M D. quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat. Ductis jam subtensis A B, B C, C D, & erectis curvæ perpendicularibus B N, C O, D P, quæ occurrant productis A K, B L, C M, in N, O, P: dico rationes singulas rectarum, A B ad B N, B C ad C O, C D ad D P, majores esse ratione E F ad F G.

Quia enim angulus A K B major est angulo H E F, erit residuus illius ad duos rectos, nimirum angulus N K B, minor angulo G E F. Angulus autem B trianguli K B N est rectus, sicut & angulus F in triangulo E F G. Ergo ma-


D
C
Fig. 1.
E
F
B
L
H
I
K
A
G


E
D
Fig. 2
A
B
C


E
H
Fig. 3.
C
A
D
F
G
B

major erit ratio K B ad B N quam E F ad F G. Sed A B major est quam K B, quoniam angulus K in triangulo A K B est obtusus, est enim major angulo H E F qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio A B ad B N major erit ratione K B ad B N, ac proinde omnino major ratione E F ad F G. Eodem modo & ratio B C ad C O, & C D ad D P, major ostendetur ratione E F ad F G. Itaque constat propositum. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO III.

DUæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliquæ.

Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ A C E, A G K, communem terminum habentes A, & sumpto in exteriore illarum puncto quolibet K, sit inde educta K E recta, curvæ A G K occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ A C E. TAB. XII. Fig. 3.

Potest jam recta quædam sumi major curva K G A, quæ sit Q. Divisa autem intelligatur ipsa K G A, ut in propositione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis H G F, ut subtensæ singulæ K H, H G, G F, F A, ad perpendiculares curvæ sibi contiguas H M, G N, F O, A P majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam K E. Itaque & omnes simul dictæ subtensæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad K E. Producantur autem perpendiculares eædem & occurrant curvæ A C E in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam K E minor quam M D. Etenim, ducta E L ipsi K E perpendiculari, quoniam K E occurrit lineæ curvæ E C A ad angulos rectos, tanget E L curvam A C E, occurretque necessario rectæ M D inter D & M. Unde

 cum

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

cum K E ſit breviſſima omnium quæ cadunt inter parallelas E L, K M, erit ea minor quam M L, ac proinde minor quoque omnino quam M D. Eodem modo & H D minor oſtendetur quam N C, & G C minor quam O B, & F B minor quam P A. Cum ſit ergo P A major quam F B, erunt duæ ſimul P A, O F majores quam O B. Item quum O B ſit major quam G C, erunt duæ ſimul O B, N G, majores quam N C. Sed duæ P A, O F majores erant quam O B. Itaque tres ſimul P A, O F, N G omnino majores erunt quam N C. Rurſus, quia N C major quam H D, erunt duæ ſimul N C, M H majores quam M D. Unde, ſi loco N C ſumantur tres hæ ipſa majores P A, O F, N G, erunt omnino hæ quatuor P A, O F, N G, M H majores quam M D: ac proinde eædem quoque omnino majores recta K E, quia ipſa M D major erat quam K E. Diximus autem ſubtenſas omnes A F, F G, G H, H K majorem rationem habere ad omnes perpendiculares P A, O F, N G, M H, quam linea Q ad K E. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam ſit K E, habebunt dictæ ſubtenſæ ad K E omnino majorem rationem quam Q ad K E. Ergo ſubtenſæ ſimul ſumptæ majores erunt rectâ Q. Hæc autem ipſa curvâ A G K major ſumpta fuit. Ergo ſubtenſæ A F, F G, G H, H K ſimul majores erunt curva A G K cujus partibus ſubtenduntur; quod eſt abſurdum, cum ſingulæ ſuis arcubus ſint minores. Non igitur poterunt eſſe duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit ſeſe habeant. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

SI ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo comparatæ ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; poſterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, deſcribetur.

Sun-

Sunto lineæ A B C, A D E, in partem unam inflexæ, & quarum uttraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam A B C, velut B D, C E, occurrant lineæ A D E ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius A B C, à termino A incepta, describi A D E. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. TAB. XII. Fig. 4.

Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva A F G. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam A B C tangentes, ut B D, C E, occurrent ipsi A F G ad angulos rectos*, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ A D E. Sunt igitur lineæ curvæ A D E, A F G, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipsa A B C; nam de linea A D E constat ex hypothesi, de A F G vero ex propositione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri similiter occurrunt. quod quidem fieri non posse antea ostensum est*. Quare constat ipsam A D E descriptum iri evolutione lineæ A B C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. 3. huj.

PROPOSITIO V.

SI Cycloidem recta linea in vertice contingat, super qua, tanquam basi, alia cyclois priori similis & æqualis constituatur, initium sumens à puncto dicti verticis; recta quælibet inferiorem cycloidem tangens, occurret superioris portioni, sibi superpositæ, ad angulos rectos.

Tangat cycloidem A B C in vertice A recta A G, super qua, tanquam basi, similis alia cyclois constituta sit A E F, cujus vertex F. Cycloidem autem A B C tangat recta B K in B. Dico eam productam occurrere cycloidi A E F ad angulos rectos. TAB. XVI. Fig. 1.

Describatur enim circa A D, axem cycloidis A B C, circulus

De Linearum curvarum evolutione.

culus genitor A H D, cui occurrat B H, basi parallela, in H, & jungatur H A. Quia ergo B K tangit cycloidem in B, constat eam parallelam esse rectæ H A *. Itaque A H B K parallelogrammum est, ac proinde A K æqualis H B, hoc est, arcui A H *. Sit porro jam descriptus circulus K M, genitori circulo, hoc est ipsi A H D, æqualis, qui tangat basin A G in K, rectam vero B K productam secet in puncto E. Quia ergo ipsi A H parallela est B K E, ac proinde angulus E K A æqualis K A H, manifestum est B K productam abscindere à circulo K M arcum æqualem ei, quem à circulo A H D abscindit recta A H. Itaque arcus K E æqualis est arcui A H, hoc est rectæ H B, hoc est rectæ K A. Hinc vero sequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor M K tangebat regulam in K, punctum describens fuisse in E. Itaque recta K E occurrit cycloidi in E ad angulos rectos *. Est autem K E ipsa B K producta. Ergo patet productam B K occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

* Propos. 15. partis 2.
* Propos. 14. partis 2.
* Propos. 15. partis 2.

PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia semicyclois describitur evolutæ æqualis & similis, cujus basis est in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

TAB. XVI. Fig. 1.

Sit semicyclois A B C, cui superimposita sit alia similis A E F, quemadmodum in propositione præcedenti. Dico, si linea flexilis, circa semicycloidem A B C applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam describere extremitate sua ipsam semicycloidem A E F. Quia enim ex puncto A egrediuntur semicycloides A B C, A E F, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes semicycloidis A B C occurrant semicycloidi A E F ad angulos rectos, sequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, describi *. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. huj.

Et

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Et apparet, si dimidiam cycloidem, ipsi A B C gemellam, contrario situ ab altera parte lineæ C G disponamus, velut C N, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extensum in C F, circa eam replicatur, alteram semicycloidem F N fili extremitate descriptum iri, quæ simul cum priore A E F integram constituat.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Atque ex his, & propositione 25 de descensu gravium, manifestum jam est quod supra in Constructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, secundum semicycloidem inflexas, suspensum agitatumque, motu suo cycloidis arcum describere, ac proinde æqualibus temporibus quaslibet ejus reciprocationes absolvi. Non refert enim utrum in superficie, secundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipsam in aëre percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea sui axis, sive diametri circuli genitoris, quadrupla est.

Repetita enim figura præcedenti: cum post totam semicycloidem A B C evolutam, filum occupet rectam C F, quæ dupla est A D, proptarea quod axes cycloidum A B C, A E F sunt æquales; apparet semicycloidem ipsam A B C, filo sibi circum applicito æqualem, duplam esse sui axis A D, ac totam proinde cycloidem axis sui quadruplam.

TAB. XVI. Fig. 1.

Apparet etiam tangentem B E, quæ refert partem fili extensam, antea curvæ parti B A applicatam, huic ipsi longitudine æquari. Est autem B E dupla ipsius B K, sive A H, quoniam in propositione quinta ostensum est K E ipsi A H æqualem esse. Itaque pars cycloidis A B rectæ A H, sive B K, dupla erit: existente nimirum B H parallela basi cycloidis: idque ubicunque in ea punctum B sumptum fuerit.

De linearum curvarum evolutione.

Hanc cycloidis dimensionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Christophorus Wren Anglus, eamque deinde eleganti demonstratione confirmavit, quæ edita est in libro de cycloide viri clarissimi Ioannis Wallisij. De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa nostri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occasionem præbuere problemata quædam à Blasio Paschalio Gallo proposita, qui in his studiis præcellebat. Is cum sua, tum aliorum inventa recensens, primum omnium Mersennum lineam hanc in rerum natura advertisse ait. Primum Robervallium tangentes ejus definivisse, ac plana & solida dimensum esse. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus invenisse. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dedisse. Me quoque primum reperisse dimensionem absolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, basi parallelâ, abscinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abest. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem descripto. Seipsum denique solidorum ac semisolidorum, tam circa basin quàm circa axem, centra gravitatis definivisse, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipsius (Sed hæc post acceptam à Wrennio dimensionem) centrum gravitatis invenisse, & dimensionem superficierum convexarum, quibus solida ista eorumque partes comprehenduntur; earumque superficierum centra gravitatis. Ac denique dimensionem curvarum cujusvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc est earum quæ describuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris sumpto. Et horum quidem demonstrationes à Paschalio sunt editæ. A quibus suas quoque, de eadem linea, subtilissimas meditationes exposuit Cl. Wallisius, atque eadem illa omnia suo Marte se reperisse, ac problemata à Paschalio proposita solvisse contendit. Quod idem & doctissimus Lovera sibi vindicat. Quantum vero unicuique debeatur, ex scriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod silentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum est, ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut

peni-

penitiùs quam cyclois cognita ſit. Methodum vero noſtram, qua in hac metienda uſi ſumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere.

Sit paraboloides A B, cujus axis A D; vertex A; proprietas autem iſta, ut ordinatim ad axem applicatâ B D, cubus abſciſſæ ad verticem D A æquetur ſolido, baſin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & ponatur axi D E juncta in directum A E, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipſius M. Jam ſi filum continuum circa E A B applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico deſcriptam ex evolutione eſſe parabolam E F, cujus axis E A G, vertex E, latus rectum æquale duplæ E A. TAB. XIII. Fig. 1.

Sumpto enim in curva A B puncto quolibet B, ducatur quæ in ipſo tangat curvam recta B G, occurrens axi E A in G. & ex G ducatur porro G F, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ E F in F; & ſit ipſi G F perpendicularis F H, quæ parabolam in F continget; & denique F K ordinatim ad axem E G applicetur.

Eſt igitur K G æqualis dimidio lateri recto, hoc eſt, ipſi E A; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque A K, erit E K æqualis A G. Eſt autem A G triens ipſius A D, quoniam B G tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonſtrari poteſt. Ergo & E K æqualis eſt trienti A D: & K H, quæ ex natura parabolæ dupla eſt K E, æquabitur duabus tertiis A D. Itaque cubus ex K H æqualis eſt $\frac{8}{27}$ cubi ex A D, hoc eſt, ſolido baſin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem $\frac{8}{27}$ M, hoc eſt, ipſi A E. Quamobrem ut quadratum D B ad quadratum K H, ita erit K H longitudine ad A E, hoc eſt ad K G. Erat autem K H æqualis $\frac{2}{3}$ A D, hoc eſt ipſi G D. Ergo

ut quadratum B D ad quadratum D G ita eſt H K ad K G. Ut autem H K ad K G, ita eſt quadratum F K ad quadratum K G. Ergo ſicut quadratum B D ad quadratum D G, ita quadratum F K ad quadratum K G. Et proinde ſicut B D ad D G longitudine, ita F K ad K G. Unde ſequitur B G F eſſe lineam rectam. Sed G F occurrit parabolæ E F ad angulos rectos. Ergo apparet B G, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad angulos rectos. Idque ſimiliter de quavis illius tangente demonſtrabitur. Ergo conſtat ex evolutione lineæ E A B, à termino E incepta, deſcribi parabolam E F *. quod erat demonſtrandum.

* Propoſ. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut cubi abſciſſarum ad verticem.

TAB. XIII. Fig. 2.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifeſtum eſt. Parabola vero E F ad conſtructionem non requiritur, quæ ſic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus A B, cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur B G tangens in puncto B, quæ occurrat axi A G in G. Tanget autem ſi A G fuerit tertia pars A D, inter verticem & ordinatim applicatam B D interceptæ. Porro ſumpta A E æquali $\frac{8}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum eſt paraboloidis A B, ducatur E F parallela B G, occurratque lineæ A F, quæ parallela eſt B D, in F. Jam ſi ad rectam B G addatur N F, exceſſus rectæ E F ſupra E A, habebitur recta æqualis curvæ A B. Cujus demonſtratio ex ante dictis facile perſpicitur.

Semper ergo curva A B tantum ſuperat tangentem B G, quantum recta E F rectam E A.

Rurſus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimenſi ſunt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemenſis rectæ æqualem oſtendit, cujus demonſtratio poſt commentarios Joh. Schotenii in Carteſii

Geo-

Geometriam, eodem anno editam, adjecta est. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geometricè definiuntur, ad hanc mensuram reduxit, cum sub idem tempus Cycloidis longitudinem dedisset Wrennius, non minus ingenioso epicheremate. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuisse, neque tamen plane id adsecutum esse. Nam neque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam foret curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si scivisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se profecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt; sed illæ sero utique.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars est, ante ipsum atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis sese obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis istius superficiei affinem esse dimensionem ipsius cur-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

væ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur.

Ac de Conoidis quidem superficie in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis 24. Decemb. anni 1657. datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum* &c. *Alterum est, me has omnes curvas, ipsumque adeo locum linearem integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo.*

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc literarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

TAB. XIII. Fig. 1.

Sit datum conoides cujus sectio per axem parabola A B C, axis ejus B D, vertex B, diameter basis A C, quæ sit axi B D ad angulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

Pro-

Producto axe à parte verticis, sumatur B E æqualis B D, & jungatur E A, quæ parabolam A B C in A continget. Porro secetur A D in G, ut sit A G ad G D sicut E A ad A D. Et utrisque simul A E, D G æqualis statuatur recta H. Item trienti basis A C æqualis sit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis A B C. Hinc sequitur, si fuerit A E dupla A D, superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si A E tripla A D, ut 13 ad 6. si A E quadrupla A D, ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si A E ad A D ejusmodi rationem habuerit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire.

Esto sphæroides oblongum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E, cujus minor diameter D E.

TAB. XIII. Fig. 4.

Ponatur D F æqualis C B, seu ponatur F alter focorum ellipseos A D B E, rectæque F D parallela ducatur B G, occurrens productæ E D in G. centroque G, radio G B, describatur super axe A B arcus circumferentiæ B H A. Interque semidiametrum C D & rectam utrisque æqualem, arcui A H B & diametro D E, media proportionalis sit recta K. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis A D B E æqualis sit.

Sphæroidis lati sive compressi superficiei circulum æqualem invenire.

Sit sphæroides latum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E.

TAB. XIII. Fig. 5.

Sit rursus focorum alteruter F, divisâque bifariam F C in G, intelligatur parabola A G B quæ basin habeat axem A B, verticem vero punctum G. Sitque inter dimatrum D E, & rectam curvæ parabolicæ A G B æqualem, media propor-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

portionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis propositi æqualis sit.

Conoidis hyperbolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

TAB. XIV. Fig. I.

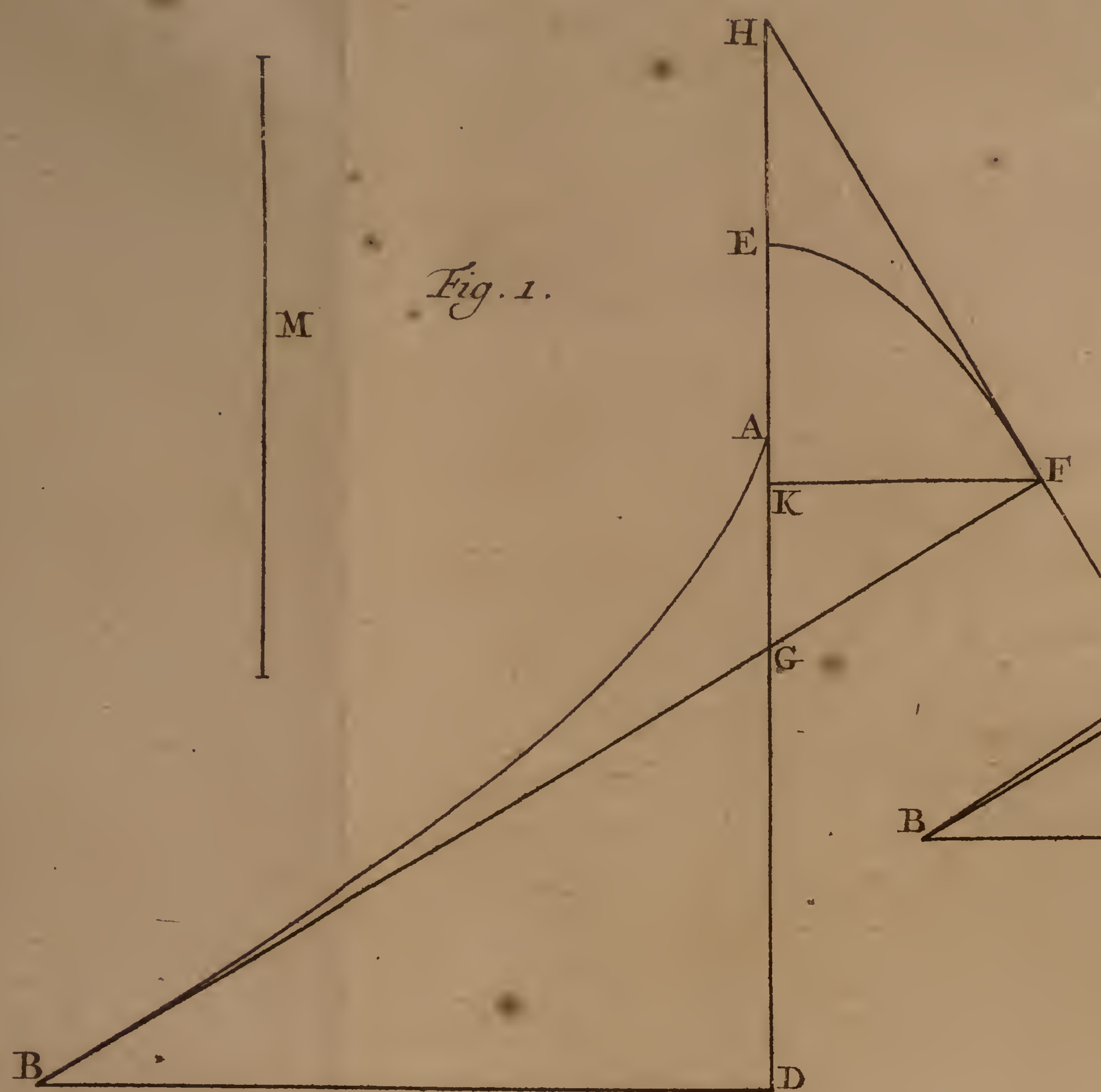
Esto conoides hyperbolicum cujus axis A B, sectio per axem hyperbola C A D, cujus latus transversum E A, centrum F, latus rectum A G.

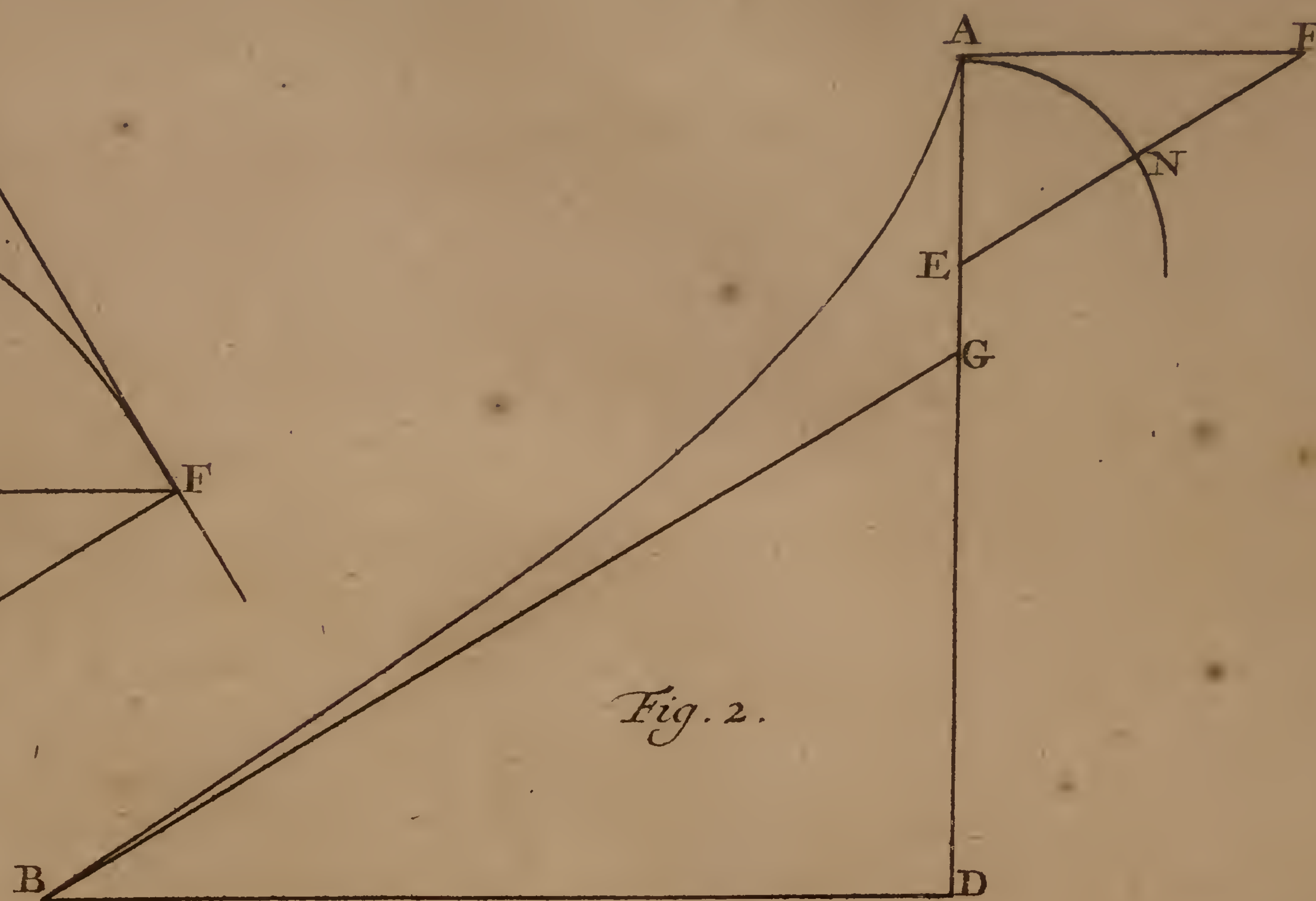
Sumatur in axe recta A H, æqualis dimidio lateri recto A G. & ut H F ad A F longitudine ita, sit A F ad F K potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola descripta K L M, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transversum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipsi producta B C in M, sitque A L parallela B C. Erit jam sicut spatium A L M B, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehensum, ad dimidium quadratum ex B C, ita superficies conoidis curva ad circulum baseos suæ, cujus diameter C D. Unde constructio reliqua facile absolvetur, positâ hyperbolæ quadraturâ.

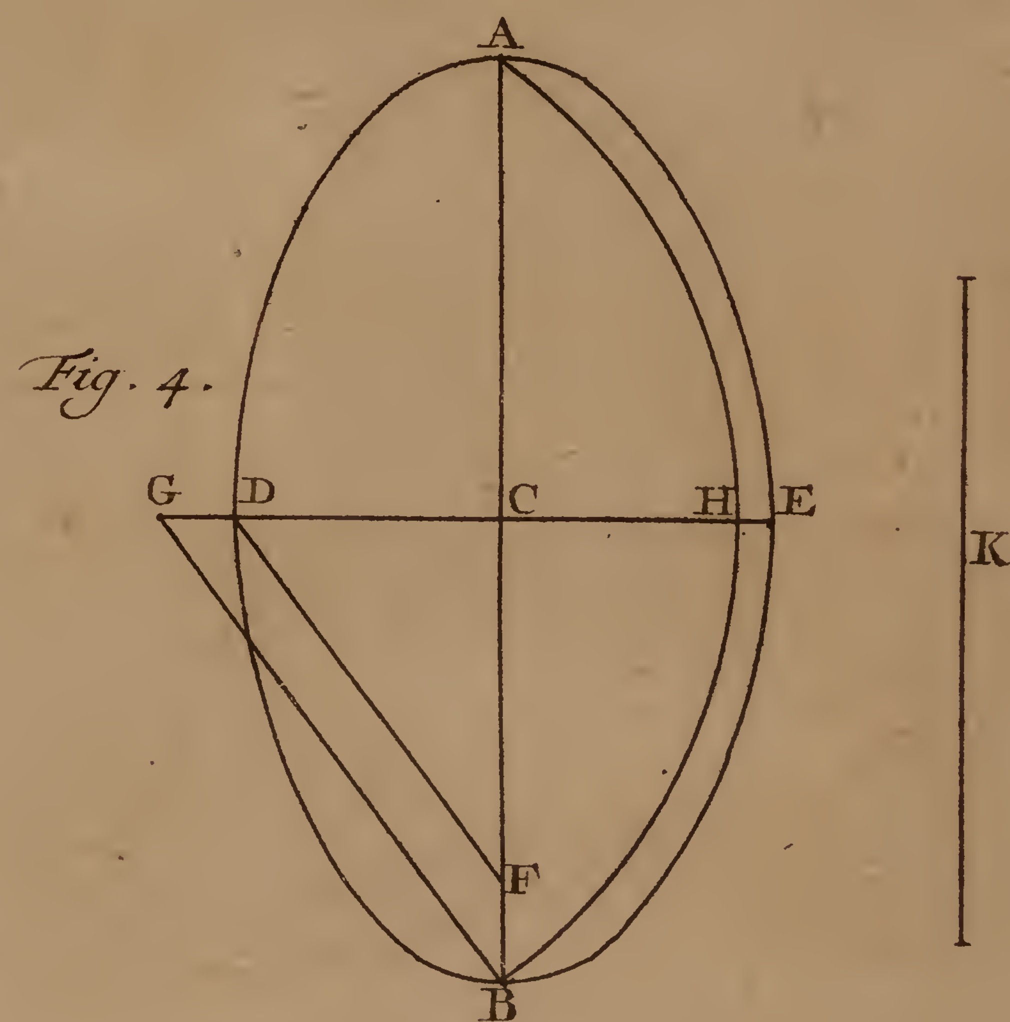
Quum igitur conoidis parabolici superficies ad circulum redigatur, æque ac superficies sphæræ, ex notis geometriæ regulis; in superficie sphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum est arcus circumferentiæ longitudinem æquari posse lineæ rectæ. Ad sphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici superficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in sphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox ostendemus.

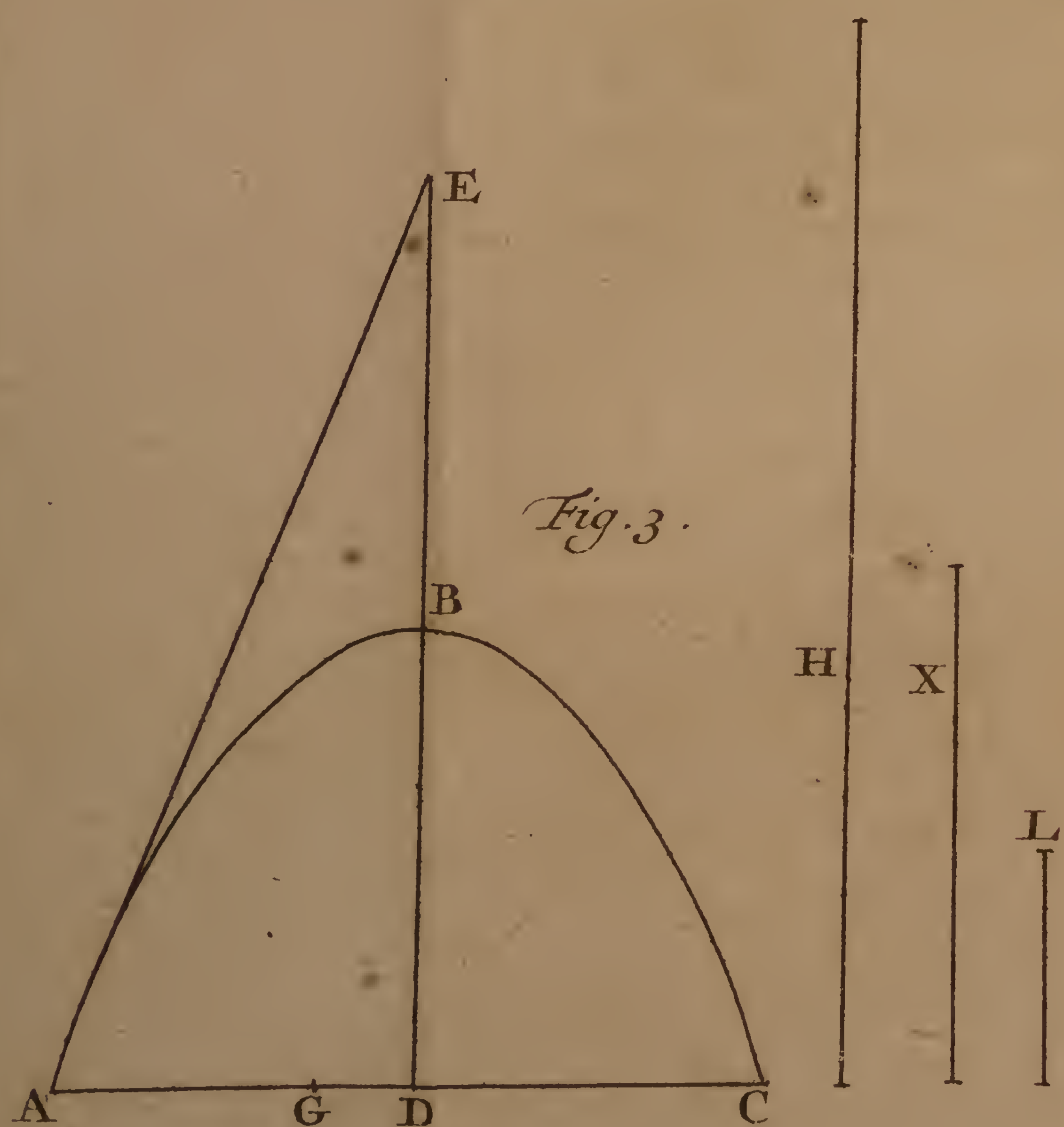
Verum, quod non indignum animadversione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ suppositione, circulum æqualem construi superficiei utrique simul, sphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

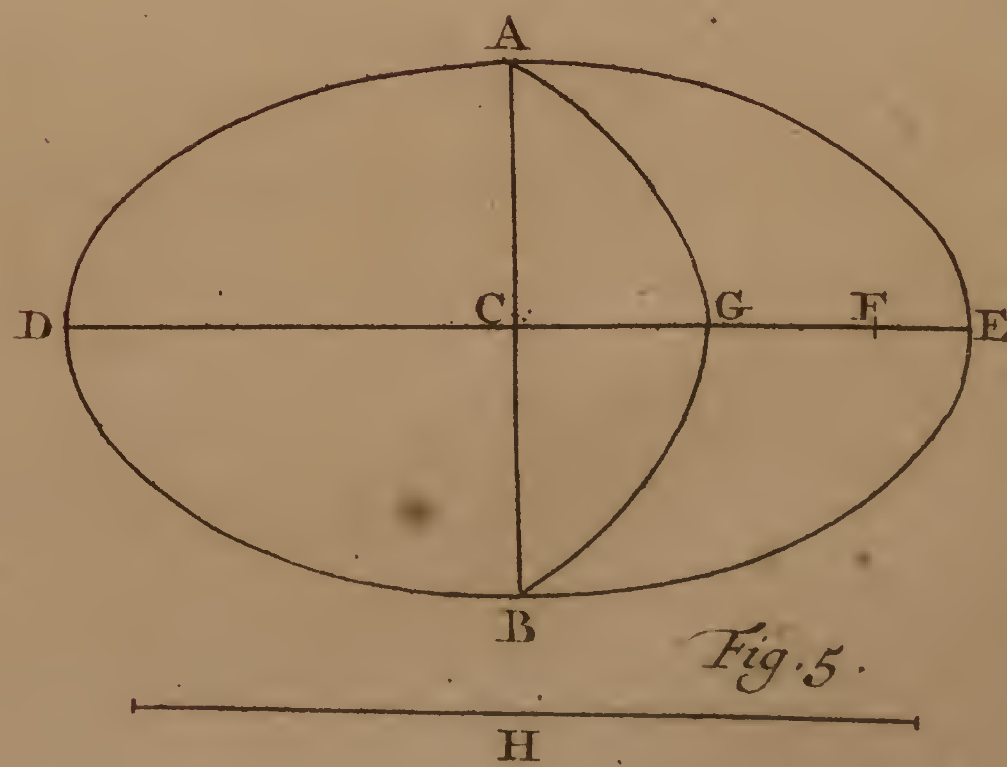
Dato enim sphæroide quovis lato, posse inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, posse inveniri sphæroides latum ejusmodi, ut utriusque simul

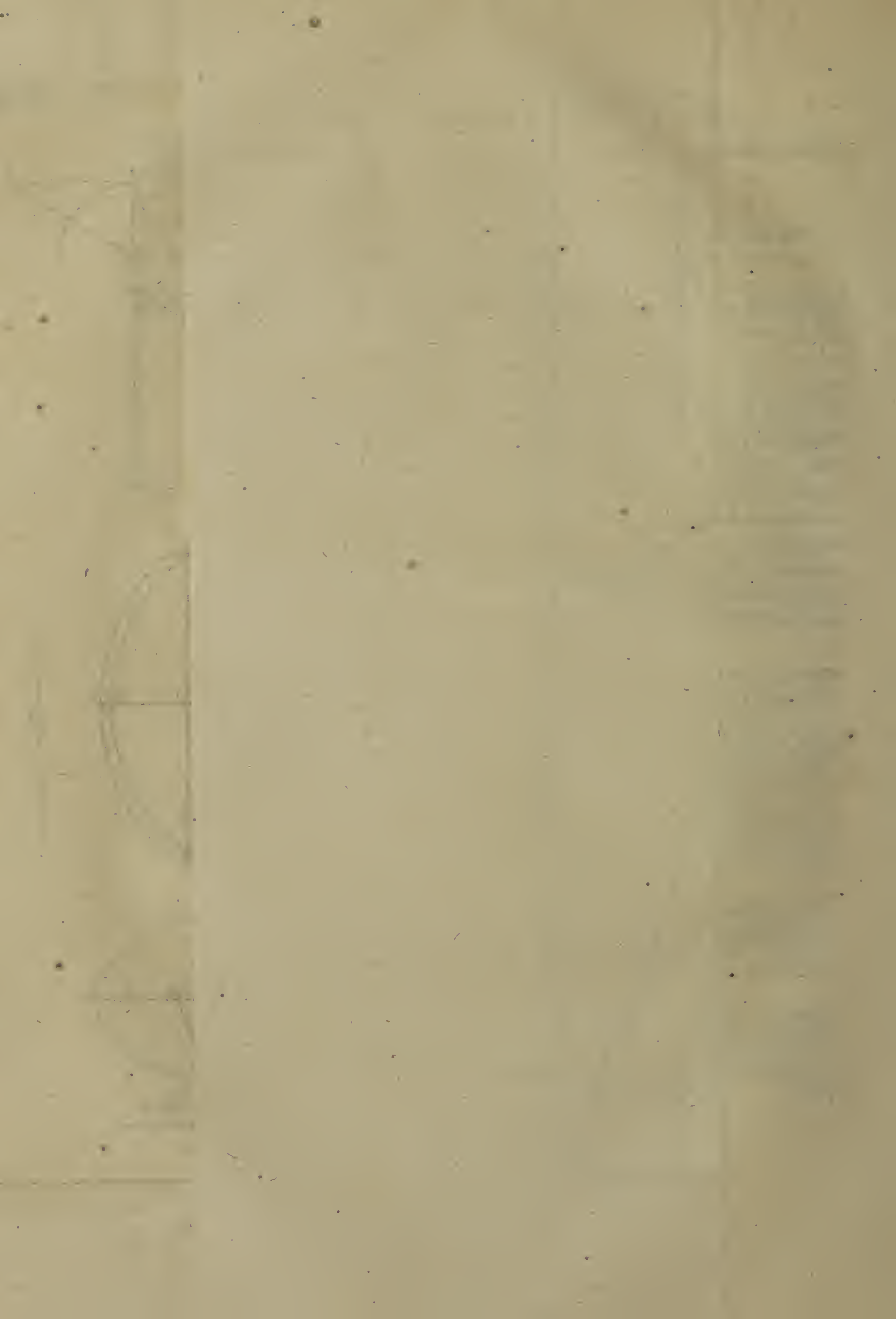

H
E
A
K
F
G
B
D
M
Fig. 1.


A
F
N
E
G
B
D
Fig. 2.


A
G
D
C
H
E
F
B
K
Fig. 4.


E
B
A
G
D
C
H
X
L
Fig. 3.


A
D
C
G
F
E
B
H
Fig. 5.



mul superficiei exhibeatur circulus æqualis. cujus exemplum in casu uno cæteris simpliciore sufficiet attulisse. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sit sphæroides latum cujus axis S I, sectio per axem ellipsis S T I K; cujus ellipsis centrum O, axis major T K. TAB. XIV. Fig. 2. ponatur autem ellipsis hæc ejusmodi, ut latus transversum T K habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea secundum extremam & mediam rationem secta, ad partem sui majorem.

Sumatur B C potentia dupla ad S O, item B A potentia dupla ad O K. & sint hæ quatuor continue proportionales B C, B A, B F, B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q F N, cujus axis F P; axi adjecta, sive $\frac{1}{2}$ latus transversum F B; dimidium latus rectum æquale B C.

Hujus conoidis superficies curva, unà cum superficie sphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe possit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire.

Sit parabolæ portio A B C, cujus axis B K, basis A C TAB. XIV. Fig. 3. axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire.

Accipiatur basi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut sit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto basis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I descriptæ, cujusque diameter sit E H; basis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu sumi potest. Quod si jam super basi D F intelligatur parallelogrammum constitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale sit; ejus latus P Q ita secabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I sit æqualis curvæ parabolicæ A B, cujus dupla est A B C.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ mensura, & illa ab hac vicissim.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet veræ proximam solutionem per numeros accipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Est autem regula hujusmodi.

TAB. XV. Fig. 1.

Sit D A B portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C.

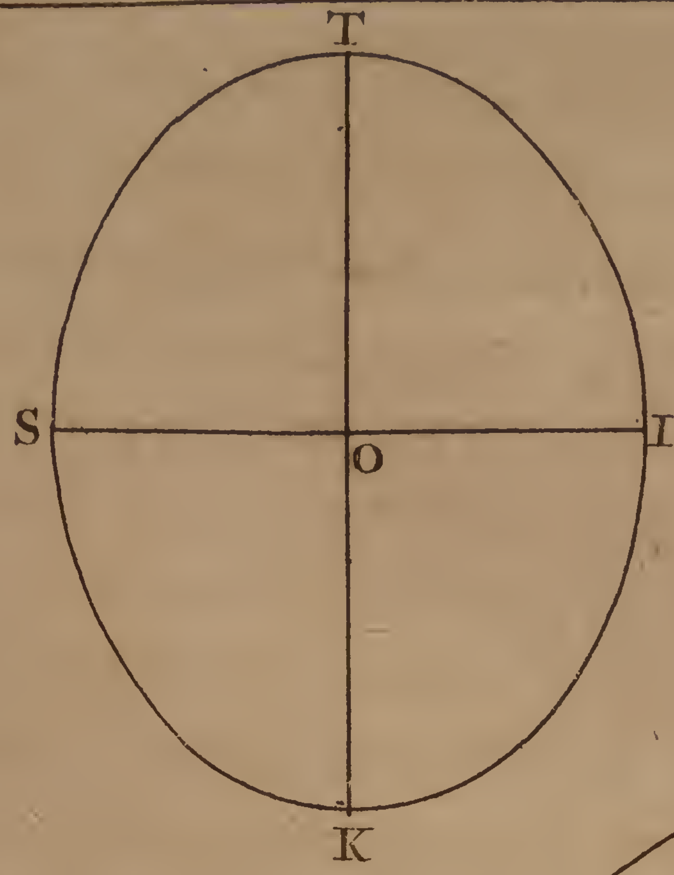
Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ D E, B V; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarithmus hic (qui semper est idem) 0, 36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui spatium D E V B A D designabit, tribus rectis & curva D A B comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum D C est 100000, 00000. Unde porro facile quoque habebitur area portionis D A B.

Sit ex. gr. proportio D E ad B V ea quæ 36 ad 5.

Ab	1, 55630, 25008,	logar°. 36.
auferatur	0, 69897, 00043.	logar^us. 5.
Erit	0, 85733, 24965.	differ. logar^orum.
Et	9, 93314, 92856.	logar^us. differentiæ.
Cui addatur	0, 36221, 56887.	logar^us. semper addendus.
Fit	10, 29536, 49743.	logar^us. spatii D E V B A D.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 197408, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii D E V B A D proxime partium 197408, 10260, qualium partium parallelogrammum D C est 100000, 00000.

PRO-



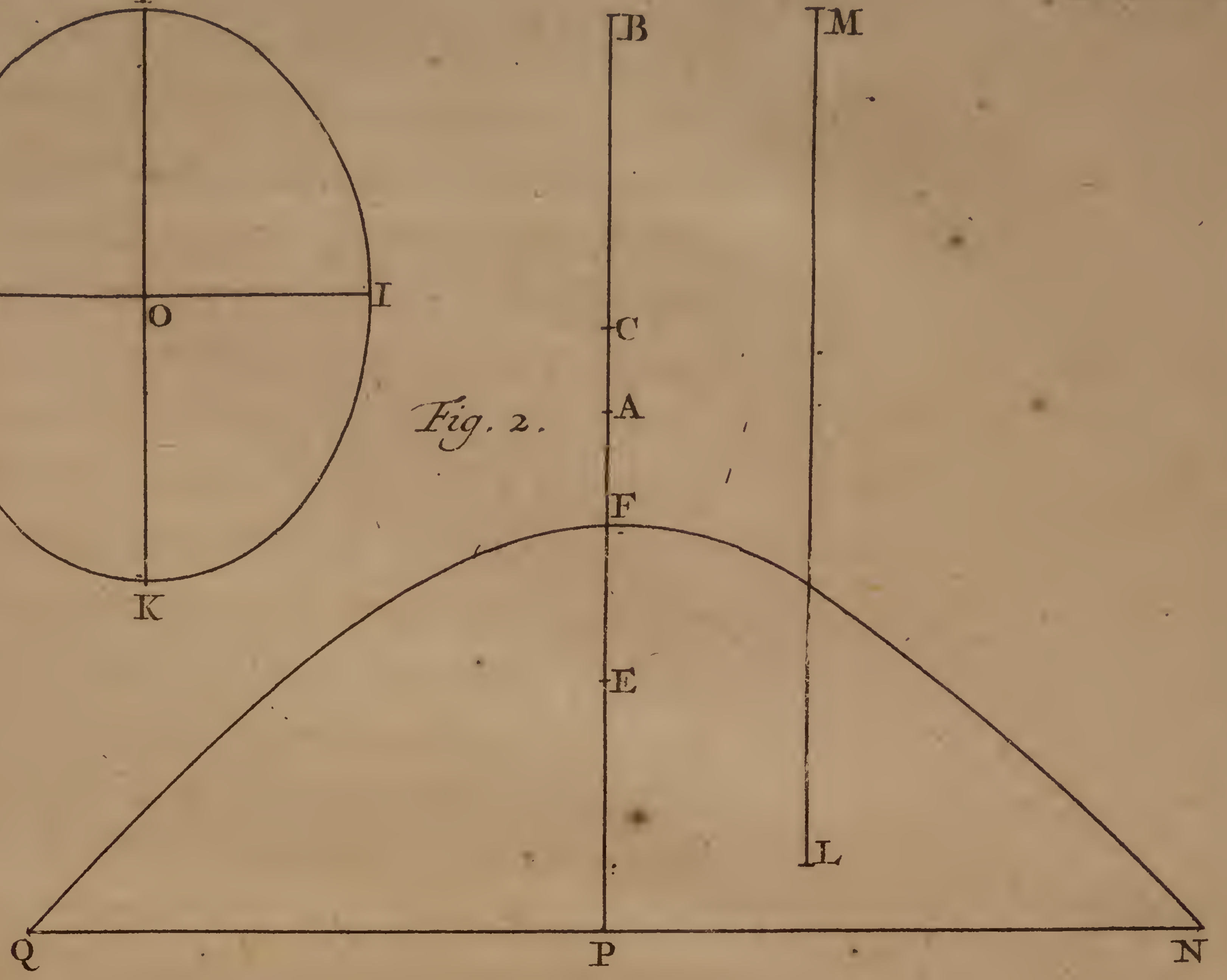


Fig. 2.

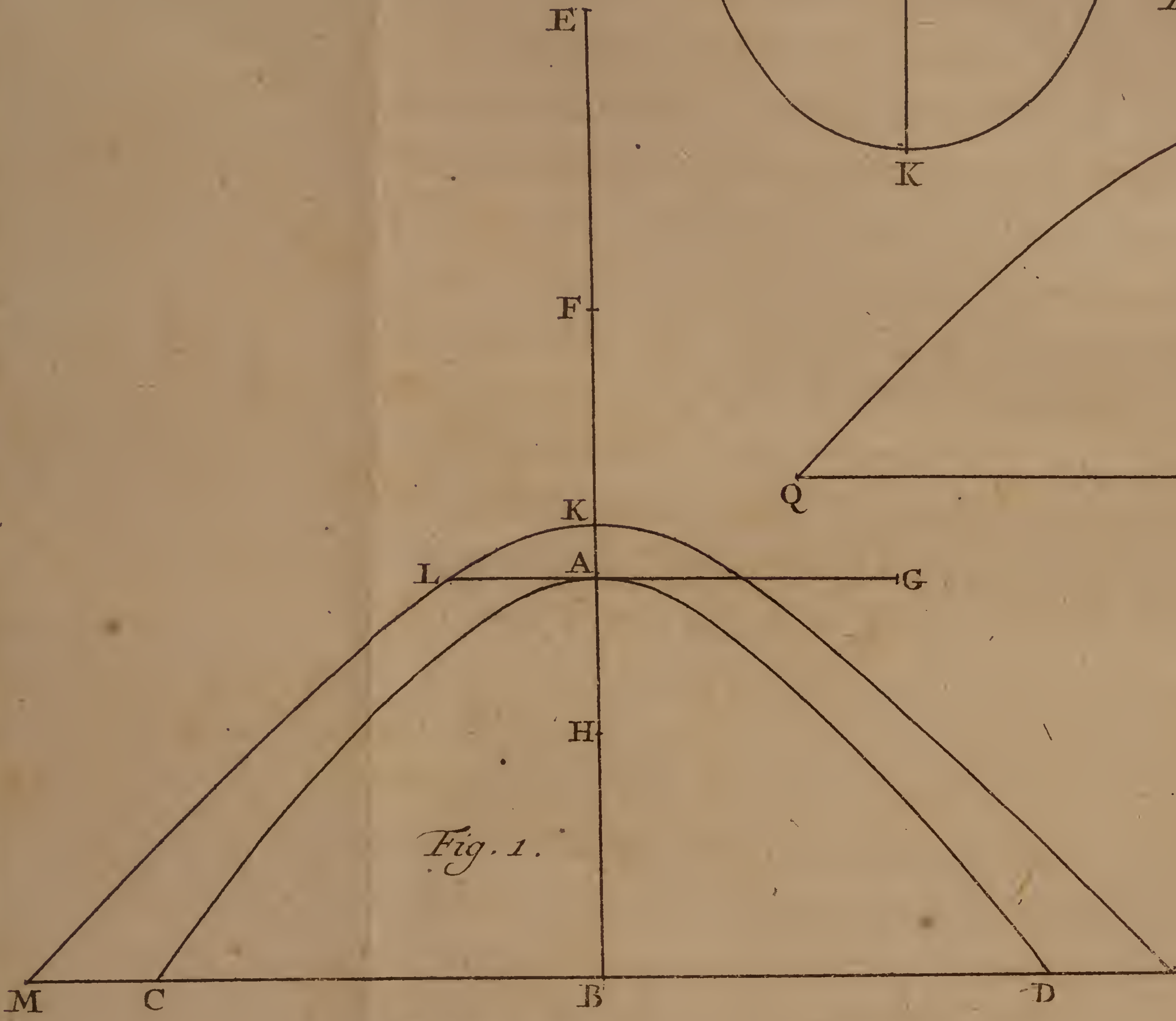


Fig. 1.

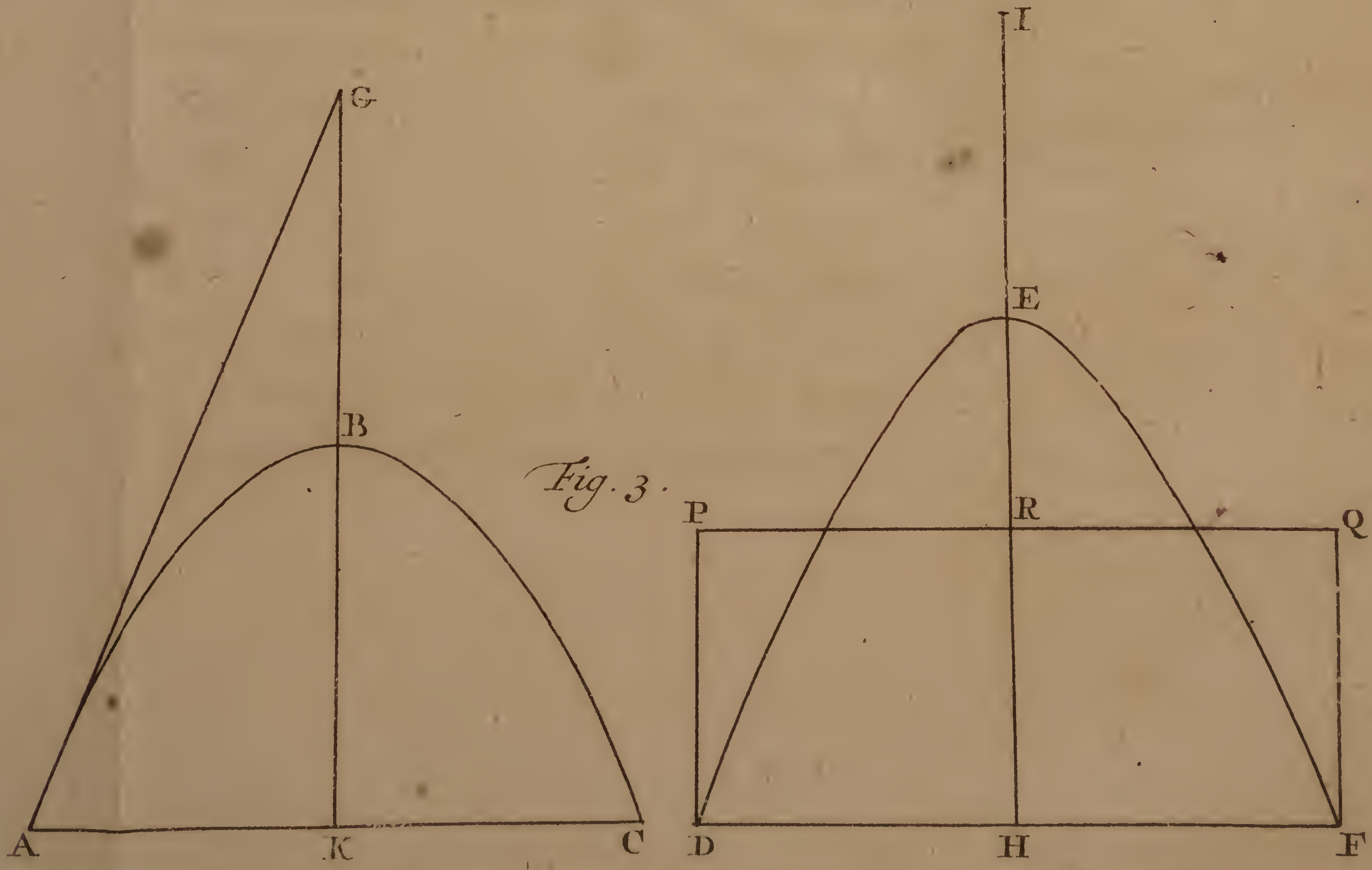


Fig. 3.

PROPOSITIO X.

De linearum curvarum evolutione.

Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbolæ describantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales.

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet A B, cujus axis transversus A C; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipsius A E. Et sumpto in sectione quovis puncto, ut B, applicetur ordinatim ad axem recta B K, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; sitque B G ipsi F B perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur B G usque ad H, ut B H ad H G habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus G F ad F K, & A D ad D E. Tab. XV. Fig. 2. & 3.

Dico curvam E H M, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, esse eam cujus evolutione, unà cum recta E A, describetur sectio A B. Ipsam autem B H tangere curvam in H, & esse toti H E A æqualem. Quamobrem, si ab H B auferatur E A, reliqua recta portioni curvæ H E æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ censentur. Unde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis A C, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio; minimumque habere terminorum, si fuerit A B hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem C A N perpendiculari H N; vocatâque A C, a; C N, x; & N H, y; erit semper cubus ab $xx - yy - aa$ æqualis $27\,xxyyaa$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ E H M puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostendetur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularum linearum evolutione describi; sicut quadrans A B L

De linearum curvarum evolutione.

evolutione lineæ A E H M, quadrans C L evolutione similis huic oppositæ C O M. Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ E H M, tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E, sumpta A E æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur in puncto axis minoris M, sumpta L M æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut A D ad D E, ita L M ad M D.

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit.

Tab. XV. Fig. 4. & 5.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa A B F, & recta K L, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut D E, cujus evolutione ipsa A B F describatur.

Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ D E, necesse est occurrere lineæ A B F, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi A B F ad rectos angulos insistunt, ut B D, F E, tacturas evolutam C D E.

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima; & siquidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D di-

sta-

stabit ab A; intersectio vero rectarum B D, F E, quæ est G, cadet ultra punctum D in recta B D. Nam concurrere ipsas B D, F E necesse est, cum curvæ B F ad partem cavam insistant rectis angulis. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quanto autem punctum F ipsi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, si interstitium B F infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ B H, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F censebitur. Sit B O parallela K L, & in hanc perpendiculares cadant B K, F L: secetque F L rectam B O in P, & sint puncta notata M, N, in quibus rectæ, B D, F E, occurrant ipsi K L. Quia igitur ratio B G ad G M est eadem quæ B O ad M N, data hac dabitur & illa; & quia recta B M datur magnitudine ac positione, dabitur & punctum G in producta B M, sive D in curva C D E, quia G & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio B O ad M N, simpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam investigavimus, invenimusque duplam; in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio B O ad M N componitur ex rationibus B O ad B P, sive N H ad L H, & ex B P sive K L ad M N; patet, si rationes hæ utræque dentur etiam ex iis compositam rationem B O ad M N datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit; ac proinde iis semper curvas adsignari posse, quarum evolutione describantur, quæque ideo ad rectas lineas sint reducibiles.

Ponatur primò parabola esse A B F, cujus vertex A, axis A Q. Cum igitur lineæ B M, F N, sint parabolæ ad angulos rectos; ductæque sint ad axem A Q perpendiculares B K, F L; erunt, ex proprietate parabolæ, singulæ M K, N L dimidio lateri recto æquales; & ablata communi L M, æquales inter se K L, M N. Hinc, quum ratio B G ad G M componatur ex rationibus N H ad H L, & K L ad M N, uti dictum fuit, sitque earum posterior ratio TAB. XVI. Fig. 2.

 æqua-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

æqualitatis; liquet rationem B G ad G M fore eandem quæ N H ad H L; & dividendo, B M ad M G, eandem quæ N L ad L H, sive M K ad K H; nam L H, K H pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem est ratio M K ad K H, dato puncto B; quoniam tam M K, quam K H dantur magnitudine; nam M K æquatur dimidio lateri recto, K H vero duplæ K A. Dataque etiam est positione & magnitudine recta B M. Ergo & M G data erit, adeoque & punctum G, sive D, in curva R D E; quod nempe invenitur producta B M usque in G, ut sit B M ad M G sicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam K A.

Et sic quidem, adsumptis in parabola A B F aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ R D E, simili ratione, invenientur; atque hoc ipso lineam R D E geometricam esse constat, unáque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Ut si inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ C D E ad rectam A Q: ducta in hanc perpendiculari D Q, vocatoque latere recto parabolæ A B F, a; A K, b; A Q, x; Q D, y. Quoniam ratio B M ad M D, hoc est, K M ad M Q, est ea quæ $\frac{1}{2}a$ ad $2b$, estque ipsa K M ∞ $\frac{1}{2}a$, erit & M Q æqualis $2b$. Est autem M A ∞ $\frac{1}{2}a + b$. ergo A Q sive x æqualis $3b + \frac{1}{2}a$. Unde $b \infty \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Porro quoniam, sicut quadratum M K, hoc est, $\frac{1}{4}aa$ ad quadratum K B, hoc est, ab, ita qu. M Q, hoc est, $4bb$ ad qu. Q D; erit qu. Q D, sive $yy \infty \frac{16b^3}{a}$. Ubi, si in locum b substituatur $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$, quod illi æquale inventum est, fiet $yy \infty 16$. cub. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ divisis per a. Ac proinde $\frac{27}{16}ayy \infty$ cubo ab $x - \frac{1}{2}a$. Accipiatur A R in axe parabolæ $\infty \frac{1}{2}a$; eritque R Q ∞ $x - \frac{1}{2}a$. Curvam igitur C D ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ R Q æquetur parallelepipedo, cujus basis qu. Q D, altitudo $\frac{27}{16}a$; ac proinde ipsam paraboloidem esse, cujus evolutione describi parabolam A B supra ostendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ A B. tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{16}{27}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

Quo-

Quomodo porro ratio O B ad B P, sive N H ad H L, non tantum cum A B F parabola est, sed etiam alia quælibet curva geometrica, semper inveniri possit manifestum est. Quoniam tantum recta F H ducenda est, quæ curvam in adsumpto puncto F tangat, & F N ipsi F H perpendicularis: unde N H & H L datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

TAB. XV. Fig 4. & 5.

At non æque liquet quo pacto ratio K L ad M N innotescat, quam tamen semper quoque reperiri posse sic osten-demus.

Sint rectæ K T, L V, perpendiculares super K L, sitque K T æqualis K M, & L V æqualis L N, & ducatur V X parallela L N, quæ occurrat ipsi K T in X. Quoniam ergo semper eadem est differentia duarum L K, N M, quæ duarum L N, K M, hoc est, quæ duarum L V, K T; est autem differentiæ ipsarum L V, K T æqualis X T, & X V ipsi L K; erit proinde N M æqualis duabus simul V X, X T, vel ei quo V X ipsam X T superat. Atque adeo, si data fuerit ratio V X ad X T, data quoque erit ratio V X ad utramque simul V X, X T, vel ad excessum V X supra X T, hoc est, data erit ratio V X sive L K ad N M.

Sciendum est autem, quoniam K T ipsi K M, & L V ipsi L N, æquales sumptæ sunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox ostendetur. Et siquidem sit linea recta; ut contingit si A B F coni sectio fuerit, & K L axis ejus; constat rationem V X ad X T datam fore, data positione ipsius lineæ V T, quæ locus est puuctorum V, T; semperque eandem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum K L.

At si locus alia linea curva fuerit, diversa erit ratio V X ad X T, prout majus minusve fuerit intervallum K L. Inquirendum est autem quænam futura sit ista ratio, cum K L infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem posuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum est; unde recta V T, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa T Y; potest enim duci quoniam

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

niam curva, ad quam sunt puncta T, V, geometrica est. Ratio igitur Y K ad K T data erit, adeoque & V X ad X T. ex qua etiam rationem L K ad N M dari ostendimus.

Quaenam vero sit linea ad quam sunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta K L, & vocando S K, *x*; K T, *y*. Nam quia data est curva A B F, eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineae K M, per methodum tangentium à Cartesio traditam, quae ipsi K T, sive *y* aequabitur, & ex ea aequatione; natura curvae T V innotescet, ad quam deinde tangens ducenda est. Sed clariora omnia fient sequenti exemplo.

TAB. XVI. Fig. 3.

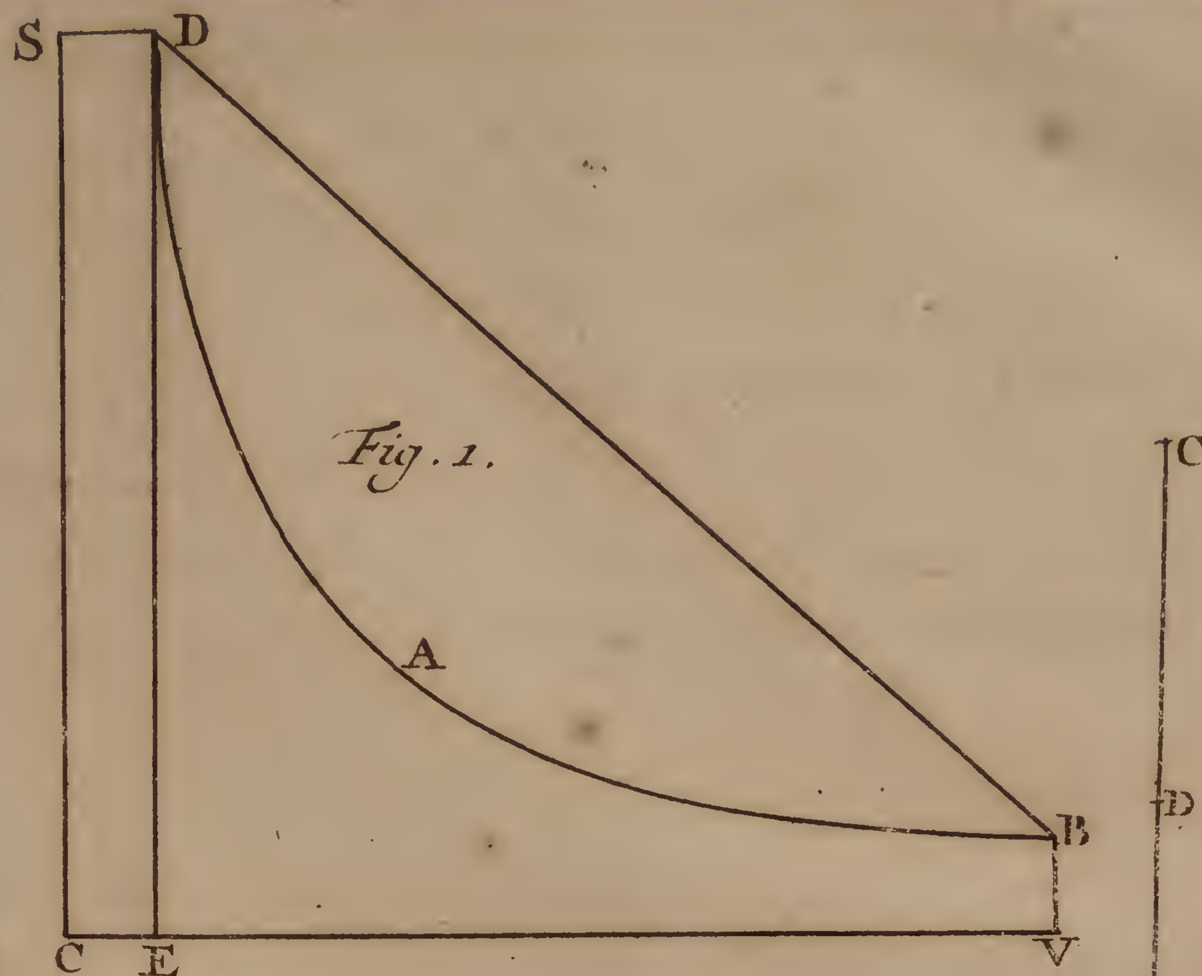
Sit A B F paraboloides illa, cui superius rectam aequalem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam S K, sint inter se sicut quadrata ex ipsa S K abscissarum. Et oporteat invenire curvam C D E cujus evolutione paraboloides S B F describatur.

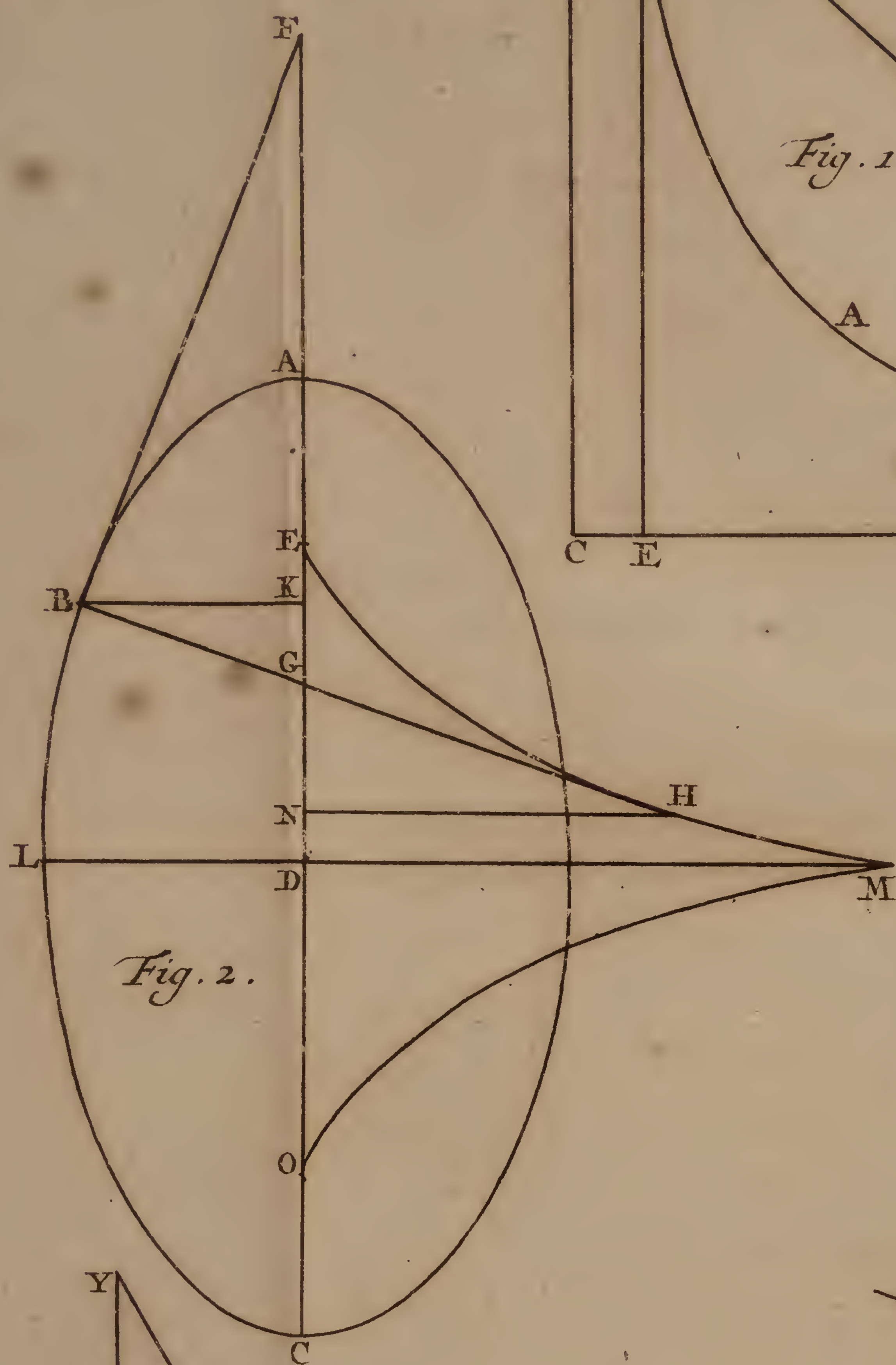
Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci scimus, sumpta S H aequali $\frac{1}{2}$ S K. Cui tangenti cum B M ad angulos rectos insistat, dantur jam lineae M H, H K, ac proinde earum inter se ratio, quae est eadem quae O B ad B P.

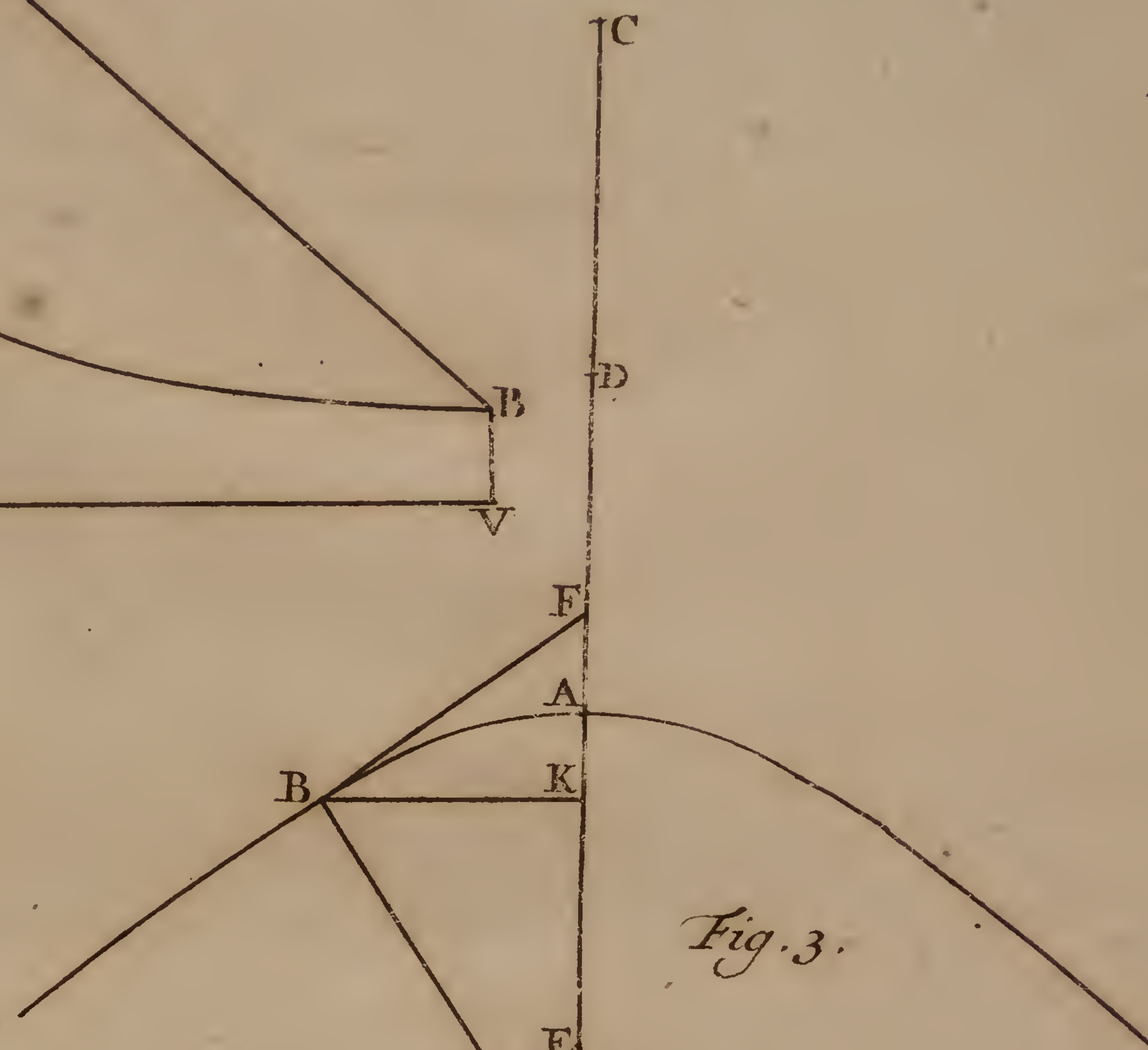
Ut autem ratio B P, sive K L ad M N innotescat, ponantur ad K L perpendiculares rectae K T, L V, aequales singulis K M, L N, sitque V X parallela L K. Jam quia ex duabus simul K L, L N, auferendo K M, relinquitur M N *; hoc est, auferendo ex duabus X V, V L, sive X V,

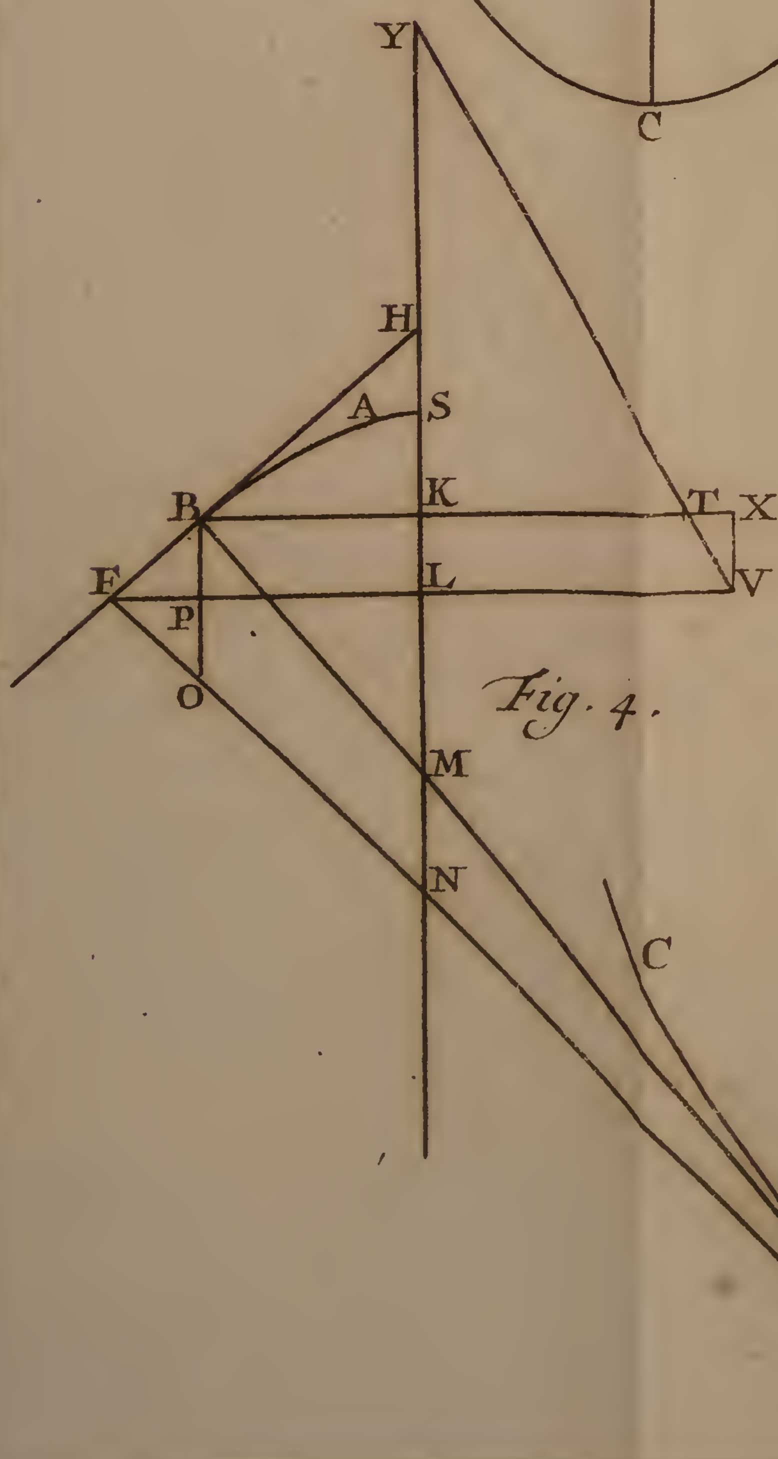
* *In Exemplari suo ad marginem scripsit Auctor.* supponitur hic rectam L N majorem esse quam K M, quod melius fuerat antea probari, etsi verum est. *Demonstratio autem haud difficilis est, sit abscissa* S K ∞ x; *perpendicularis* K B ∞ u; *latus rectum paraboloidis* ∞ a. *Quia* S H $\infty \frac{1}{2}$ SK, *est* H K $\infty \frac{3}{2}$SK ($\frac{3}{2}$x). *Propter angulum rectum* H B M, *triangula rectangula* H B K, K B M *similia sunt, &* H K ($\frac{3}{2}$x), K B (u), K M, *sunt in continua proportione; ergo* K M $\infty \frac{2uu}{3x}$, *cujus quadratum est* $\frac{4u^4}{9xx} \infty \frac{4au^4}{9axx}$; *sed ut notavit auctor ex natura Paraboloidis* A B F; $u^3 \infty axx$; *ergo quadratum lineae* K M $\infty \frac{4au^4}{9axx} \infty \frac{4au^4}{9u^3} \infty \frac{4}{9}au$ *unde sequitur ipsam* K M, *augeri si crescat* B K (u). *Cum autem* L F *excedat* B K, L N *superabit* K M, quod demonstrandum erat.

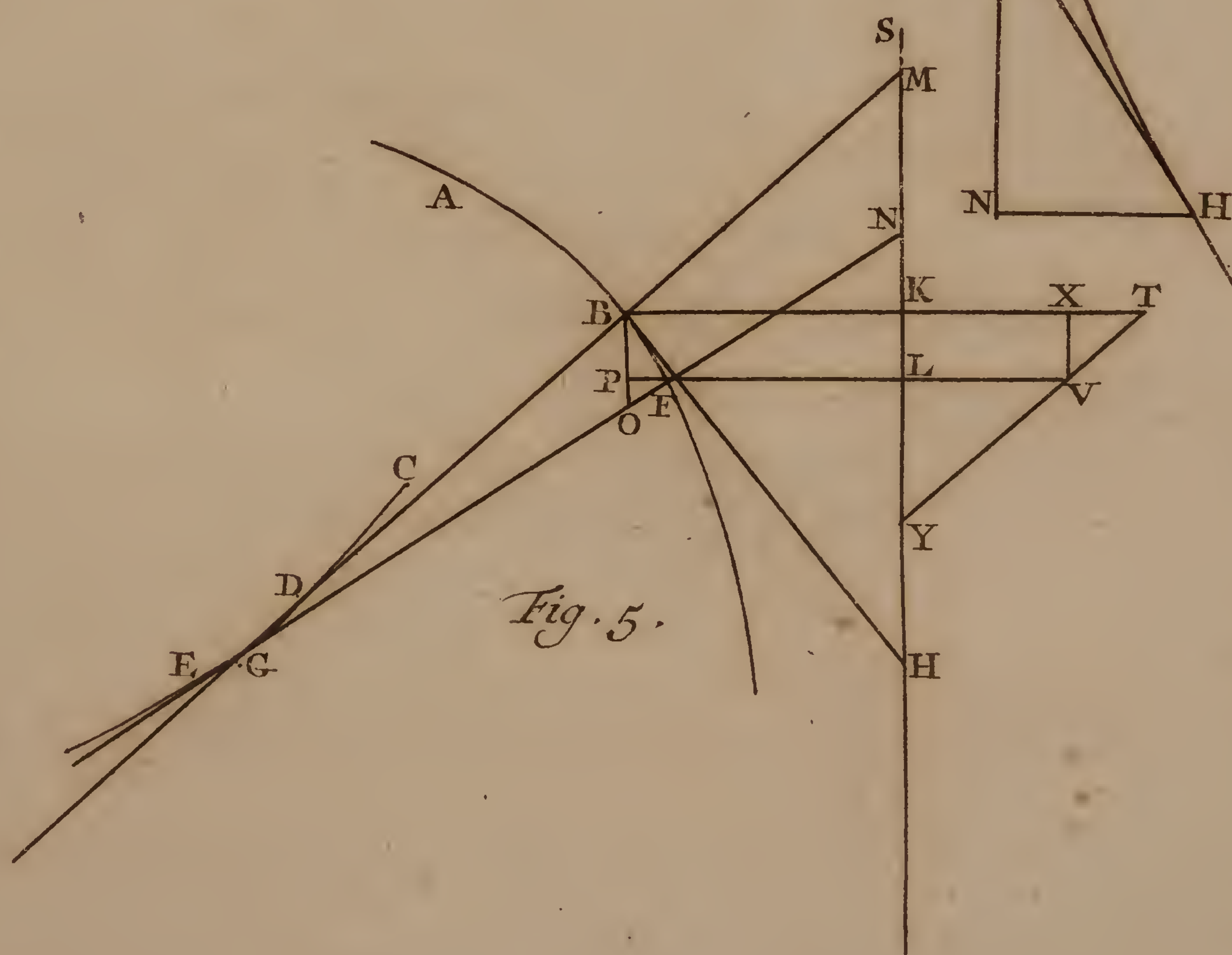
TAB. XV.


S
D
Fig. 1.
A
B
C
E
V


F
A
E
B
K
G
H
N
L
D
M
Fig. 2.
O
C


C
D
F
A
B
K
Fig. 3.
E
G
N
H


Y
H
A
S
B
K
T
X
F
L
V
P
O
Fig. 4.
M
N
C
D
G
E


S
M
A
N
B
K
X
T
P
L
V
O
F
C
Y
D
Fig. 5.
E
G
H

X V, X K, ipsam K T; hinc autem relinqui apparet V X & X T: erunt igitur hæ duæ V X, X T ipsi M N æquales, ac proinde ratio K L ad M N eadem quæ V X ad duas simul V X, X T. Ut autem hæc ratio innotescat cum intervallum K L est minimum; oportet secundum prædicta inquirere quis sit locus, sive linea ad quam sunt puncta T, V. Quod ut fiat sit latus rectum paraboloidis A B F ∞ a; S K ∞ x; K T ∞ y.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quia igitur proportionales sunt K H, K B, K M, estque H K ∞ $\frac{1}{2} x$: K B ex natura paraboloidis æqualis R. cub. $a x x$: fiet K M, hoc est K T ∞ $\frac{2}{3}$ R. cub. $a a x$ ∞ y, ac proinde $\frac{8}{27} a a x$ ∞ y^3. Unde patet locum punctorum T, V, esse paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, sumptâ S Y duplâ ipsius S K, junctâque Y T. Et jam quidem ratio V X ad duas simul V X, X T, quam diximus eandem esse ac K L ad M N, erit ea quæ Y K ad utramque simul Y K, K T. Hæc autem ratio data est, ergo & ratio K L ad M N. Sed & rationem O B ad P B datam esse ostensum est. Ergo, cum ex duabus hisce componatur ratio B D ad D M, ut supra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio B M ad M D; adeoque & punctum D in curva D E.

Ad constructionem autem brevissimam hoc pacto hic perveniemus. K T sive K M dicta fuit y. Itaque M H erit $y + \frac{1}{2} x$. Et M H ad H K, sive O B ad B P, ut $y + \frac{1}{2} x$ ad $\frac{1}{2} x$. sive, sumptis omnium duplis, ut $2 y + 3 x$ ad $3 x$. Deinde quia Y K ∞ $3 x$, erit Y K ad Y K + K T, sive per prædicta, K L ad M N, ut $3 x$ ad $3 x + y$. Atqui ex rationibus O B ad B P, & K L ad M N, componi diximus rationem B D ad D M. Ergo ratio B D ad D M erit composita ex rationibus $2 y + 3 x$ ad $3 x$, & $3 x$ ad $3 x + y$; ideoque erit ea quæ $2 y + 3 x$ ad $3 x + y$. & dividendo, ratio B M ad M D, eadem quæ y ad $3 x + y$.

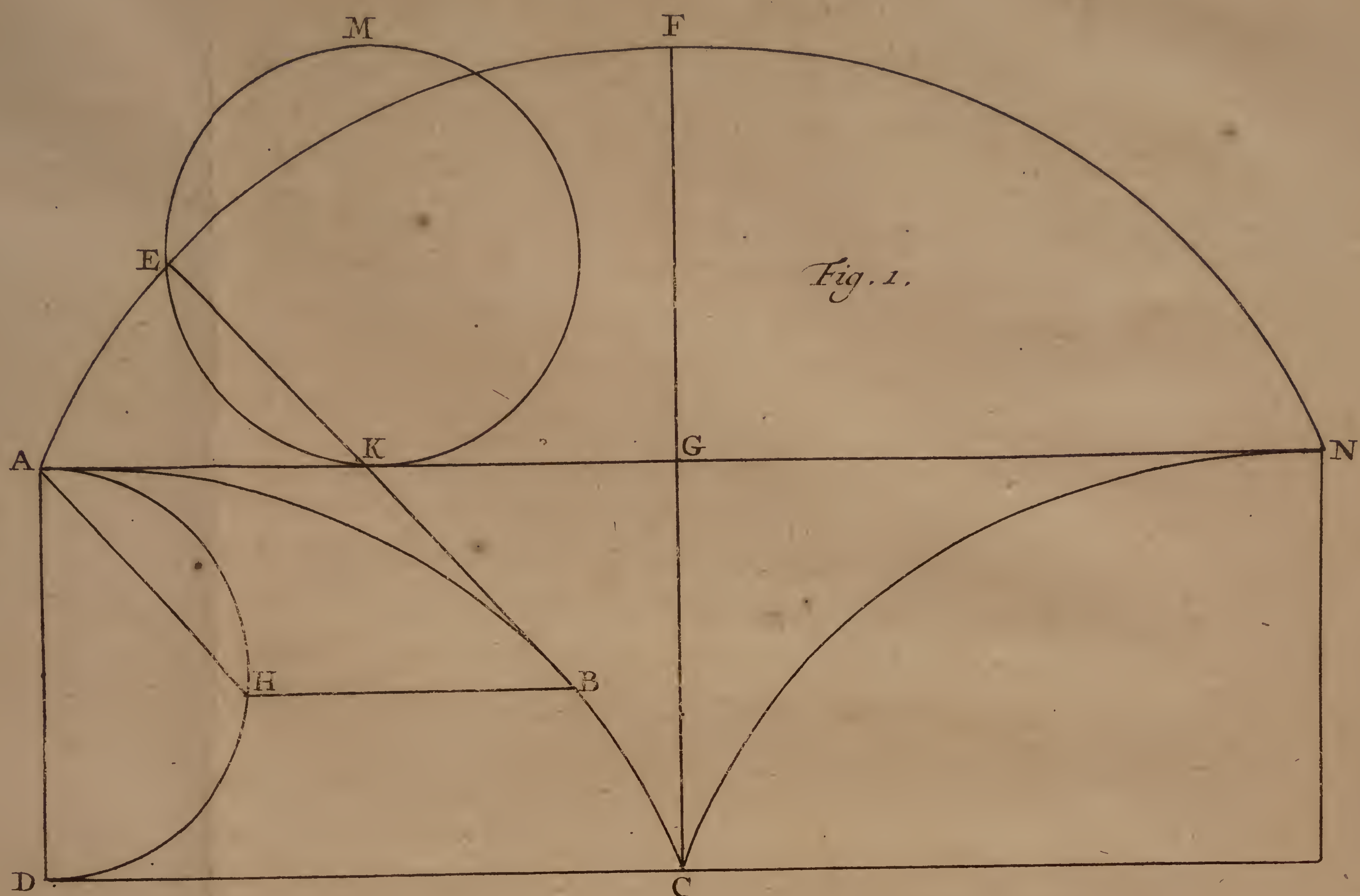
Sit S Z perpendicularis ad S K, eique occurrat M B producta in Z. Quia ergo ratio B M ad M D inventa est ea quæ y ad $y + 3 x$, hoc est quæ M K ad M K + 3 K S. Sicut au-

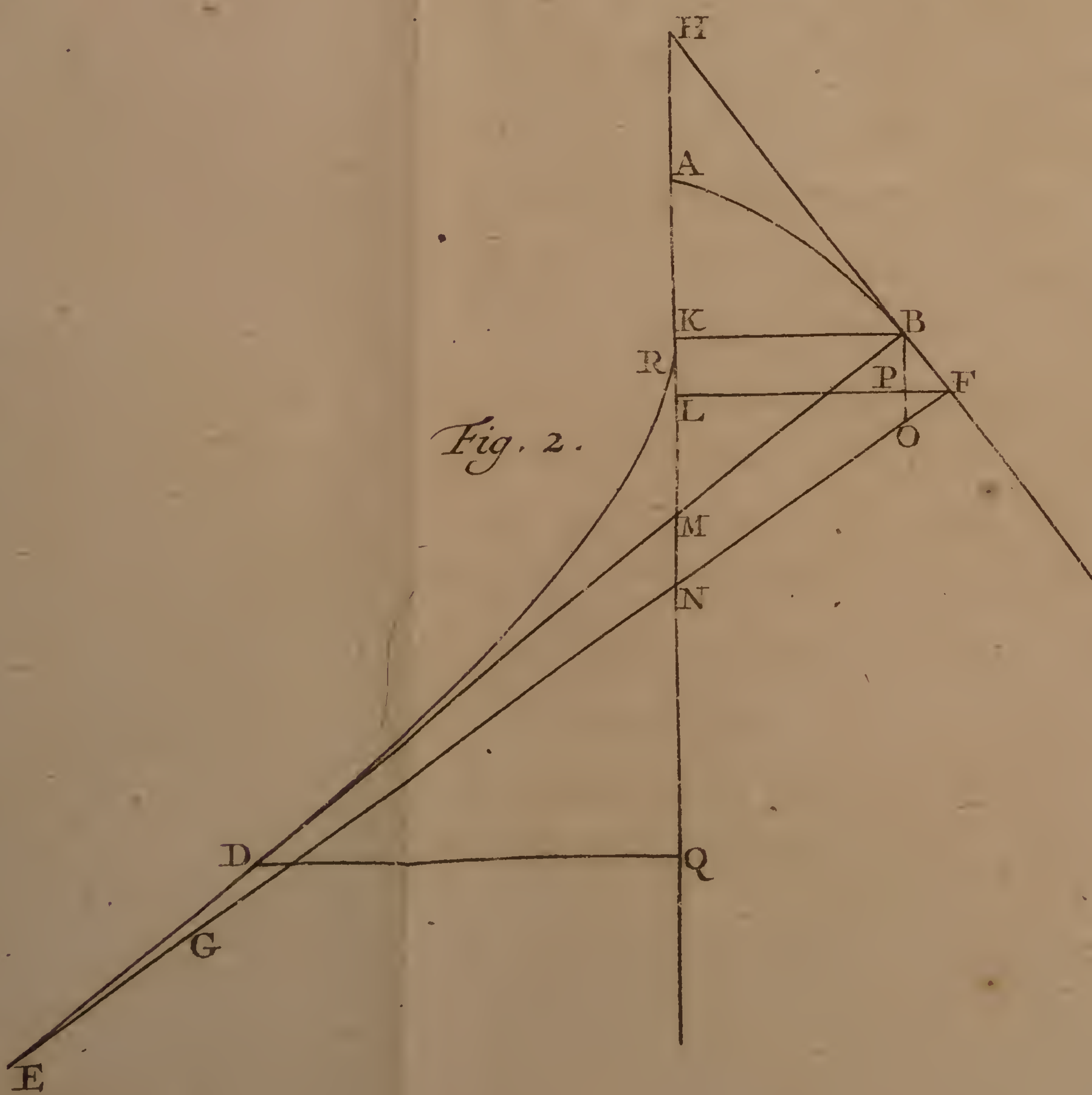
DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

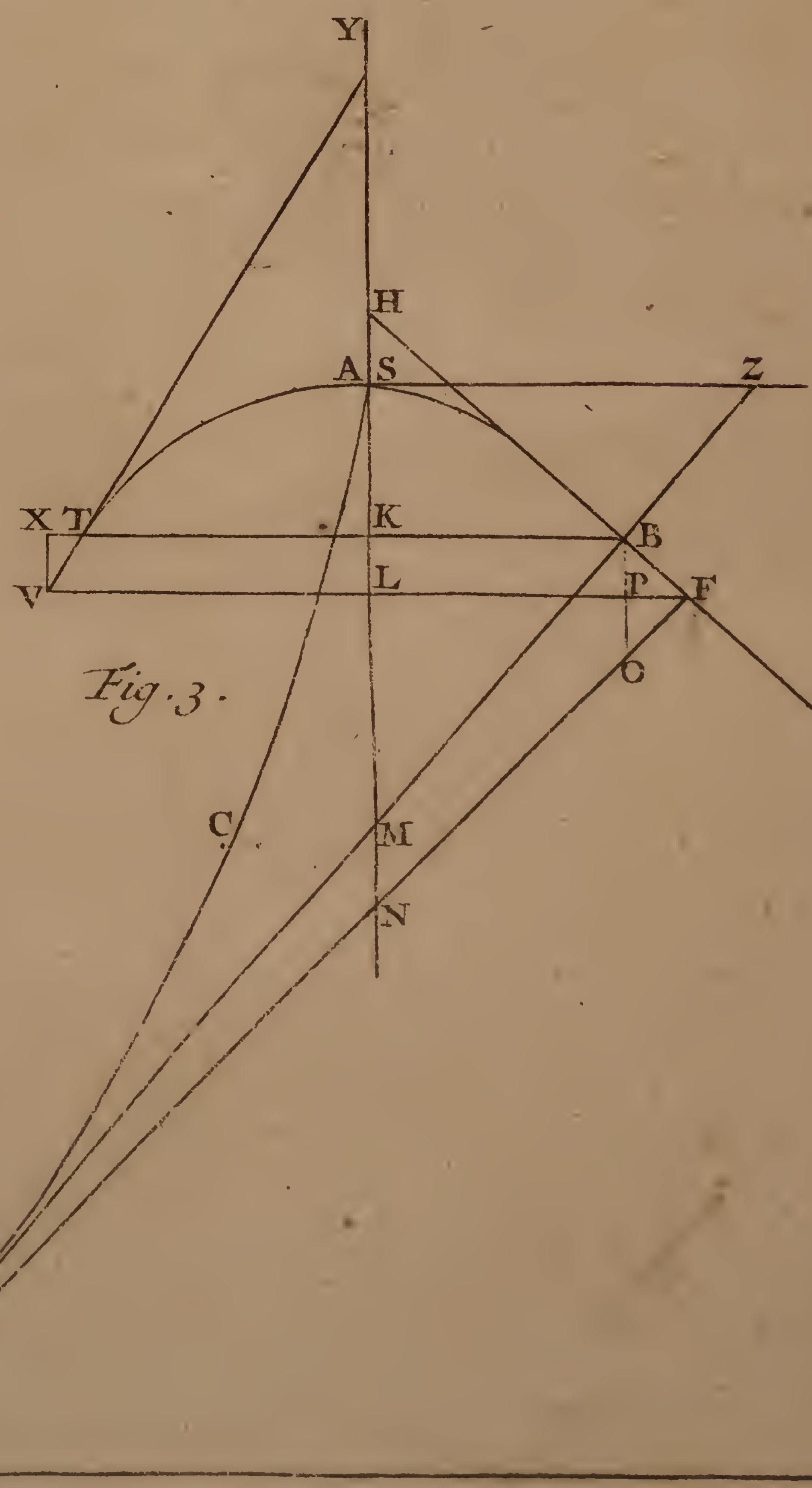
tem M K ad M K + 3 K S, ita M B ad M B + 3 B Z: erit proinde M B ad M D ut M B ad M B + 3 B Z. Unde liquet M D æqualem ſumendam ipſi M B + 3 B Z. Atque ita quotlibet puncta curvæ C D E invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut D S, rectæ D B, quæ paraboloidi S A B ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Conſtat autem geometricam eſſe, & ſi velimus, poſſumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipſius ad puncta axis S K.

TAB. XVII. Fig. 1.

Simili modo autem, ſi inquiramus in paraboloide illa ſive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut portiones axis abſciſſæ, inveniemus curvam cujus evolutione deſcribitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori conſtructione per puncta determinari. Nam ſi fuerit illa S A B; axis S M; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus ſit ejuſmodi, ut ductâ S Z, quæ ſecet S M ad angulos rectos, ea portiones ſimiles curvæ habeat ad partes oppoſitas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide ſumptum, recta B D, quæ curvam ad angulos rectos ſecet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero S Z in Z. Deinde ſumatur B D æqualis dimidiæ B M, unà cum ſeſquialtera B Z. Eritque D unum è punctis curvæ quæſitæ R D vel R I, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam R A, deſcribetur paraboloides S A B. Sunt autem hic, quod notatu dignum eſt, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipſius A R D, in infinitum porro continuatæ, deſcribatur paraboloidis pars infinita A B F; evolutione autem totius A R I, ſimiliter in infinitum extenſæ, tantum particula A S. Punctum autem A definitur, ſumptâ S P quæ ſit ad latus rectum paraboloidis, ſicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus eſt ex 45) applicatâque ordinatim P A. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum R D, R I, invenitur ſicut cætera omnia harum


M
F
E
Fig. 1.
A
K
G
N
H
B
D
C


H
A
K
B
R
P
F
L
O
Fig. 2.
M
N
D
Q
G
E


Y
H
A S
Z
X T
K
B
V
L
P
F
O
Fig. 3.
C
M
N
D
G
E

rum curvarum, hoc eſt, ſicut punctum D modo inventum fuit. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva S A B, ſemper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipſa deſcribatur, quæque propterea rectæ adæquari poſſit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo conſtructionem univerſalem ſequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} a\,x \infty y^2 \\ a^2 x \infty y^3 \\ a\,x^2 \infty y^3 \\ a\,x^3 \infty y^4 \\ a^3 x \infty y^4 \end{array} \right. \text{Erit} \left\{ \begin{array}{l} BM + 2\,BZ \\ \frac{1}{2} BM + \frac{3}{2} BZ \\ 2\,BM + 3\,BZ \\ 3\,BM + 4\,BZ \\ \frac{1}{3} BM + \frac{4}{3} BZ \end{array} \right\} \infty BD.$$

Sit S B parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta S K vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipſa quidem S K ſemper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis S Z. Ponendo jam S K ∞ *x*; B K ∞ *y*, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis eſt ipſi S K; & latere recto curvæ ∞ *a*; prior pars tabellæ, quæ ad ſiniſtram eſt, naturam ſingularum paraboloidum ſingulis æquationibus explicat. Quibus reſpondent in parte dextra quantitates lineæ B D, quæ ſi curvæ S B inſiſtat ad angulos rectos, exhibitura ſit punctum D in curva quæſita C D. Exempli gratia, ſi S B eſt parabola quæ ex coni ſectione fit, ei ſcimus convenire æquationem tabellæ primam, $a\,x \infty y^2$; cui reſpondet ab altera parte B M + 2 B Z ∞ B D. Unde longitudo lineæ B D cognoſcitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ C D. Quam quidem, hoc caſu, paraboloidem eſſe ſupra demonſtratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia eſt hujus tabellæ. TAB. XVII. Fig. 2.

Conſtruitur autem tabella hoc pacto, ut B M ſumatur multiplex ſecundum numerum qui eſt exponens poteſtatis *x* in æquatione; B Z vero, multiplex ſecundum exponentem poteſtatis *y*; ex his autem utriſque compoſitæ accipiatur pars denominata ab exponente poteſtatis *a*.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Præter hasce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non absimili constructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Assimilantur autem hyperbolis, eo quod asymptotos suas habent, sed tantum angulum rectum constituentes. Et harum primam quidem statuimus hyperbolam ipsam, quæ est è coni sectione.

TAB. XVII. Fig. 3.

Reliquarum vero naturam ut explicemus; sunto P S, S K, asymptoti curvæ A B, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur B K parallela P S, sitque S K ∞ x; K B ∞ y. Si igitur hyperbola sit A B, scimus rectangulum linearum S K, K B, hoc est, rectangulum $x\,y$ semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur $a\,a$.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato lineæ S K, in altitudinem K B ductum, hoc est, solidum $x\,x\,y$, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam D C, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} x\,y \infty a^2 \\ x^2 y \infty a^3 \\ x\,y^2 \infty a^3 \\ x^3 y \infty a^4 \\ x\,y^3 \infty a^4 \end{array} \right. \text{Erit} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}BM + \tfrac{1}{2}BZ \\ \tfrac{2}{3}BM + \tfrac{1}{3}BZ \\ \tfrac{1}{3}BM + \tfrac{2}{3}BZ \\ \tfrac{3}{4}BM + \tfrac{1}{4}BZ \\ \tfrac{1}{4}BM + \tfrac{3}{4}BZ \end{array} \right\} \infty BD.$$

Recta D B M Z curvam A B, ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis S K, S P, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit A B, cujus æquatio est $x\,y \infty a^2$, sumetur B D ∞ $\tfrac{1}{2}$ B M + $\tfrac{1}{2}$ B Z, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva D C quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris.

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum

rum quæ ex paraboloidibus nascuntur constructionem, ducendæ sunt lineæ D B Z, quæ ad datum punctum B secent curvas A B, sive ipsarum tangentes B H, ad angulos rectos; dicemus in universum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, considerare oportet quæ sint exponentes potestatum x & y, & facere ut, sicut exponens potestatis x ad exponentem potestatis y, ita sit S K ad K H. Juncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio est $x y^2 \propto a^3$: quia exponens potestatis x est 1, potestatis autem y exponens 2; oportet esse ut 1 ad 2 ita S K ad K H. Horum autem demonstrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non solum paraboloidum istarum, sed & spatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & asymptotos interjectorum, plana solidaque dimensi sunt. Quod quidem & nos, facili atque universali methodo, expedire possemus, ex sola tangentium proprietate sumpta demonstratione. Sed illa non sunt hujus loci. De lineārum curvarum evolutione.



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUARTA.

De centro Oscillationis.

Centrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectori-

 bus,

bus, tam ab angulo quam à medio arcu suspensis, atque in latus agitatis, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiatur ea longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum pollicebatur. Sed a nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam patesceret; velut à limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque illis difficiliora reperi, & viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corporibus certa ratione centrum illud investigare liceret. Unde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæsita fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem; qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DE-

DEFINITIONES.

De centro oscillationis.

I.

Pendulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura quælibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes,

nes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.

VI.

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum.

VII.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

XII.

Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineæve planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I.

SI pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.

Altitudo autem in his secundum distantiam à plano horizontali consideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, secundum rectas ipsi perpendiculares, descendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expresse, vel à legentibus supplendum est, cum absque eo centri gravitatis consideratio locum non habeat.

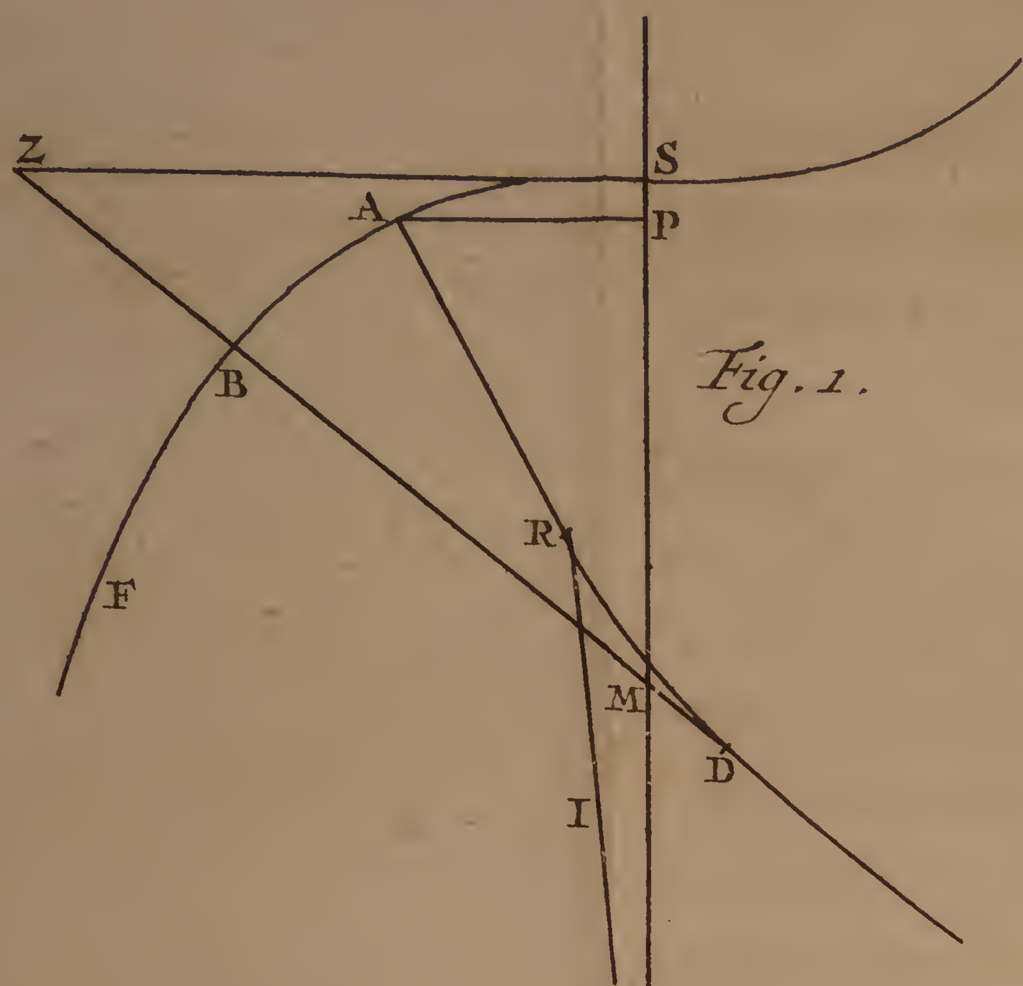
Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe sursum non ferri. Nam primo, si unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis suæ altius ascendere non posse extra dubium est. ascendere autem tunc intelligitur scilicet, cum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis, concedi necesse est, quoniam nihil vetat ipsa tanquam unum aliquod considerari.

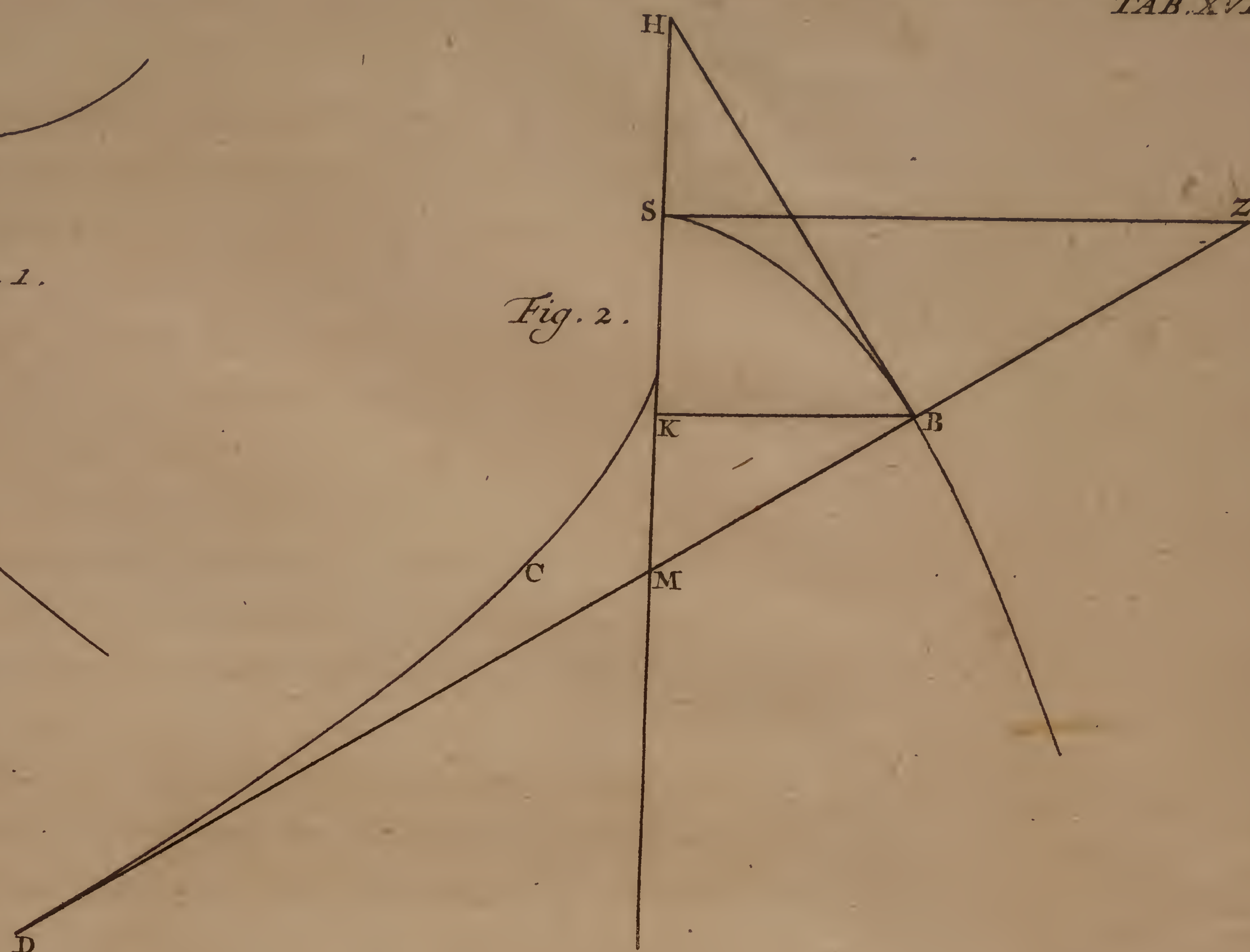
Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro aſcendere poterit.

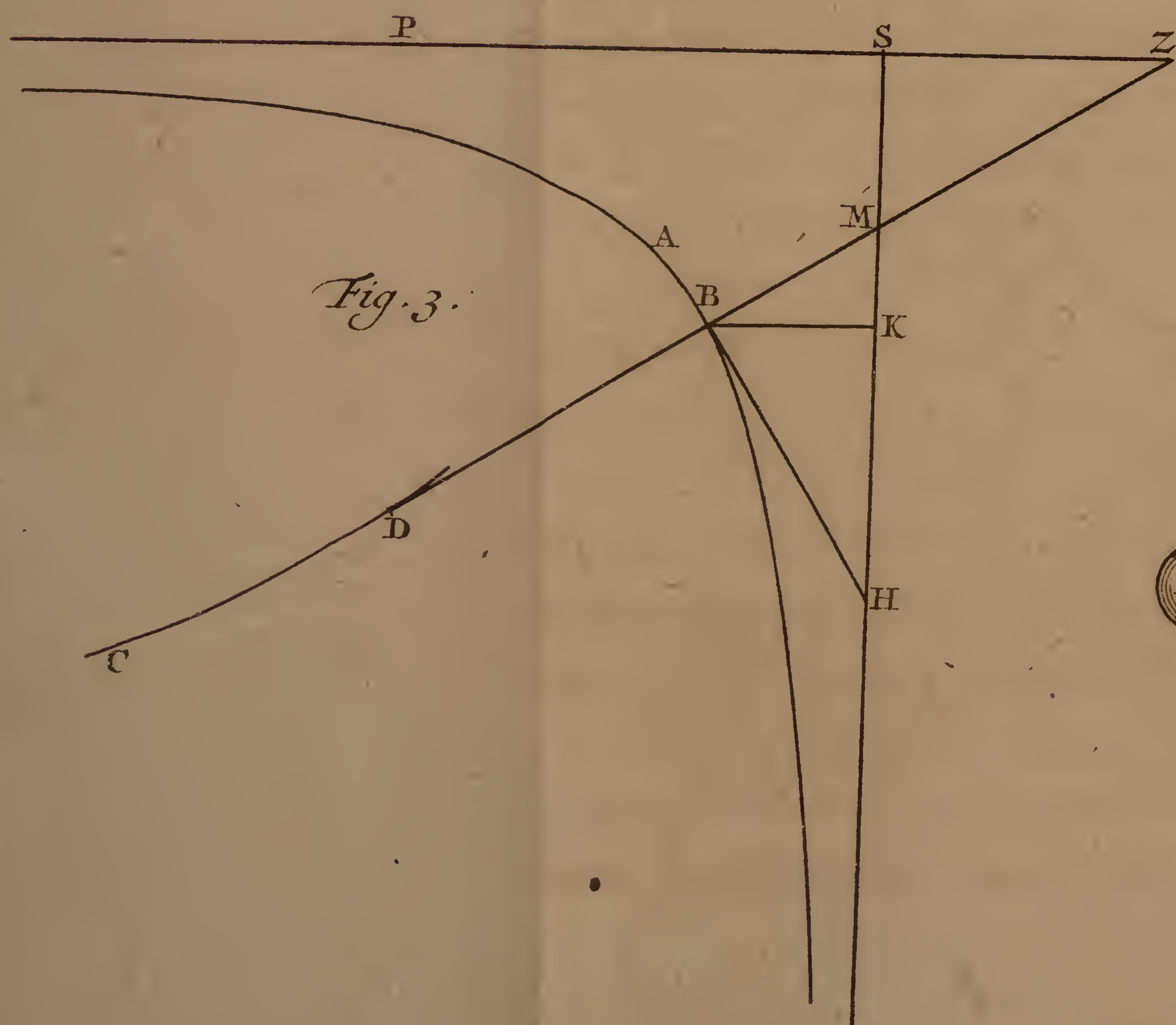
Quod ſi jam pondera quotlibet non inter ſe connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis eſſe ſcimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compoſitæ altitudinem cenſeri debere; ſiquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci poſſunt, nullâ aliâ accerſita potentiâ quam quæ ipſis ponderibus ineſt, ſed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus eſt. Quare, ſicut fieri non poteſt ut pondera quædam, in plano eodem horizontali poſita, ſupra illud planum, vi gravitatis ſuæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque diſpoſitorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum tranſiens, perduci poſſe, ſic oſtendetur.

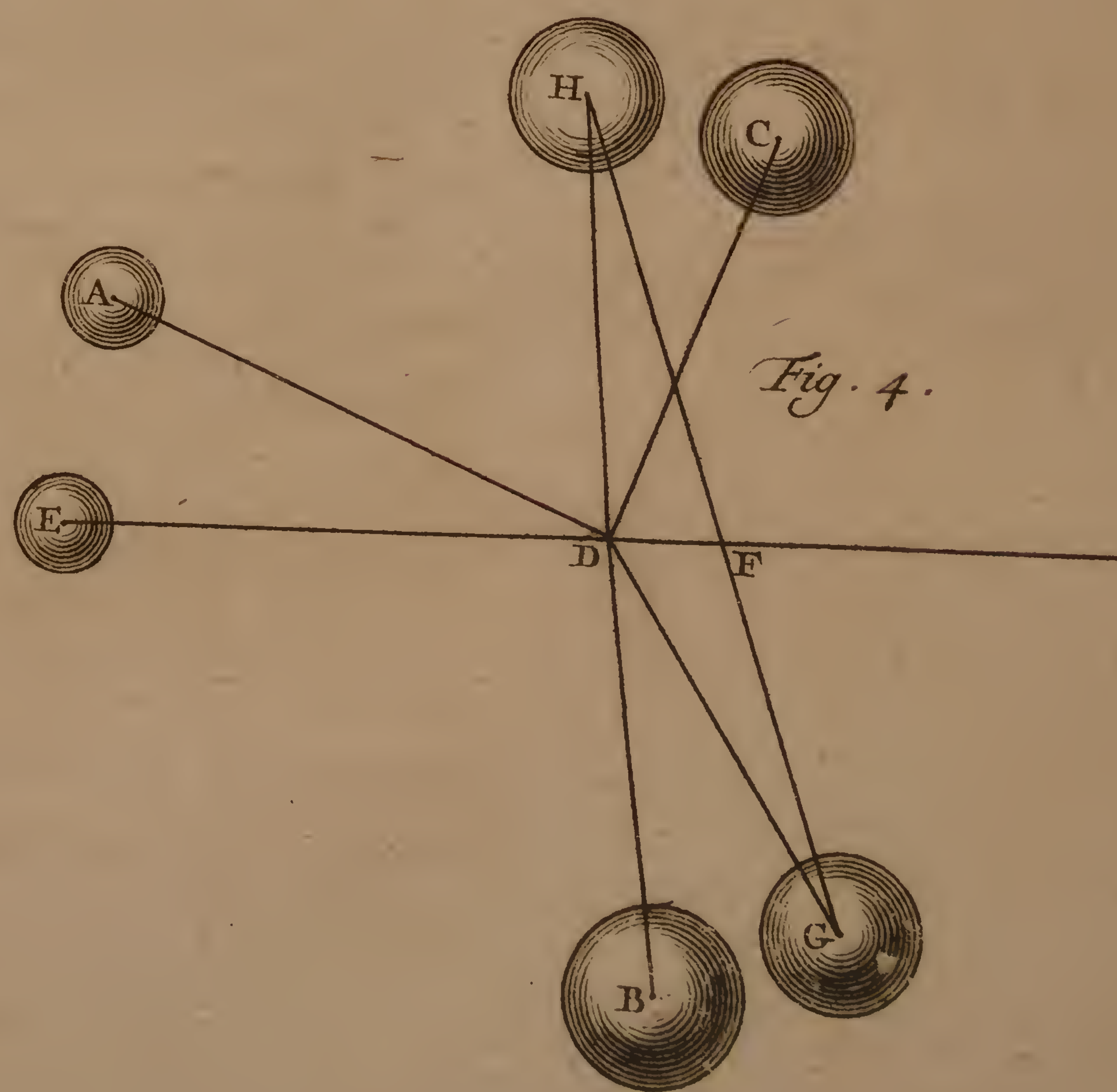
TAB. XVII. Fig. 4. Sint pondera A, B, C, poſitione data, quorum commune gravitatis centrum ſit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus ſectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera ſibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A ſit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rurſus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ ſecet planum E F in F; ubi neceſſario quoque erit centrum gravitatis binorum iſtorum ponderum connexorum, cum trium, in E, G, H, poſitorum, centrum gravitatis ſit D, & ejus quod eſt in E, centrum gravitatis ſit quoque in plano E D F. Moventur igitur rurſus pondera H, G, ſuper puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac ſimul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipſam ſui centri gravitatis D altitudinem, ſuo


Z
S
A
P
Fig. 1.
B
R
F
M
D
I


H
S
Z
Fig. 2.
K
B
C
M
D


P
S
Z
M
A
Fig. 3.
B
K
D
H
C


H
C
A
Fig. 4.
E
D
F
G
B

suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eademque de quotcunque aliis est demonstratio. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sanè, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam possibilem esse.

II.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.

De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia; siquidem, quæcunque fuerit penduli figura, æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

P*Onderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singulæ in sua pondera ductæ, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.*

Sint pondera A, B, C, sita ad eandem partem plani, TAB. XVIII. Fig. 1. cu-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

cujus sectio recta D F, inque ipsum à singulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico summam productorum, quæ fiunt à singulis ponderibus in suas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.

Intelligantur enim perpendiculares, à singulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani D F, sintque singulæ D K, E L, F M, ipsi H G æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C, æquilibrium faciant ad intersectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, sicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, sive G H, ductæ in K. Similiter E B in B æquabitur E L, sive G H, in L; & F C in C æquabitur F M, sive G H, in M. Ergo summa productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur summæ productorum ex G H in omnes K, L, M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipsis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipsorum gravitatis G suspensis, æquiponderabunt. Unde, cum distantia G H æqualis sit singulis D K, E L, F M, necesse est magnitudines A, B, C, simul sumptas, æquari ipsis K, L, M. Itaque & summa productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonstrandum.

Etsi vero in demonstratione positæ fuerint rectæ A K, B L, C M, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, si omnia simul in alium quemlibet situm transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes sint eædem quæ prius. Quare constat propositum.

PRO-

PROPOSITIO II.

De centro oscillationis. TAB. XVIII. Fig. 1.

POsitis quæ prius, si pondera omnia A, B, C, *sint æqualia; dico summam omnium perpendicularium* A D, B E, C F, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ,* G H, *multiplici secundum ponderum numerum.*

Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia; sitque hìc, propter ponderum æqualitatem, summa illa productorum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium perpendicularium; itemque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem secundum ponderum numerum: patet summam perpendicularium necessario jam æquari ipsi G H, multiplici secundum ponderum numerum. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

SI magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. TAB. XVIII. Fig. 2. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C.

Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta M P, atque in ipsum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P.

Quia igitur summa productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis est facto ex G P in omnes A, B, C *. Similiterque summa productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

* Prop. I. huj.

PROPOSITIO IV.

SI pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Tab. XVIII. Fig. 3. 4.

Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F: attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto

cto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt L G, M H, N K. Unde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines *, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex C B A D in K H G D. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercussa intelligantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales E F, F R, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius est quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. part. 2.

* Hypoth. 1. huj.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum sua-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

ſuarum ab axe oſcillationis, & ſumma productorum dividatur per id quod ſit ducendo ponderum ſummam, in diſtantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oſcillationis; orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni, ſive diſtantia inter axem & centrum oſcillationis ipſius penduli compoſiti.

TAB. XIX. Fig. 1.2.

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, ſed gravitas tantum conſideretur), A, B, C, ſuſpenſa ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conſpicitur, rectus intelligitur. In quo plano ſit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diverſis eſſe nihil refert. Diſtantia puncti E ab axe, nempe recta E D, vocetur d. Item ponderis A diſtantia A D, ſit e; B D, f; C D, g. Ducendo itaque ſingula pondera in quadrata ſuarum diſtantiarum, erit productorum ſumma $aee + bff + cgg$. Et rurſus, ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + ca}$. Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo penduli ſimplicis F G, quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi compoſito iſochronum eſſe.

* Prop. 1. huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimiſſa librari, & in recta D E ſumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oſcillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium ſecabit. punctum vero L arcum illi ſimilem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret ſimilem arcum E I. Quod ſi in arcubus G M, N L, ſumptis punctis quibuslibet, ſimiliter ipſos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas eſſe oſtendatur ponderis G in O, & puncti L in P; conſtabit inde æqualibus temporibus utroſ-

que

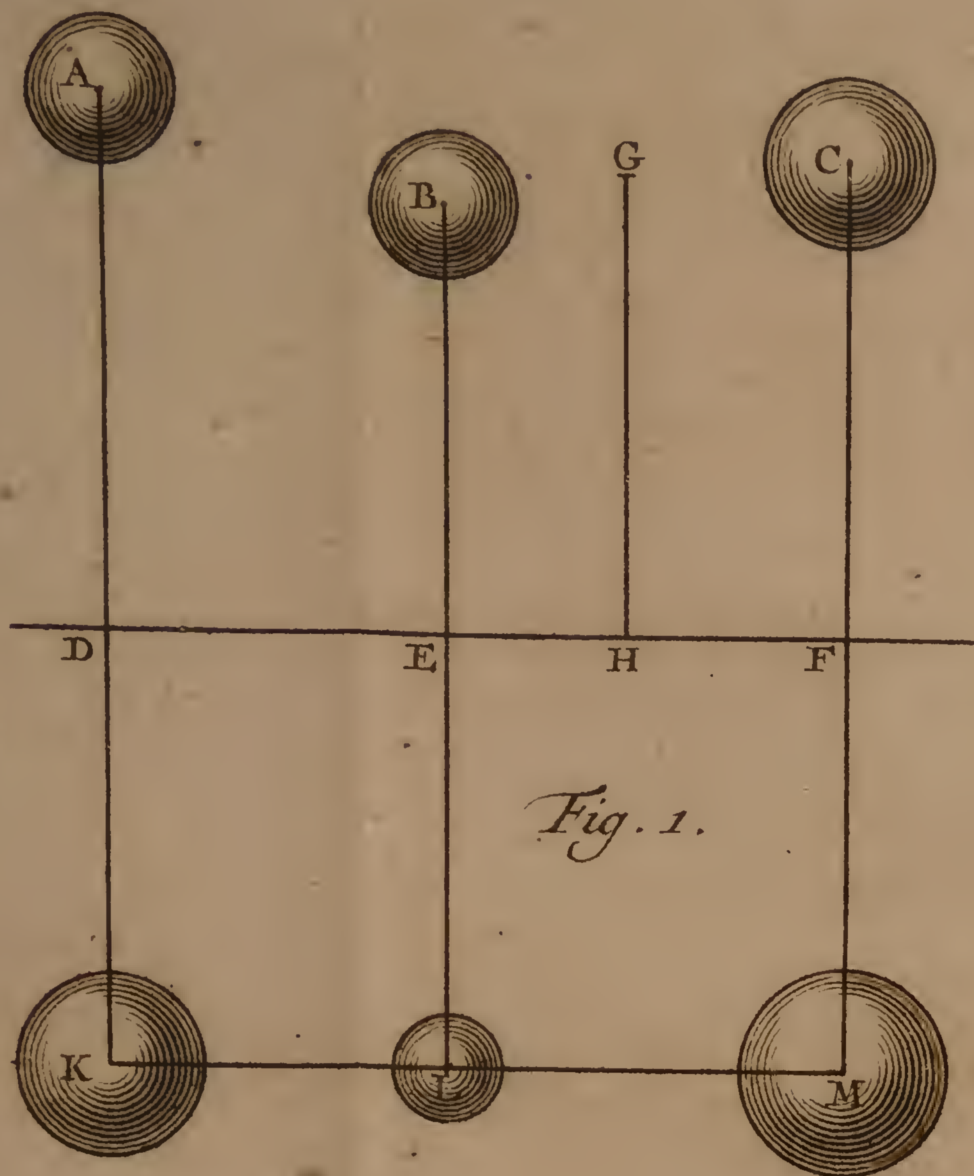


Fig. 1.

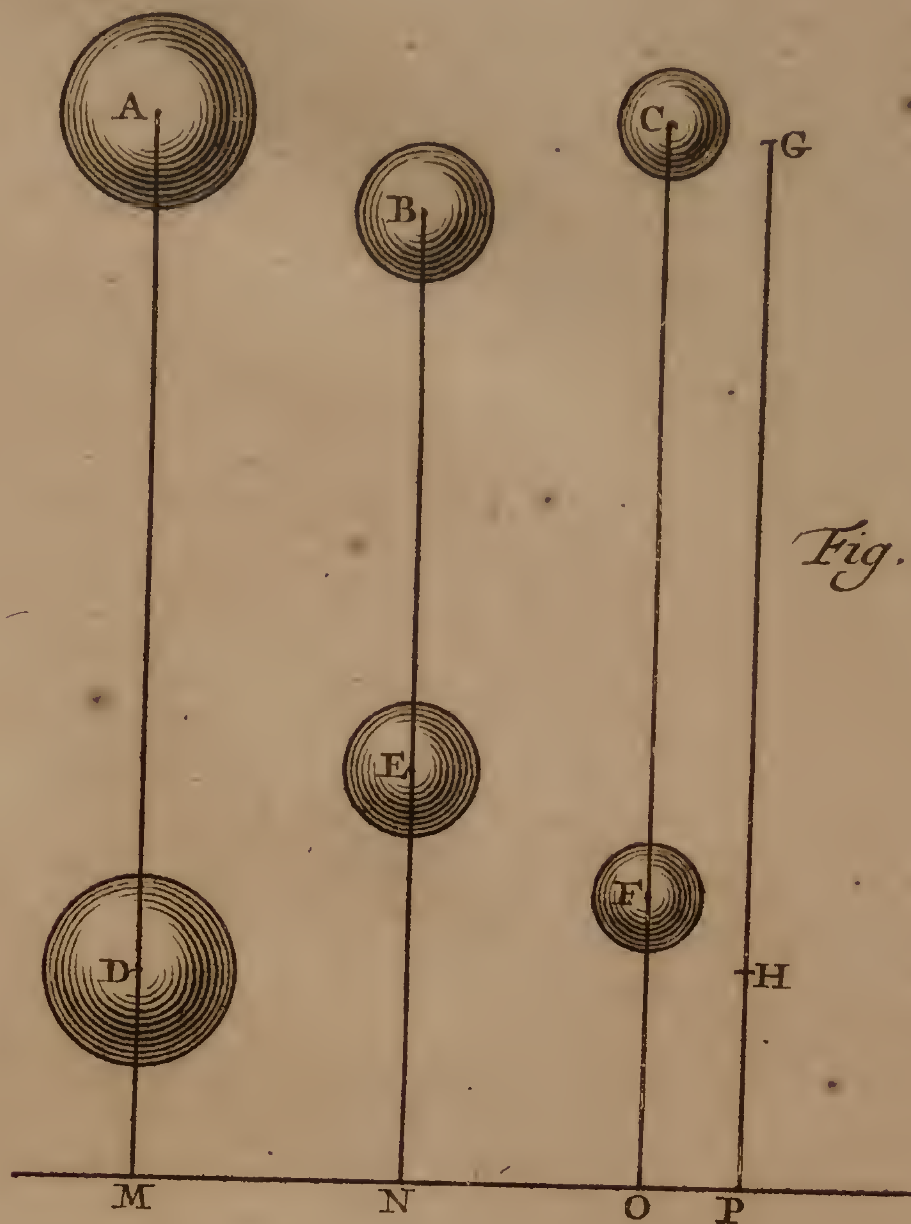


Fig. 2.

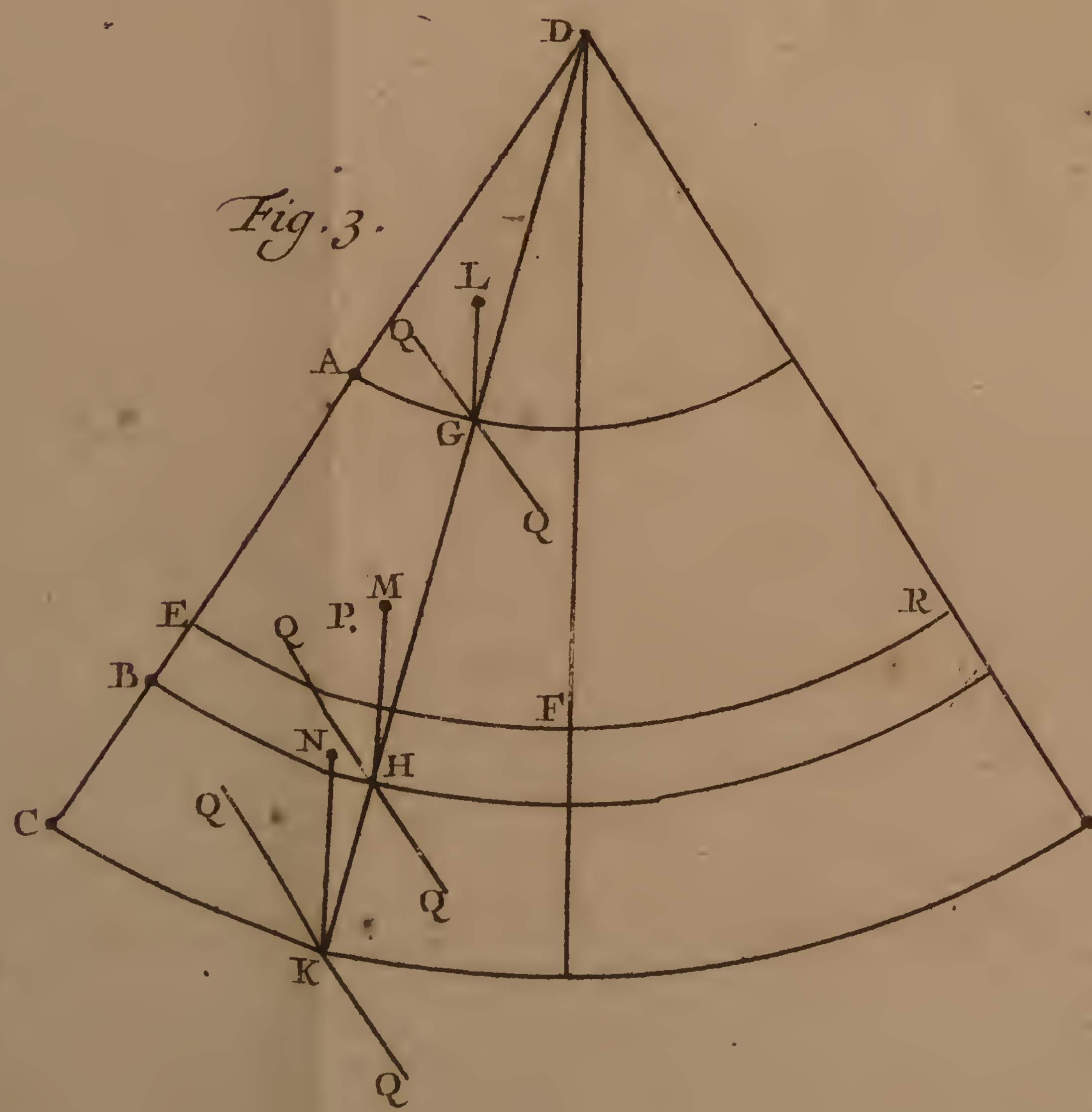


Fig. 3.

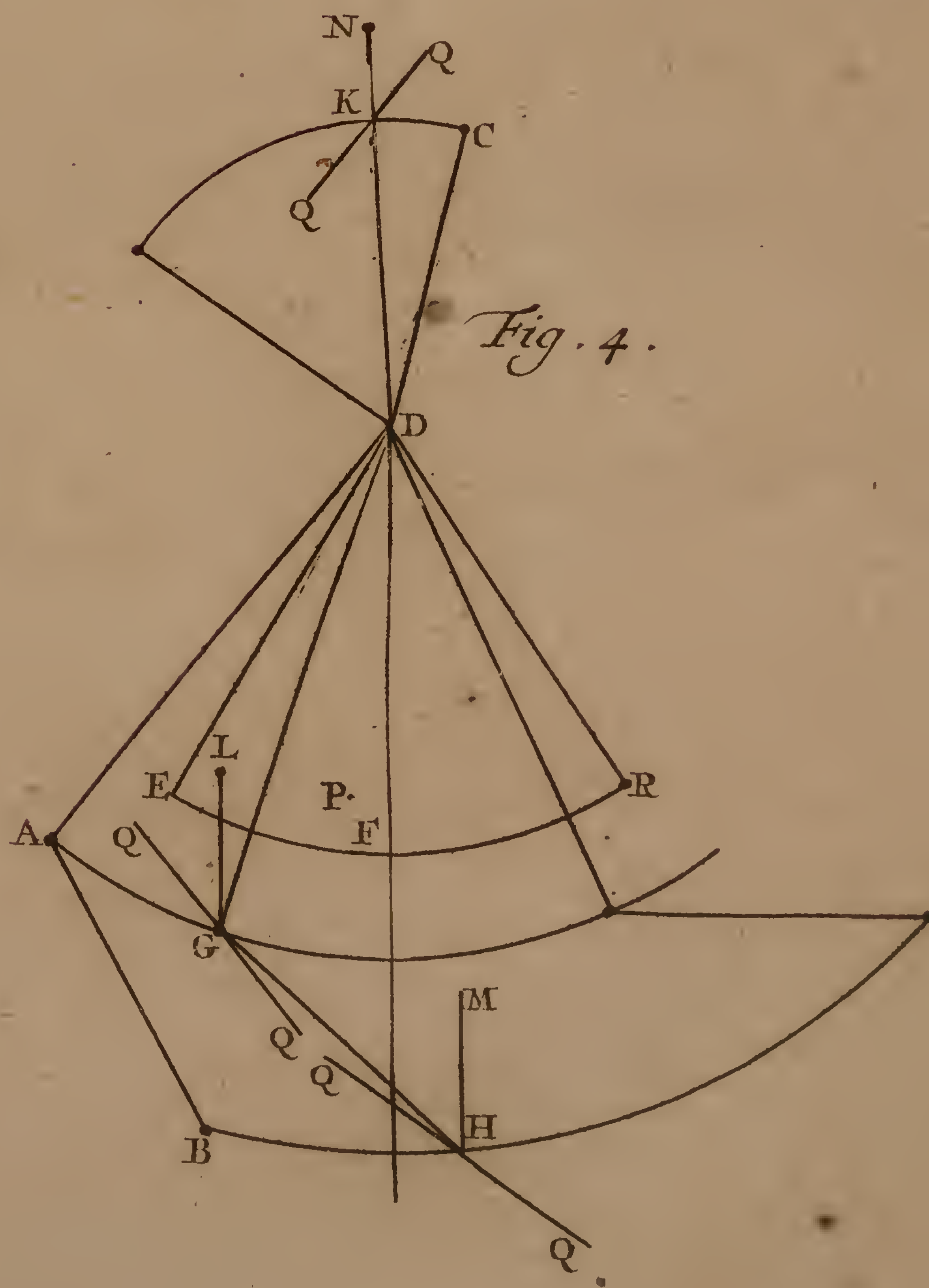


Fig. 4.

que arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo composito ex A, B, C, isochronum esse. Ostendetur autem hoc modo. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sit primo, si potest, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Constat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, simul centrum gravitatis E percurrere arcum similem E Q. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares sursum, quæ occurrant subtensis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y. & S P vocetur y. Unde, cum sit ut L D, x, ad E D, d, ita S P, y, ad R Q; erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Jam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde descendit altitudinem ascendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipsi P S æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua ascenditur ad altitudinem P S. Dum vero L transit in P, simul pondera A, B, C, similes arcus percurrunt ipsi L P, nimirum A T, B V, C X. Estque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, sicut distantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita est altitudo ad quam illa celeritate ascendi potest, ad altitudinem quò hac celeritate ascendi potest *. Ergo etiam, ut quadratum distantiæ D L, quod est $x\,x$, ad quadratum distantiæ D A, quod est $e\,e$, ita est altitudo quo ascenditur celeritate puncti L, quum est in P, (quæ altitudo major dicta est quam P S sive y,) ad altitudinem quo ascenditur celeritate ponderis A in T; si nempe postquam in T pervenit, relicto pendulo, seorsim motum suum sursum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$.

* Prop. 3. & 4. part. 2.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam ascenderet pondus B, celeritate acquisita per arcum B V, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam ascenderet pondus C, celeritate acquisita per arcum C X, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Unde, ductis singulis al-

titudinibus iſtis in ſua pondera, erit ſumma productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia poſita eſt longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + gg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Unde quod dictum eſt conſequitur. Eſt autem ſumma iſta productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam aſcendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in ſummam ipſorum ponderum, $a + b + c$; ſi nempe ſingula, uti dictum, ſeorſim quouſque poſſunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex deſcenſu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui deſcenſus eſt R Q, ſive $\frac{dy}{x}$, ut ſupra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum ſummam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus oſtenſum fuerit, ſequitur aſcenſum centri gravitatis ponderum A, B, C, ſi, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, ſingula celeritates acquiſitas ſurſum convertant, majorem fore ejuſdem centri gravitatis deſcenſu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod eſt abſurdum, cum dictus aſcenſus deſcenſui æqualis eſſe debeat, per antecedentem.

Eodem modo, ſi dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem eſſe celeritate ponderis G quum in O pervenerit; oſtendemus aſcenſum poſſibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem eſſe quam deſcenſum, quod eidem propoſitioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem ſit celeritas puncti L, ad P tranſlati, quæ ponderis G in O. Unde, ut ſuperius dictum, ſequitur pendulum ſimplex F G compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum facto-

rum

rum à distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, applicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sint posita eadem quæ prius, sed pondera omnia inter se æqualia intelligantur, & singula dicantur a. Rursus vero nulla eorum magnitudo consideretur, sed pro minimis habeantur, quantum ad extensionem.

Itaque penduli simplicis isochroni longitudo, per propositionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas divisa ac dividens utraque per a dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo significatur summa quadratorum à distantiis ponderum ab axe oscillationis, applicata ad distantiam centri gravitatis omnium ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum numerum ipsorum ponderum, qui hic est 3. facile enim perspicitur numerum hunc, in quem ducitur distantia d, respondere necessario ipsi ponderum numero. Quare constat propositum.

Quod si pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta sint, atque ex termino ejus superiore suspensa; constat distantiam centri gravitatis, ex omnibus compositæ, ab axe oscillationis, multiplicem secundum ponderum numerum, æquari summæ distantiarum omnium ponderum ab eodem oscillationis axe*; ac proinde, hoc casu, habebitur quoque longitudo penduli simplicis, composito isochroni, si summa quadratorum à distantiis ponderum singulorum ab axe oscillationis, dividatur per summam earundem omnium distantiarum.

* Prop. 2. huj.

De centro oscillationis.

DEFINITIO XIV.

SI fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, quæ deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiei descriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.

Tab. XXI. Fig. 3. In schemate adjecto, est A B E C figura data; recta eam tangens M D; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, E F; cuneus autem figura solida planis A B E C, M F G, & parte superficiei, à recta E F descriptæ, comprehensa.

DEFINITIO XV.

DIstantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica.

Tab. XIX. Fig. 3. Nempe in figura eadem, si K sit centrum gravitatis cunei, recta vero K I ad basin ejus A B E C perpendicularis ducta sit, & rursus I M perpendicularis ad M D; erit I M, quam subcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

CUneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis

lis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus. De centro oscillationis.

Sit, super figura plana A C B, cuneus A B D abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per E E, rectam tangentem figuram A C B, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam E E ducta sit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipsi F A æqualem. TAB. XIX. Fig. 4.

Intelligatur enim figura A C B divisa in particulas minimas æquales quarum una G. Itaque constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta E E, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes*, hoc est, ei quod fit ducendo figuram ipsam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas G H ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam A D terminatis, quale est G K; quia horum altitudines ipsis distantiis G H æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonstrandum.

* Prop. 2. huj.

PROPOSITIO VIII.

Si figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à singulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, simul sumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici secundum ipsarum particularum numerum; quod

De centro oscillationis.

nempe rectangulum fit à distantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à subcentrica cunei, qui per illam super figura abscinditur.

Tab. XIX. Fig. 4.

Positis enim cæteris omnibus quæ in constructione præcedenti, sit L A cunei A B D subcentrica in rectam E E. Oportet igitur ostendere, summam quadratorum omnium à distantiis particularum figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut G K, æquales esse distantiis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G, ab recta A E. Quare, si jam parallelepipedum G K ducamus in distantiam G H, perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantiæ G H. Eodemque modo se res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta A E, æquantur simul producto ex cuneo A B D in distantiam L A*, quia cuneus gravitat super puncto L. Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G, in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc est, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis est producto ex figura A C B in rectam F A*. Rursus quia figura A C B æqualis est producto ex particula una G, in numerum ipsarum particularum; sequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, à particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, sive à particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G, necesse est summam eandem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum in quas figura A C B divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

PRO-

PROPOSITIO IX.

De centro oscillationis.

DAtâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta E D; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam E D, sicut à particula F ducta est F K. Oporteatque invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus. TAB. XIX. Fig. 5. 6.

Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est E D, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A L sit recta G A, secans E D in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam A L, sit H A. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.

Occurrat enim F K, si opus est producta, tangenti A L in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta E D à figura distat, & tangens A L ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K L, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem insuper quadratis L F. Sed quadrata K L æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia esse constat totidem rectangulis E A G,

DE CENTRO OSCILLATIONIS. E A G, quia omnes F L æquales totidem G A *. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G*, hoc est, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque insuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria ista; nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G; faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat ostendendum.

* Prop. 2. huj.
* Prop. præced.

TAB. XX. Fig. 1. 2. Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K L, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F; hoc est, totidem quadratis E A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum totidem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rursus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare constat propositum.

Hinc sequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit A H; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum A L abscissi. Itaque A G unius casus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G illius. Sicut autem rectæ A G inter se, ita in utroque casu cunei per A L abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

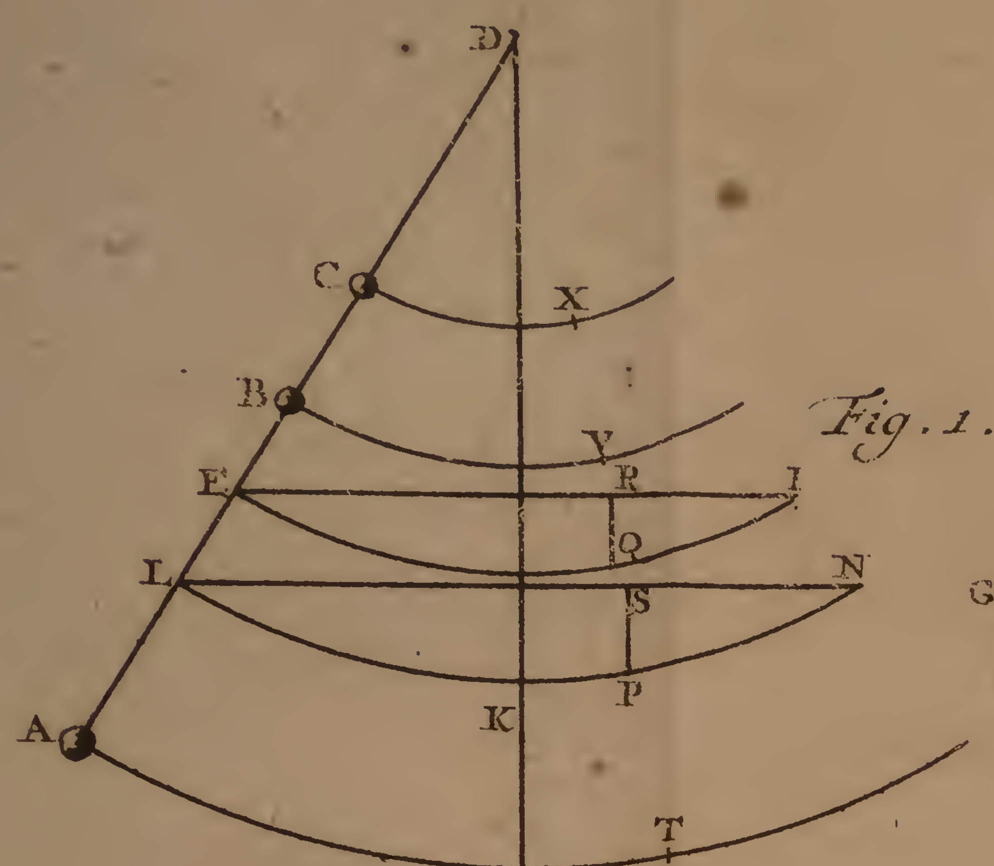
Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A L abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A L abscissi, subcentricam.

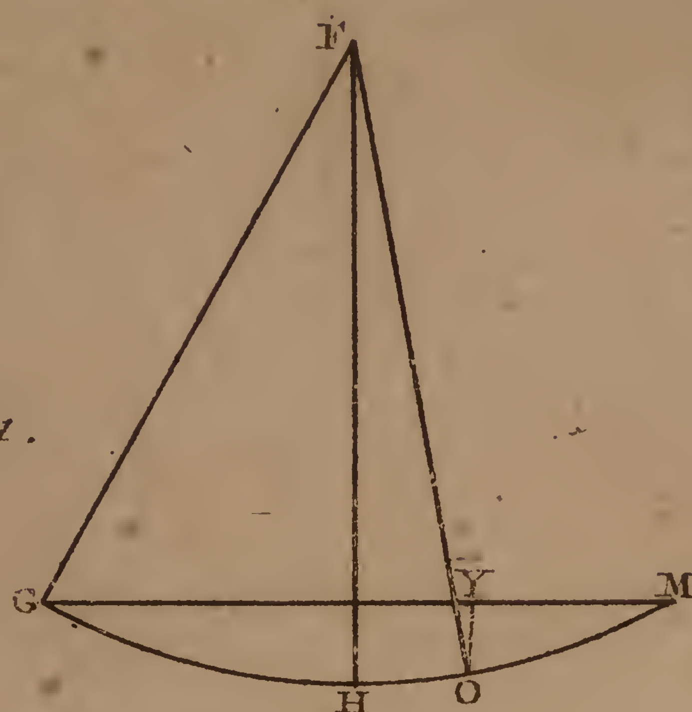
PROPOSITIO X.

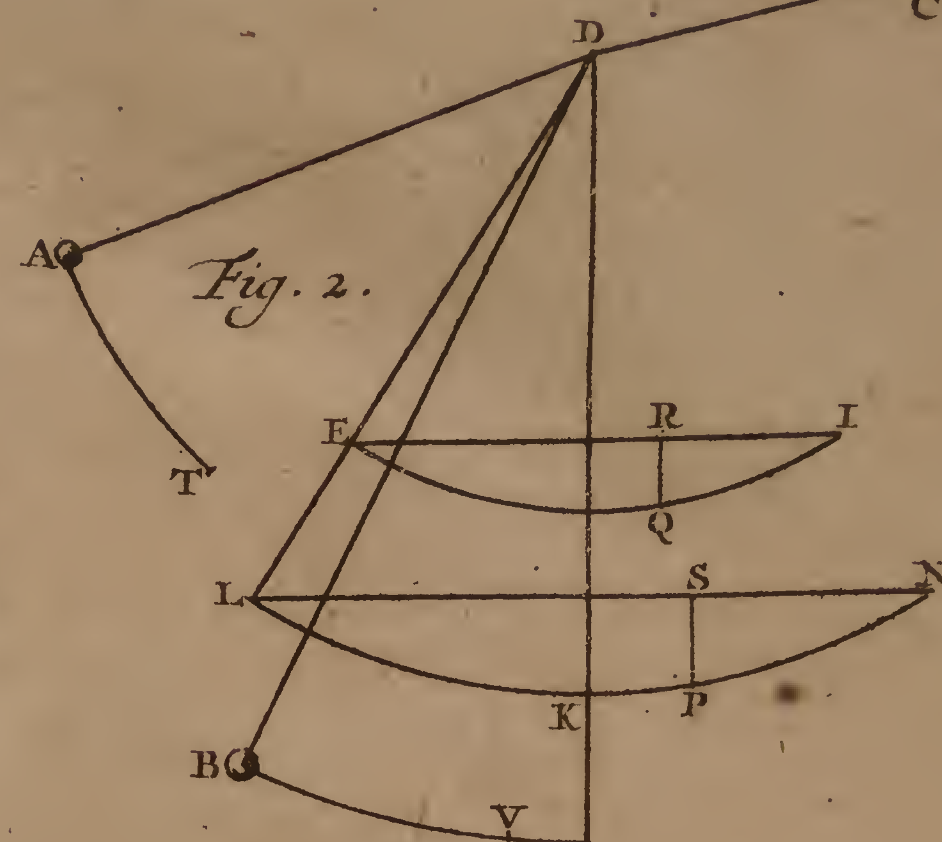
TAB. XX. Fig. 3.

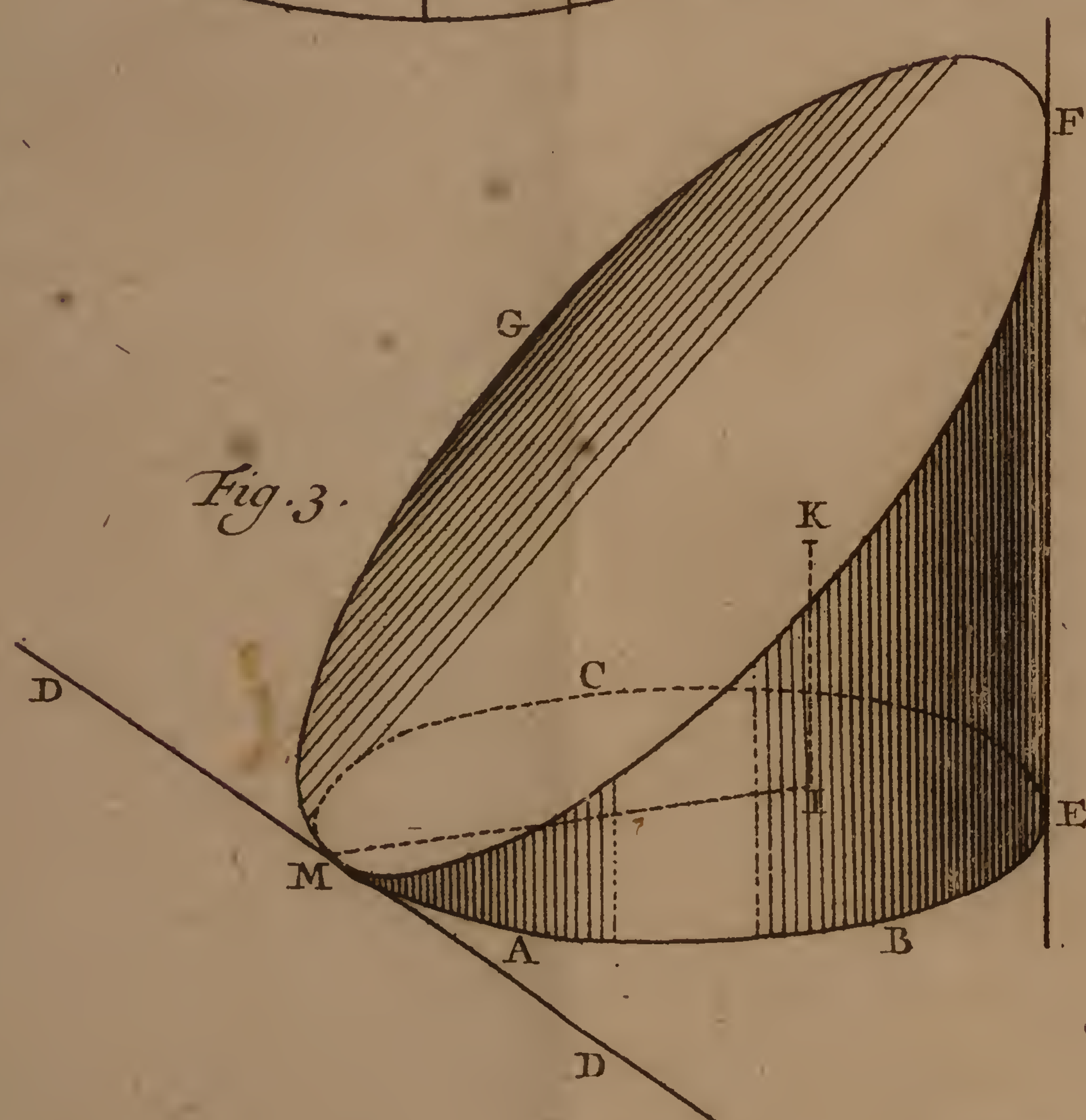
Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta E D *transeat per* G, *centrum gravitatis*

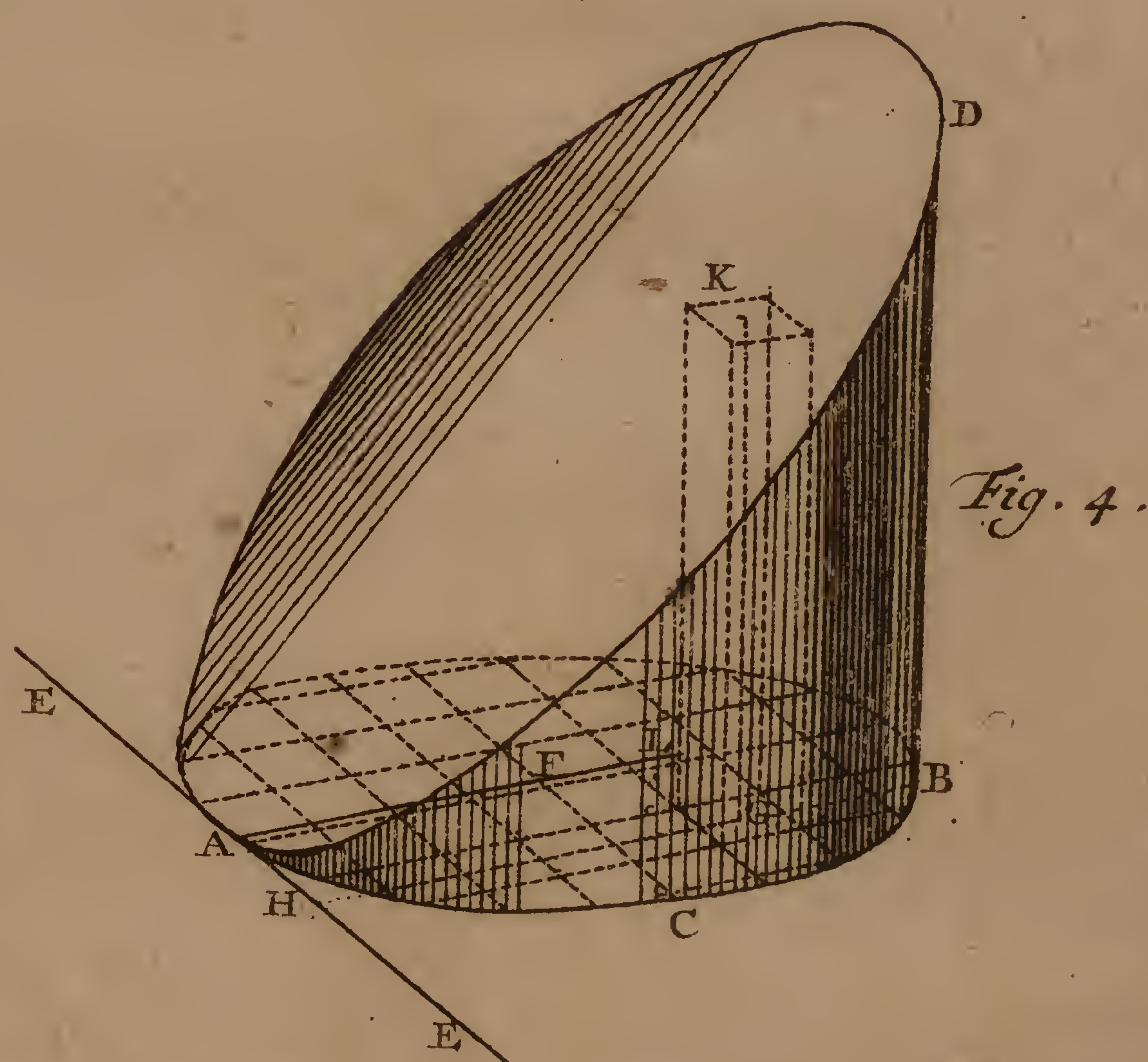
TAB. XIX.

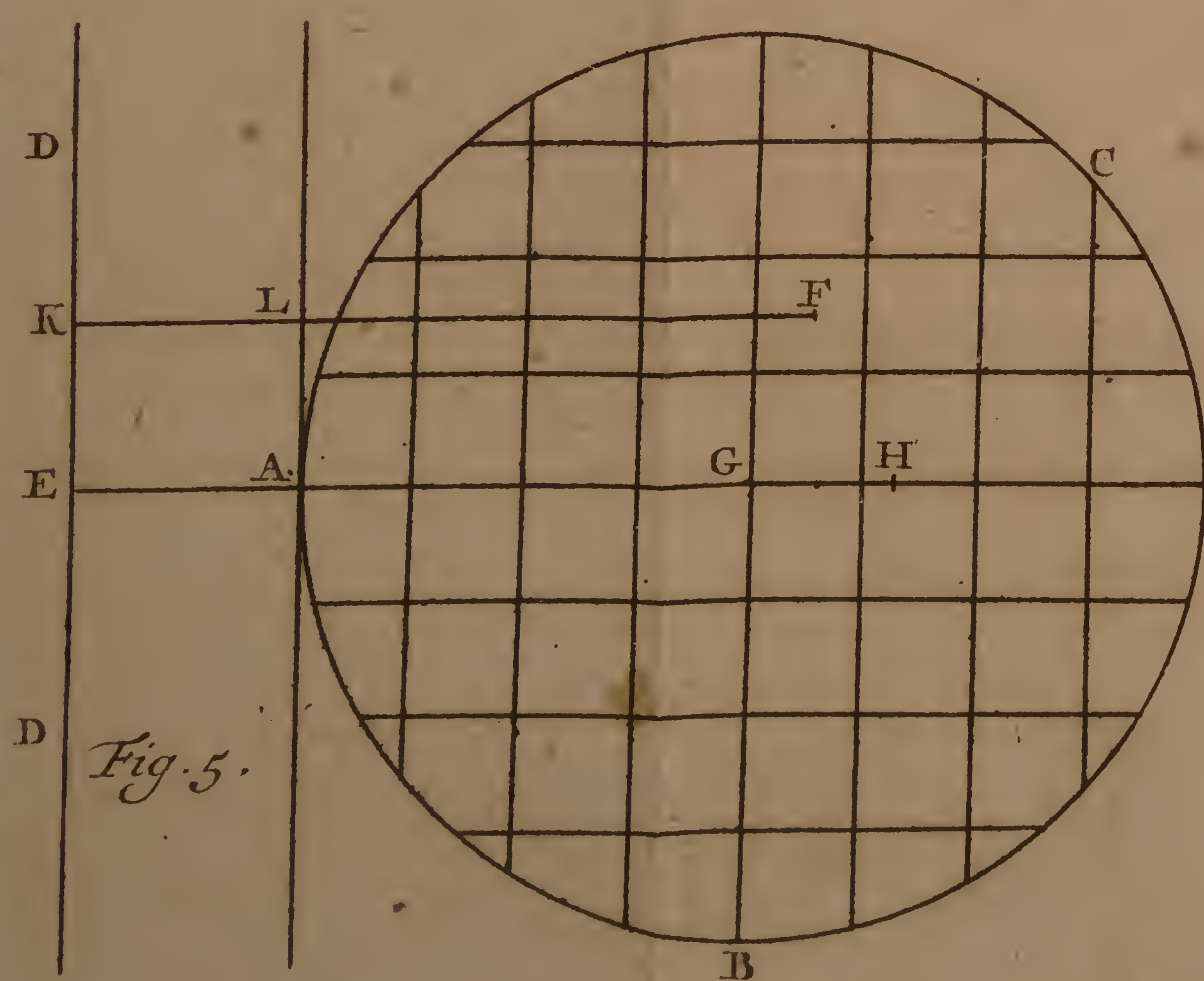

D
C
X
B
Y
E
R
I
Q
L
N
S
P
A
K
T
Fig. 1.

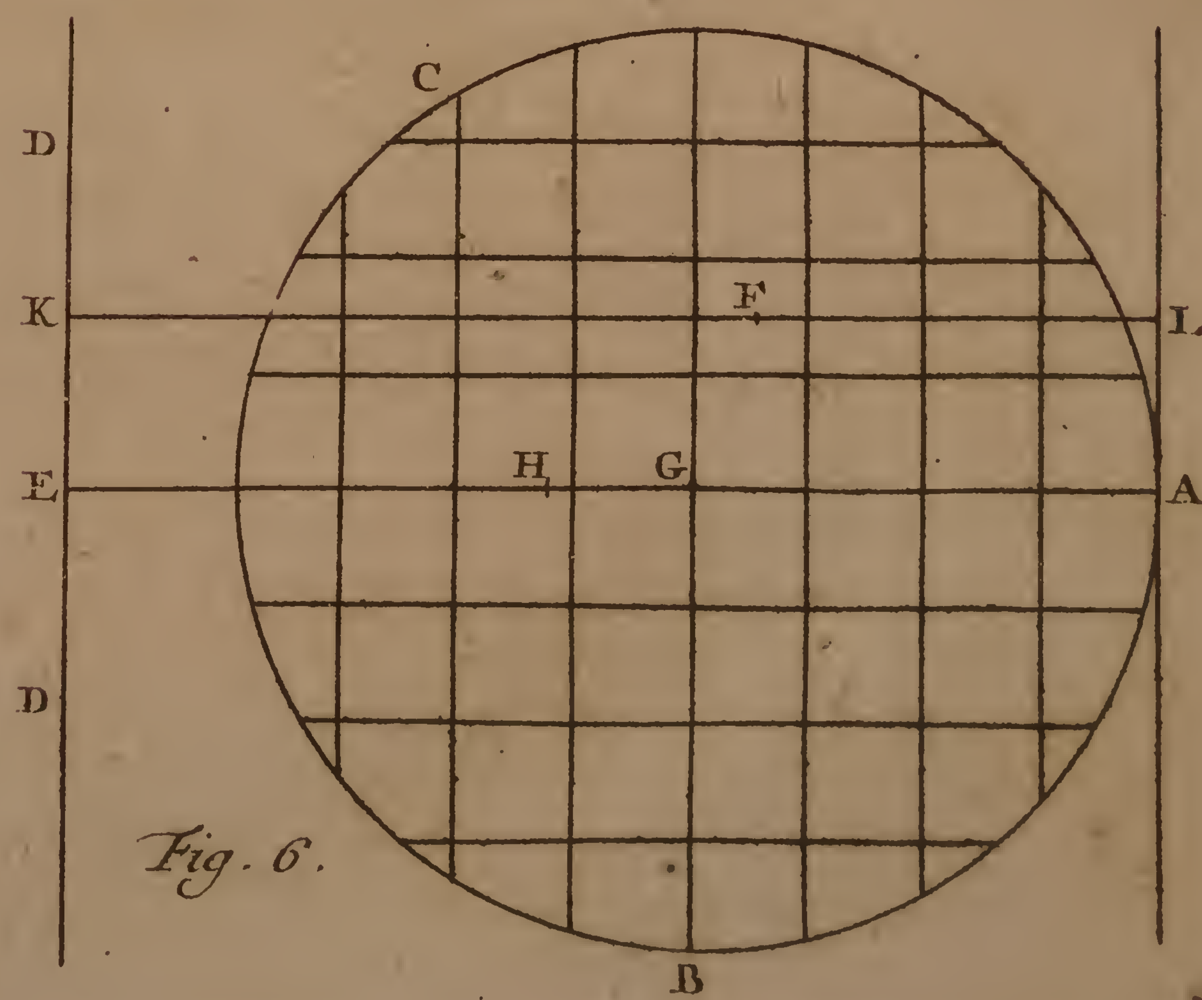

F
G
Y
M
H
O


X
C
D
A
Fig. 2.
T
E
R
I
Q
L
S
N
K
P
B
Y


F
G
Fig. 3.
K
D
C
E
M
A
B
D


D
K
Fig. 4.
E
F
B
A
H
C
E


D
C
K
L
F
E
A
G
H
D
Fig. 5.
B


C
D
K
F
L
E
H
G
A
D
Fig. 6.
B

tis figuræ A B C; *erit ſumma quadratorum à diſtantiis particularum, in quas figura diviſa intelligitur, ab recta* E D, *æqualis rectangulo ſoli* A G H, *multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum.* De centro oscillationis.

Hoc enim manifeſtum eſt, quum nullum tunc ſit quadratum E G.

PROPOSITIO XI.

POſitis rurſus cæteris ut in præcedentium penultima; *ſi* D E *ſit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales ſimilesque portiones eam dividens, ſitque inſuper* V G *diſtantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, ſuper ipſam abſciſſi per ipſam* E D, *ſubcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H. TAB. XX. Fig. 4.

Eſt enim rectangulum X G V, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium *. Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex ſecundum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demiſſarum; hoc eſt, rectangulo A G H multiplici ſecundum eundem particularum numerum, ut conſtat ex propoſ. præcedenti. Unde ſequitur rectangula X G V, A G H inter ſe æqualia eſſe. quod erat demonſtrandum. * Prop. 8. huj.

PROPOSITIO XII.

DAtis in plano punctis quotlibet; *ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur;*

S du-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. *ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineæ rectæ; erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano æqualis.*

TAB. XX. Fig. 5. Sint data puncta A B C D: centrumque gravitatis eorum, sive magnitudinum æqualium ab ipsis suspensarum, sit E; & centro E describatur circulus quilibet F *f*, in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.

Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O; C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipsam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipsam E R. Porro sit jam

A L ∞ a	A K ∞ e	radius E F ∞ z
B M ∞ b	B O ∞ f	G S ∞ x
C N ∞ c	C P ∞ g	
D H ∞ d	D Q ∞ h	

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; si addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta; earum partium uni æqualis erit E R*. Similiterque, divisâ in totidem partes summâ perpendicularium A K, B O, C P, D Q, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam G K, sive ipsa R G*. Itaque, si summa omnium A L, B M, C N, D H, sive $a + b + c + d$ vocetur l: summa vero omnium, A K, B O, C P, D Q, sive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, dato-

* Prop. 2. huj.

* Prop. 2. huj.

datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ; erit E R $\infty \frac{l}{\theta}$; & R G $\infty \frac{m}{\theta}$. Cumque G S sit x, erit R S sive F T $\infty\ x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, si G R major quam G S; & semper quadratum F T $\infty\ xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato F E $\infty\ zz$, relinquetur quadratum T E $\infty\ zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde T E $\infty \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem E R $\infty \frac{l}{\theta}$. Itaque T R $\infty \frac{l}{\theta}$ + vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ T R, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro summam quadratorum omnium F A, F B, F C, F D. Quadratum A F æquatur quadratis A V, V F. Est autem A V æqualis differentiæ duarum V K, A K, sive duarum S G, A K; ac proinde A V $\infty\ x - e$ vel $e - x$; & qu. A V $\infty\ xx - 2ex + ee$. V F vero æqualis est differentiæ duarum F S, V S sive duarum F S, A L; ac proinde V F $\infty\ y - a$ vel $a - y$; & qu. V F $\infty\ yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis A V, V F, fit quadratum F A $\infty\ xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum F B, F C, F D; atque omnia ordine disposita erunt hæc;

qu. F A $\infty\ xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. F B $\infty\ xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. F C $\infty\ xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. F D $\infty\ xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero summa; si ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \infty\ nn$; & quadrata $aa + bb, + cc + dd \infty\ kk$; erit ista, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, positumque fuerat $e + f + g + h \infty\ m$, & $a + b + c + d \infty\ l$.

In ista vero summa, si in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco positum erat, nempe $\frac{l}{\theta}$ + vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$

fiet $+ \theta yy \infty \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

De centro oscillationis.

De centro oscillationis.

& $-2ly \infty -2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

vel $+\theta yy \infty \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx$
$xm - \frac{mm}{\theta}$.

$+2$ & $-2ly \infty -2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

Ac proinde, utroque casu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quò appositis reliquis quantitatibus, summa prædicta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, fiet tota summa, nempe quadratorum F A, F B, F C, F D, $\infty \theta zz + nn + kk - \frac{mm - ll}{\theta}$. Quod apparet esse planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ sint; semperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia sumptum fuerit punctum F. quod erat demonstrandum.

Quod si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commensurabiles, ut si punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum ponderis puncti sui; ut quadratum A F duplum, B F triplum, C F quadruplum, D F septuplum; dico rursus summam omnium æqualem fore spatio dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum sumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonstratione, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros attributæ cuique gravitatis; quasi nempe in A duo puncta conjuncta sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

SI figura plana, vel linea in plano existens, aliter atque aliter suspendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis suæ distent; agitata motu in latus, sibi ipsi isochrona est.

Sit

Sit figura plana, vel linea in plano existens A B C, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, E C F. Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse. DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XX. Fig. 6.

Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam E H, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura A B C divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est, quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam E D; multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni*, quæ sit K L. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam G D, multiplicem secundum earundem particularum numerum*. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta cetnro D, quod est centrum gravitatis figuræ A B C, sive centrum gravitatis punctorum omnium; quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E*. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E, ad rectam E D, multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G, ad rectam D G, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi K L.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. præced.

Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ E C F, figura suspendatur, eidem pendulo K L isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

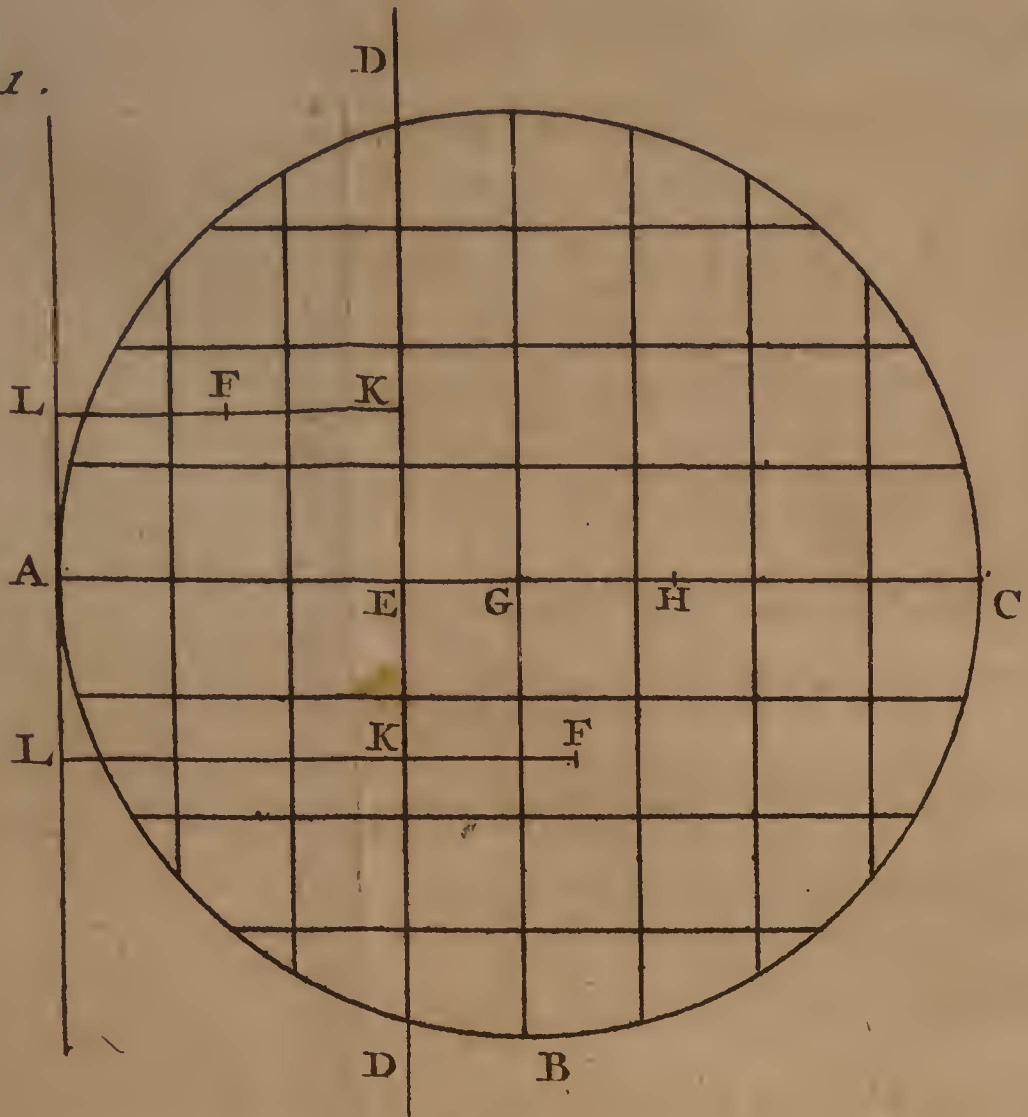
Tab. XXI. Fig. 1. Sit data figura solida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum A B C D constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E summam invenire.

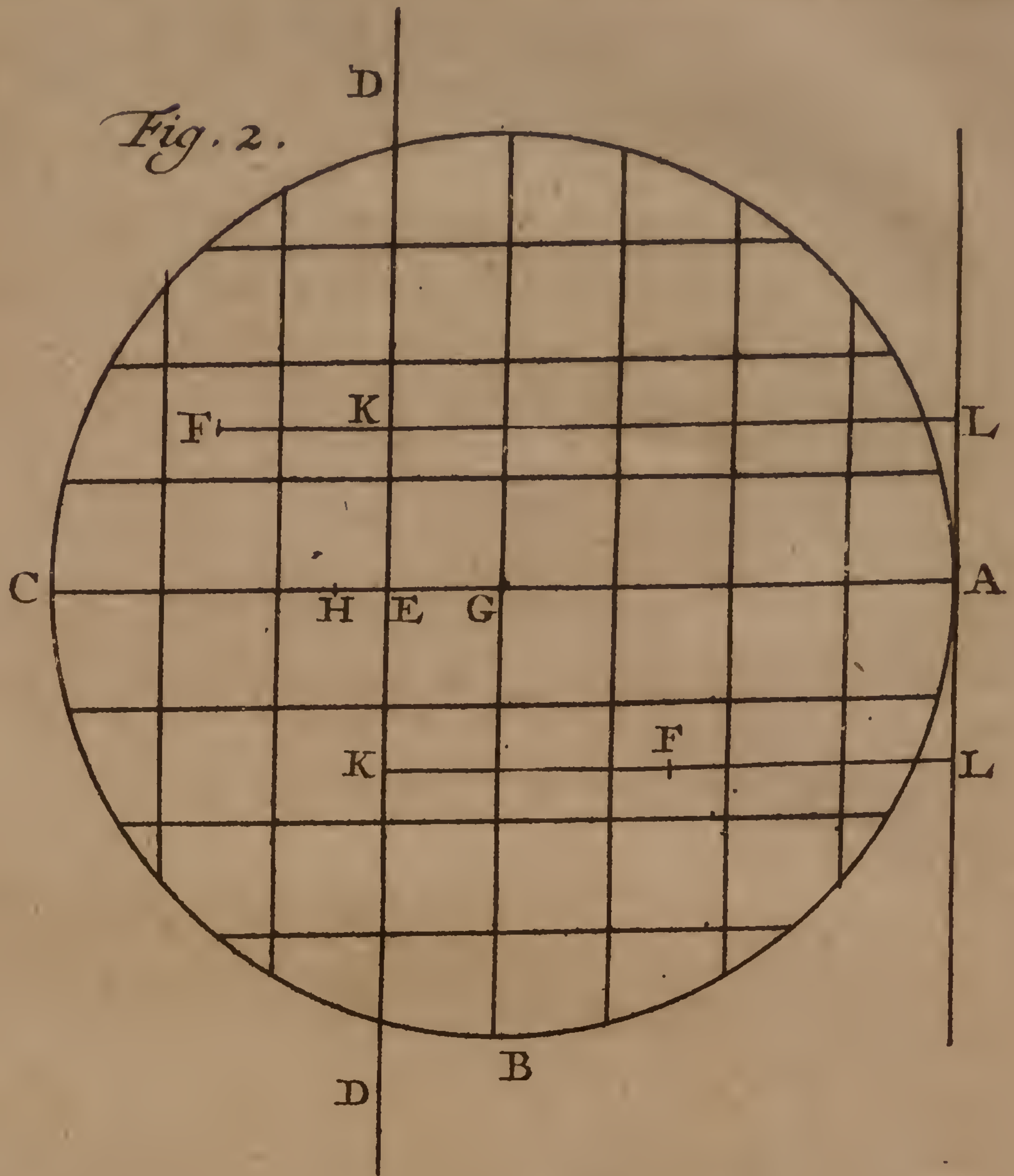
Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipsi est ad angulos rectos.

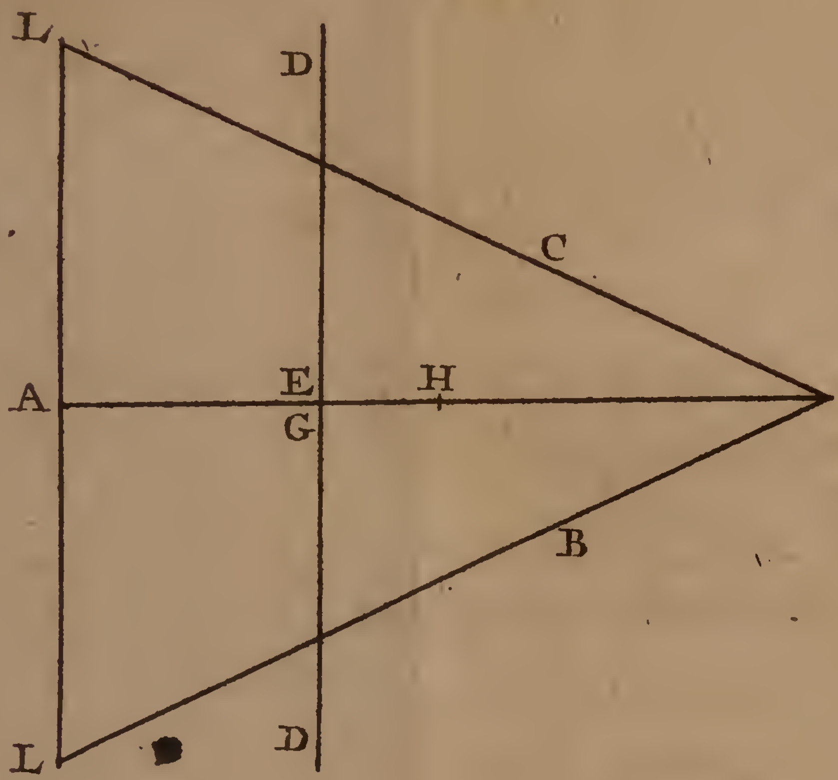
Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula dictarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut F E, æquari quadratis duarum F G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur*. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per E G & E C; habebimus etiam huic æqualem summam

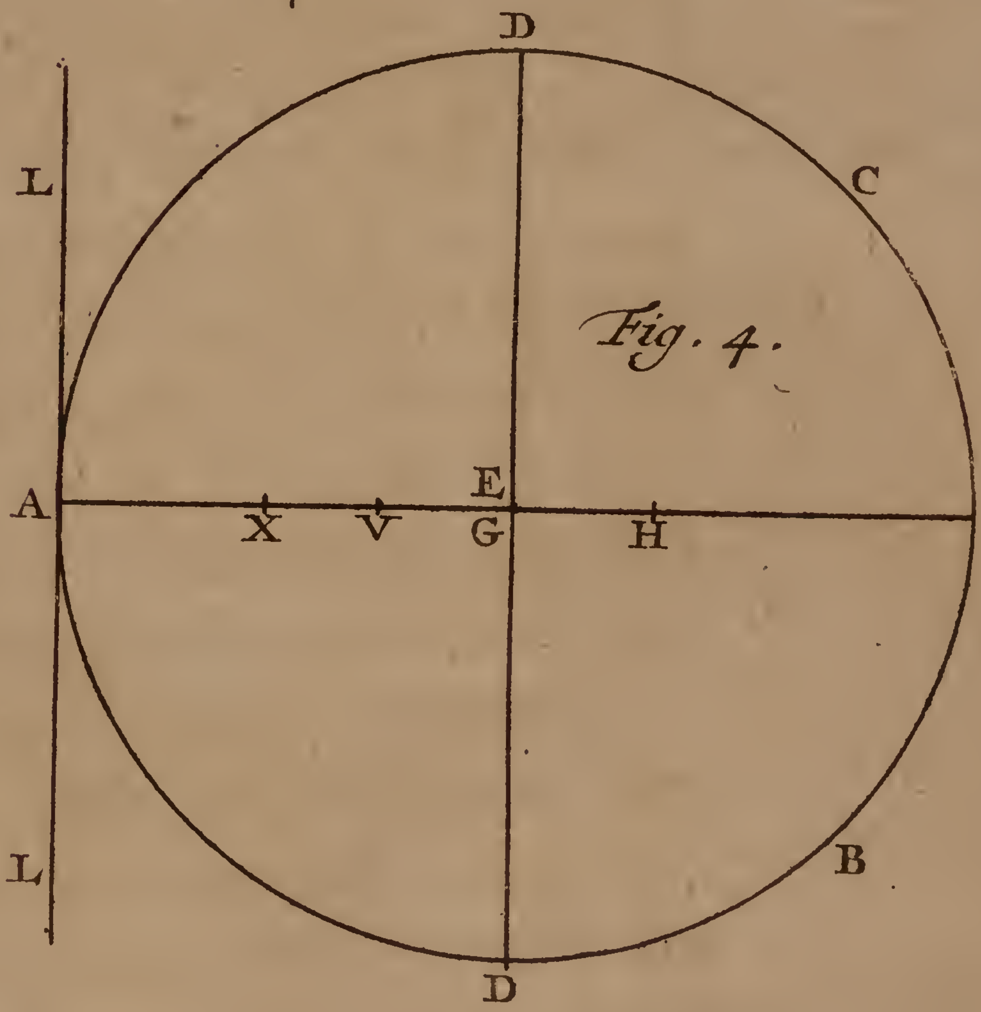
* 47. lib. 1. Eucl.

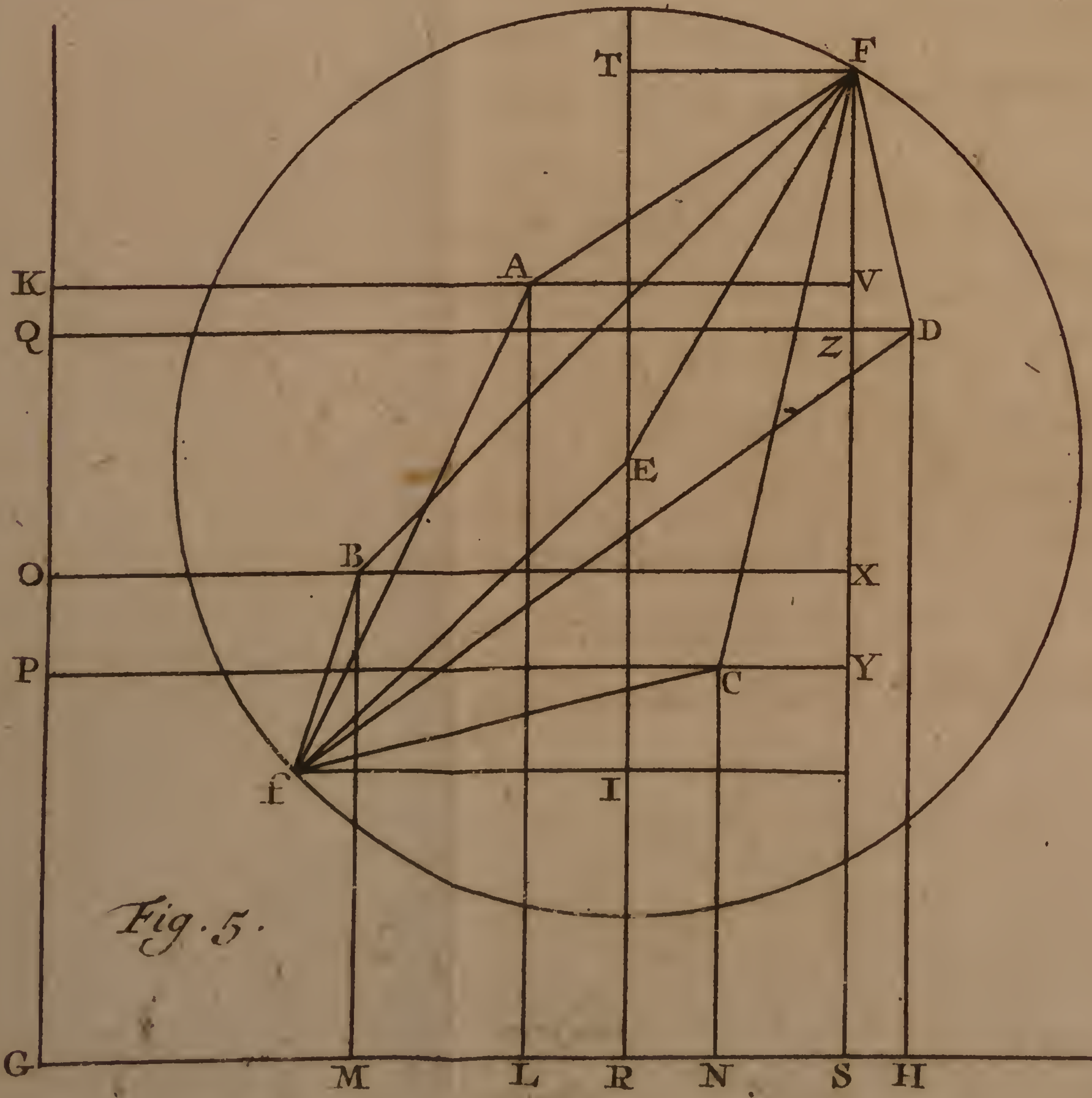
mam

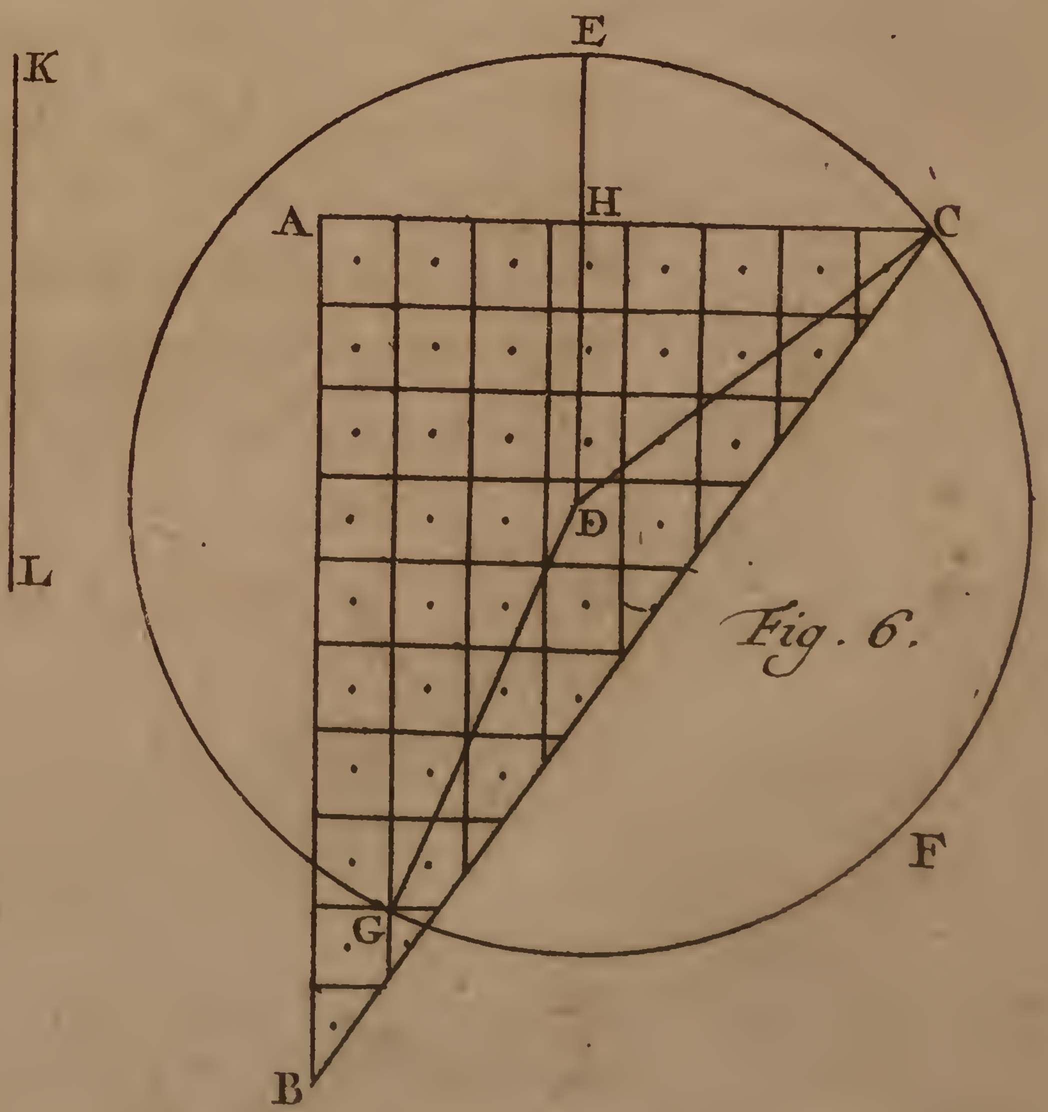

Fig. 1.
D
L
F
K
A
E
G
H
C
L
K
F
D
B


D
Fig. 2.
F
K
L
C
H
E
G
A
K
F
L
D
B


L
D
Fig. 3.
C
A
E
H
G
B
L
D


D
L
C
Fig. 4.
A
E
X
V
G
H
L
B
D


T
F
K
A
V
Q
Z
D
E
O
B
X
P
C
Y
f
I
Fig. 5.
G
M
L
R
N
S
H


E
K
A
H
C
D
L
Fig. 6.
F
G
B

mam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo: Ponatur primò figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ solidæ A B C D, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis Q Q, R R, quæ respondeant planis figuram solidam A B C D secantibus M M, N N, & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Ut si linea R R sit ad Q Q quemadmodum planum N N ad M M. Quod si igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido A B C D, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut Q Q R R, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento M M N N, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G; æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ propos. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejusdem cum solido A B C D latitudinis, hoc est, quam includant plana B Y, D Z solidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis V V, X X &c. quæ respondeant planis figuram A B C D secantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illo-

rum

rum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z; nec non distantia indidem centri gravitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam *. Vel, figura S Y T Z ordinata existente, ut S T sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergò & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostensa, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per E transeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XV.

Tab. XXI. Fig. 1. & 2.

Isdem positis, si solidum A B C D *sit ejusmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis à tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere est,* O Q P, *detur distantia* Φ P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abest ab axe* O P; *licebit hinc invenire summam quadratorum à distantiis particularum solidi* A B C D *à plano* E C. *Oportet autem ut sectiones omnes,* N N, M M, *sint plana similia; utque per omnium centra gravitatis transeat planum* E C; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figu-*

ris

ris contingit. Atque eorum planorum diſtantias centri gravitatis, ſuper tangentibus axi oſcillationis parallelis, datas eſſe neceſſe eſt; uti & ſubcentricas cuneorum, qui ſuper ipſis abſcinduntur, ductis planis per eaſdem tangentes. De centro oscillationis.

Veluti, ſi maxima dictarum ſectionum ſit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc eſt, erecta ad planum quod hic conſpicitur, oportet datam eſſe diſtantiam centri gr. ſectionis B D à dicta linea in B, quæ ſit B C; itemque ſubcentricam cunei, ſuper ſectione B D abſciſſi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ ſubcentrica ſit B K. Fig. 2.

Etenim his datis, diviſâque P V bifariam in Δ, ſi fiat ſicut Δ P ad P Φ, ita rectangulum B C K ad ſpatium quoddam Z; dico hoc ipſum, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum, à diſtantiis earundem particularum à plano E C.

Quadrata enim à diſtantiis particularum planæ ſectionis B D, à plano E C, quod per centrum gravitatis ſuæ tranſit; ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti B N N D à plano eodem, æquari conſtat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, ſi planæ ſectionis N N diſtantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, ſit N X; ſubcentrica vero cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eandem rectam, ſit N F; erunt quadrata à diſtantiis particularum planarum ſectionis N N à plano E C, ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipſarum ſectionis N N, vel ſegmenti N M M N. Eſt autem B D diviſa ſimiliter in C & K, atque N N in X & F. Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, ſicut quadratum B D ad quadratum N N.

* Prop. 13 huj.

Eſt autem & numerus particularum ſectionis B D, ad numerum particularum ſectionis N N, ſicut ſectiones ipſæ;

T hoc

hoc eſt, ſicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum ſectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum ſectionis N N, duplicatam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N; hoc eſt, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti B N N D à plano E C, ad ſummam alteram quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti N M M N, ut qu. V V ad qu. R R. Eademque ratione oſtendetur, ſummas quadratorum à diſtantiis particularum in reliquis ſegmentis ſolidi A B C D, eſſe inter ſe in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ baſi cujusque ſegmenti reſpondent. Quare ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum omnium ſegmentorum ſolidi A B C D à plano E C, erit ad ſummam quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmentorum totidem, maximo ſegmento æqualium, hoc eſt, cylindri vel prismatis B D S S, eandem cùm ſolido A B C D baſin altitudinemque habentis, ſicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. ad quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc eſt, ſicut ſolidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui baſin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem ſolidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi conſtat ex ratione planorum quorum converſione generantur, hoc eſt, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione diſtantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abſunt ab axe O P; hoc eſt, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem eſt quæ ſolidi A B C D ad cylindrum vel prisma B D S S, hoc eſt, eadem quæ numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, eſt eadem, ex conſtructione, quæ ſpatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta ſumma quadratorum, à diſtantiis omnium particularum

larum solidi A B C D à plano E C, ad summam quadratorum, à distantiis omnium particularum cylindri vel prismatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, & ex ratione spatii Z ad rectangulum B C K: hoc est, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis est secundæ; nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, æquale summæ quadratorum, à distantiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri B D S S à plano E C; siquidem rectangulum idem B C K, multiplex per numerum particularum segmenti B N N D, æquatur quadratis distantiarum particularum ejusdem segmenti à plano E C *. Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, summæ quadratorum, à distantiis particularum solidi ejusdem A B C D à plano E C *. quod erat demonstrandum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 10. huj.

* Prop. 14. lib. 5. Eucl.

Notandum vero, quando solidum A B D rotundum est circa axem A C, fieri semper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C; quoniam subcentrica cunei, abscissi super circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur $\frac{1}{4}$ radii B C. Unde, si P V æqualis posita sit B C, sequitur, faciendo ut P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc est, $\frac{1}{4}$ quadrati B C, hoc est, qu. P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipsum rectangulum Δ P Φ, multiplex secundum numerum particularum solidi A B D, æquari summæ quæsitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iisdem cadunt in planum E C.

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum; si aliter atque aliter suspendatur, agiteturque super axibus inter se parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter distent, sibi ipsi isochrona est.

TAB.XXI. Fig. 3. Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, sitque primo suspensa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oscillationis. In quo si centro E, radio E F, describatur circumferentia F H G, sumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo secundò suspendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oscillationis plano. Dico isochronam fore sibi ipsi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis; manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio A B C D.

Quum igitur E sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus est ad planum A B C D, quovis situ æquilibrium servet; facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio A B C D signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum E. Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse E punctum.

Porrò

Porrò summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ à singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H, patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio A B C D signatis, ducuntur ad punctum H, eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis *; & rectæ quoque E F, E H, inter se æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H. Quare constat propositum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 12. hujus.

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensæ magnitudinis, orietur longitudo penduli simplicis ipsi isochroni.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

TAB. XXII. Fig. 1.

Sit figura A B C; cujus centrum gravitatis E; suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc esse longitudinem penduli simplicis, isochronas oscillationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.

Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni*. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam F E, multiplicem secundum particularum numerum; sive, omissa communi multiplicitate, si planum H applicetur ad distantiam F E; orietur quoque longitudo penduli simplicis isochroni. Quam proinde ipsam longitudinem F G esse constat. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. huj.

PROPOSITIO XVIII.

SI spatium planum, cujus multiplex secundum numerum particularum suspensæ magnitudinis, æquetur quadratis distantiarum ab axe gravitatis, axi oscillationis parallelo; id, inquam, spatium si applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis ejusdem magnitudinis.

TAB. XXII. Fig. 2.

Esto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E; quæ-

quæque suspensa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oscillationis G. Porrò axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E transiens, parallelus. Divisaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, sit quadratis distantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe secundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad distantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem esse intervallo E G, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis magnitudinis A B C D.

De centro oscillationis.

Ut enim universali demonstratione quod propositum est comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adposita, O Q P; quæ nempe, secta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine A B C D, habeat segmenta intercepta inter bina quæque plana, in eadem inter se ratione cum segmentis dictæ magnitudinis, quæ ipsis respondent; sintque segmenta singula figuræ O Q P, divisa in tot particulas æquales, quot continentur segmentis ipsis respondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi possunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo A B C D, sive linea, sive superficies, sive solidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod sit T, eadem altitudine esse manifestum est cum centro gravitatis magnitudinis A B C D; ideoque, si planum horizontale, per F ductum, secet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales esse distantias S T, F E.

Porrò autem constat quadrata distantiarum, ab axe oscillationis F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli isochroni*; quæ longitudo posita fuit F G. Illorum vero quadratorum summam, æqualem esse perspicuum est, quadratis distantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis distantiarum à plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto*. Atqui quadrata distantiarum magnitudinis A B C D à plano horizontali per F, æquantur quadratis distantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

qua-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. quadrata (si O sit punctum supremum figuræ O Q P, & O H subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per rectam O V, parallelam S F) æqualia sunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus secundum numerum particularum dictæ figuræ *, sive magnitudinis A B C D. Quadrata vero distantiarum magnitudinis A B C D à plano F E, quantumcunque axis oscillationis F distet à centro gravitatis E, semper eadem sunt: quæ proinde putemus æquari spatio Z, multiplici secundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata distantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oscillationis F, æquantur istis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; si applicentur hæc omnia ad distantiam F E sive S T, orietur longitudo F G penduli isochroni magnitudini A B C D*. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus suum S T, orietur ipsa S T, sive F E. Ergo reliqua E G est ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare superest ut demonstremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim constabit, etiam planum I, applicatum ad distantiam F E, efficere longitudinem ipsi E G æqualem. Illud autem sic ostendetur. Rectangulum O T H, multiplex secundum numerum particularum figuræ O Q P, sive magnitudinis A B C D, æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta X T *, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipsi S F parallela; ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis A B C D, à plano horizontali K K, ducto per centrum gravitatis E; cum distantiæ utrobique sint eædem. At vero planum Z, similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis A B C D à plano verticali F E. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum à plano F E, una cum dictis quadratis distantiarum à plano horizontali per E, æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per E, qui

* Prop. 10. huj.

qui sit axi F parallelus *. Itaque rectangulum O T H una cum plano Z, multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis A B C D, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum I æquale est rectangulo O T H & plano Z simul sumptis. quod ostendendum supererat.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

Sive enim magnitudo A B C D suspendatur ab axe F, sive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per E, qui sit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis; Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L, fuerit dicta distantia E Y, erit ipsa æqualis E G; & tota Y L æqualis G F; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum fit magnitudini A B C D.

PROPOSITIO XIX.

SI magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantiæ axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantiæ centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, suspensa primum

TAB. XXII. Fig. 3.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. num atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; sitque in prima suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A.

Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, qua nempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

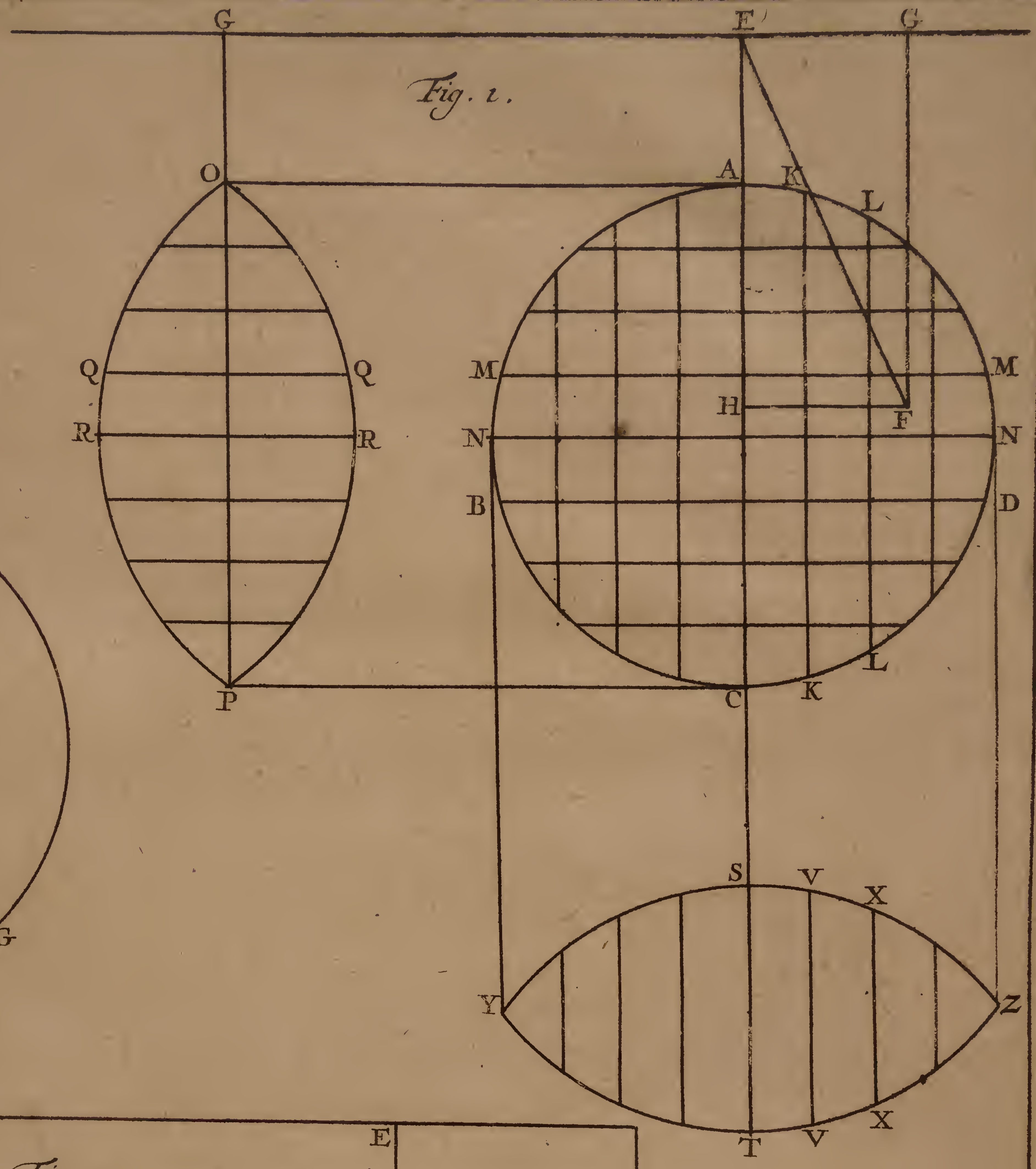
Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.

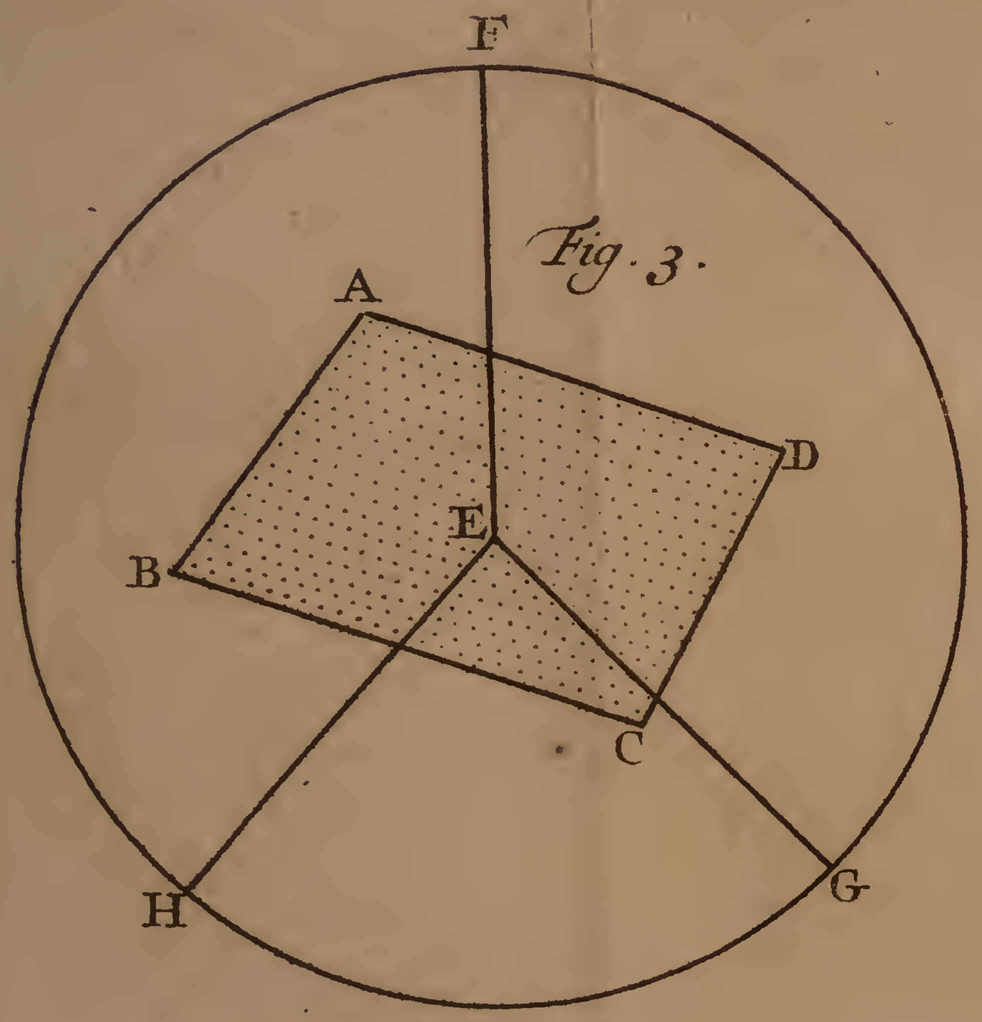
TAB. XXII. Fig. 3. In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspensionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est.

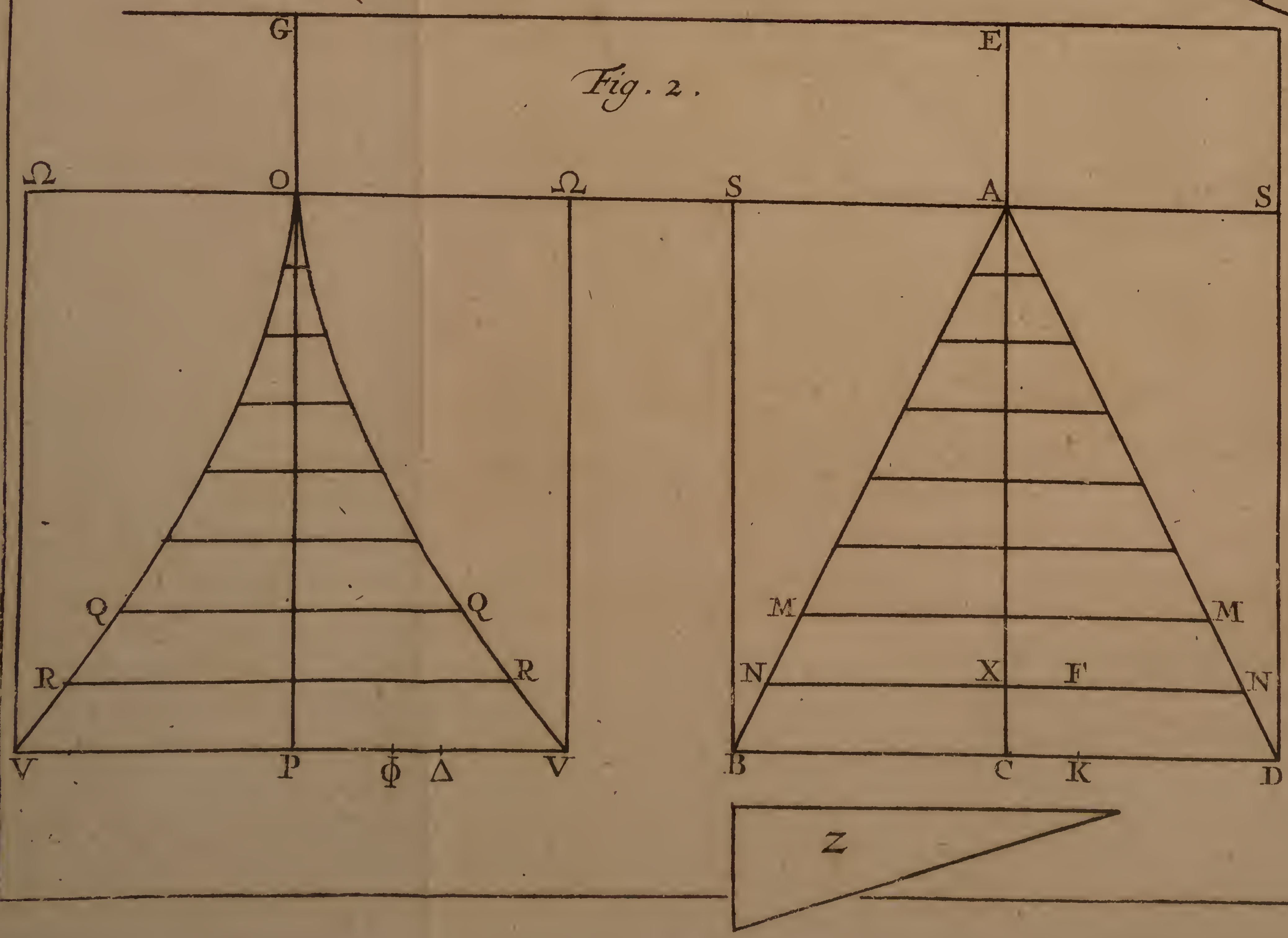
PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur.

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit in


Fig. 1.
G
E
G
O
A
K
L
Q
Q
M
M
H
F
R
R
N
N
B
D
L
P
C
K
S
V
X
Y
Z
T
V
X


F
Fig. 3.
A
D
E
B
C
H
G


G
E
Fig. 2.
Ω
O
Ω
S
A
S
Q
Q
M
M
R
R
N
X
F
N
V
P
Φ
Δ
V
B
C
K
D
Z

in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut figura B C D circa axem E F; hic, si cuneus super figura intelligatur abscissus, plano quod ita secet planum figuræ, ut intersectio, quæ hic est D D, sit parallela oscillationis axi; deturque distantia centri gravitatis figuræ ab hac intersectione, ut hic A D; itemque subcentrica cunei dicti super eadem intersectione, quæ hic sit D H. Habebitur centrum oscillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad distantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis. Est enim rectangulum D A H, multiplex secundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis distantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravitatis A parallela ducitur axi oscillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad distantiam F A, orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis A *. TAB. XXII. Fig. 4. & 5. * Prop. 16 huj. * Prop. 18. huj.

Hinc manifestum est, si axis oscillationis sit D D, fieri centrum oscillationis H punctum; adeoque longitudinem D H, penduli simplicis isochroni figuræ B C D, esse tunc ipsam subcentricam cunei, abscissi plano per D D, super ipsam D D. Quod unum ab aliis ante animadversum fuit, non tamen demonstratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum super figuris planis inveniantur, persequi non est instituti nostri, & jam in multis nota sunt. Velut, quod si figura B C D sit circulus, erit D H æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit D H ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Unde & ratio apparet cur virga, seu linea gravitate prædita, altero capite suspensa, isochrona sit pen-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. dulo longitudinis subsesquialteræ. Considerando nempe lineam ejusmodi, ac si esset rectangulum minimæ latitudinis.

Quod si figura triangulum fuerit, vertice sursum converso; fit D H $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorsum, $\frac{1}{2}$ diametri.

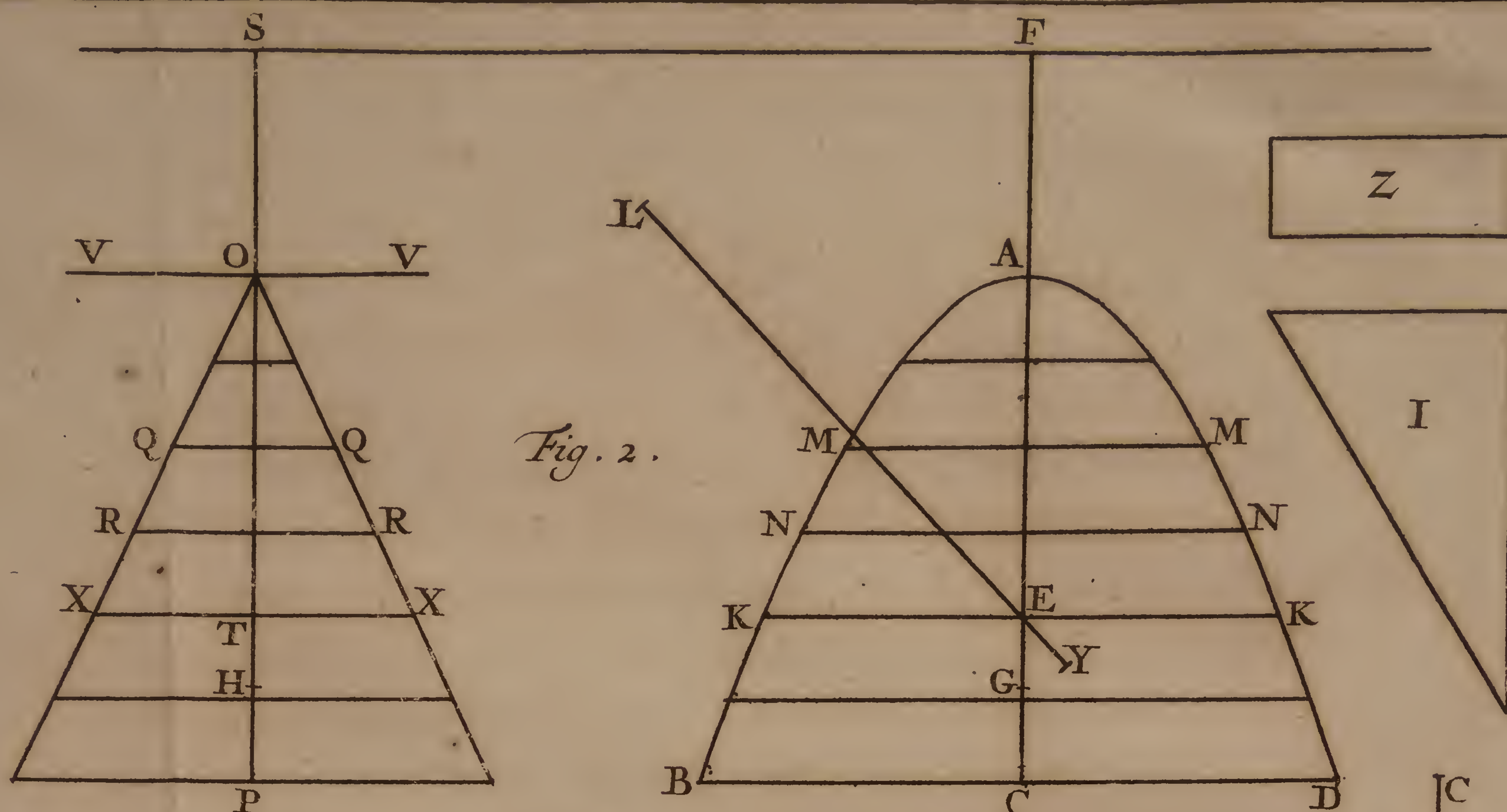
Quod autem propositione 16 demonstratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere sciendum. Nempe, si aliam atque aliam positionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo penduli isochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propositione illa manifestum est.

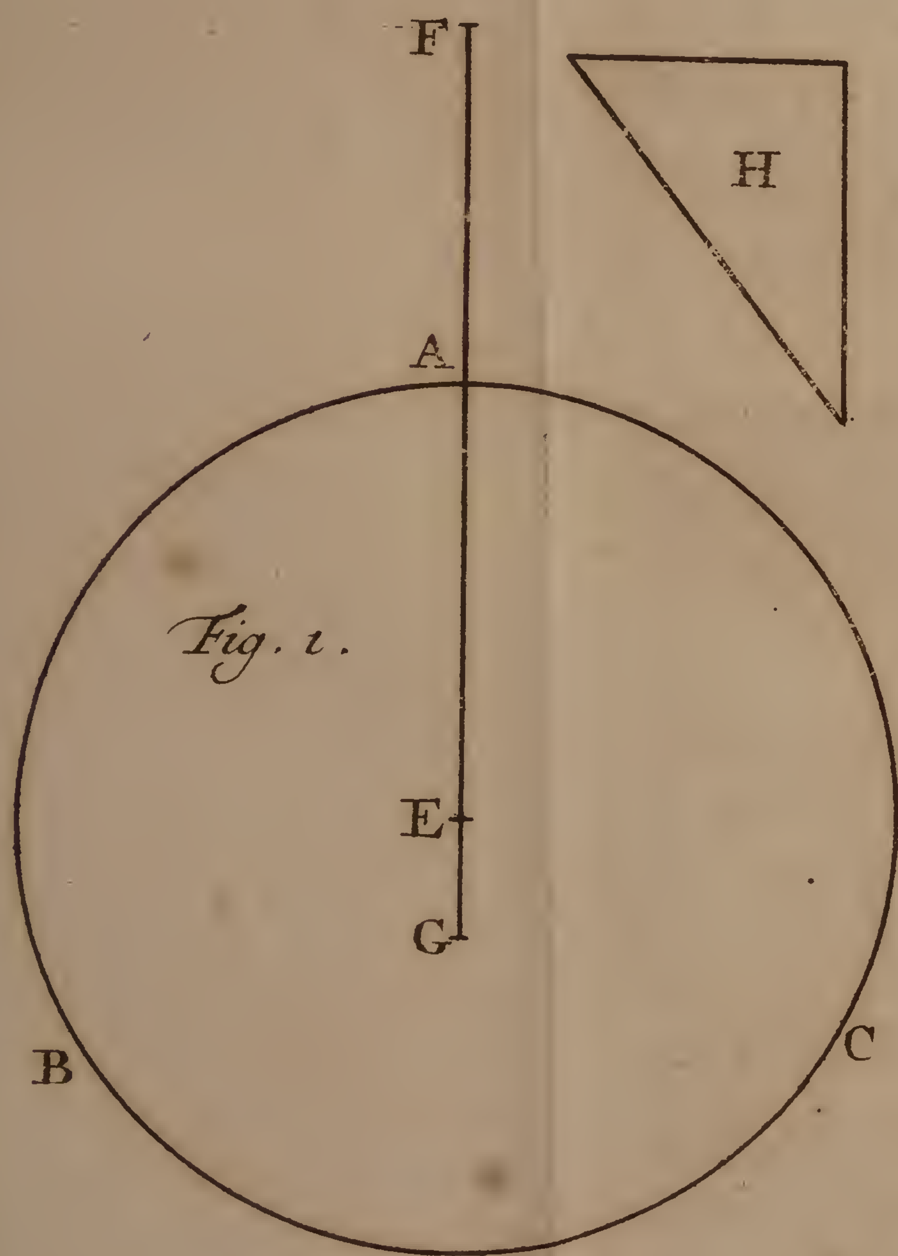
TAB. XXIII. Fig. 1. & 2. Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut si figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus; hic jam habenda est summa quadratorum a distantiis particularum omnium ab recta quæ per centrum gravitatis A intelligitur axi oscillationis parallela; secundum ea quæ prop. 18. exposita fuere. Hoc est summa quadratorum a distantiis ab ipso A centro gravitatis, quoniam figura plana est. Sive etiam summæ quadratorum a distantiis tam ab recta B A C quam ab recta D A. Constat enim quadratum rectæ O A, quam pono esse distantiam unius cujusdam particulæ a centro A, æquari quadratis distantiarum O N, O V, quibus eadem particula abest a rectis B A C, D A *. Atqui summa quadratorum a distantiis ab recta B A C æquatur rectangulo D A H, si D H sit subcentrica cunei super figura abscissi per tangentem D D, parallelam B A *. item summa quadratorum a distantiis ab recta D A æquatur rectangulo B A L, si B L sit subcentrica cunei abscissi per tangentem B D parallelam A D. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, subcentricamque H D cunei prioris, etiam subcentricam L B cunei posterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ simul sumpta faciunt hic spatium applicandum, quod deinceps etiam rectangulum oscillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad distantiam

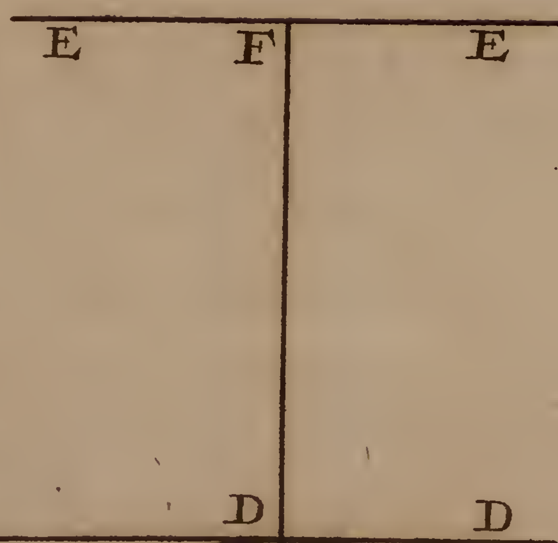
* Per 47. lib. 1. Elem.

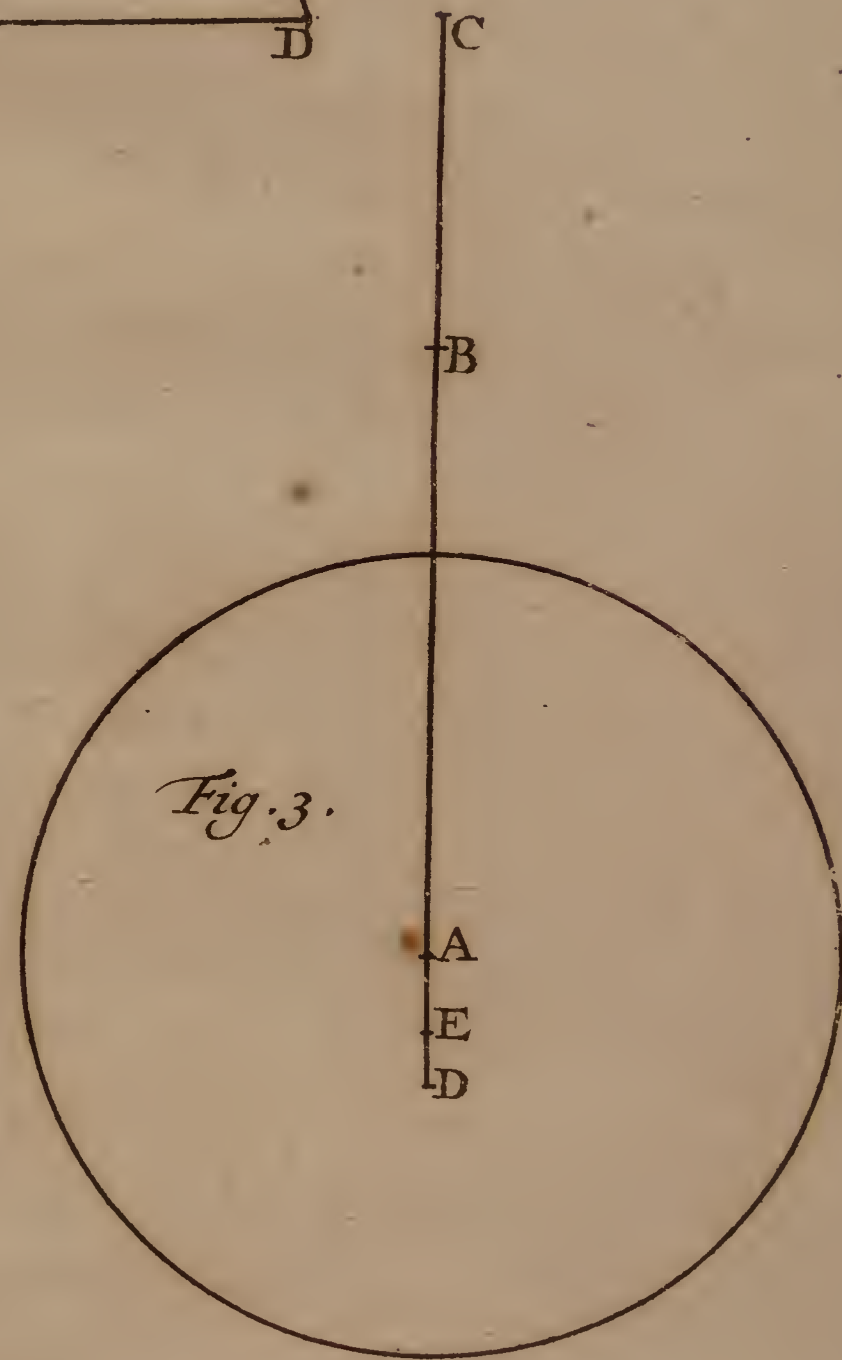
* Prop. 10. huj.

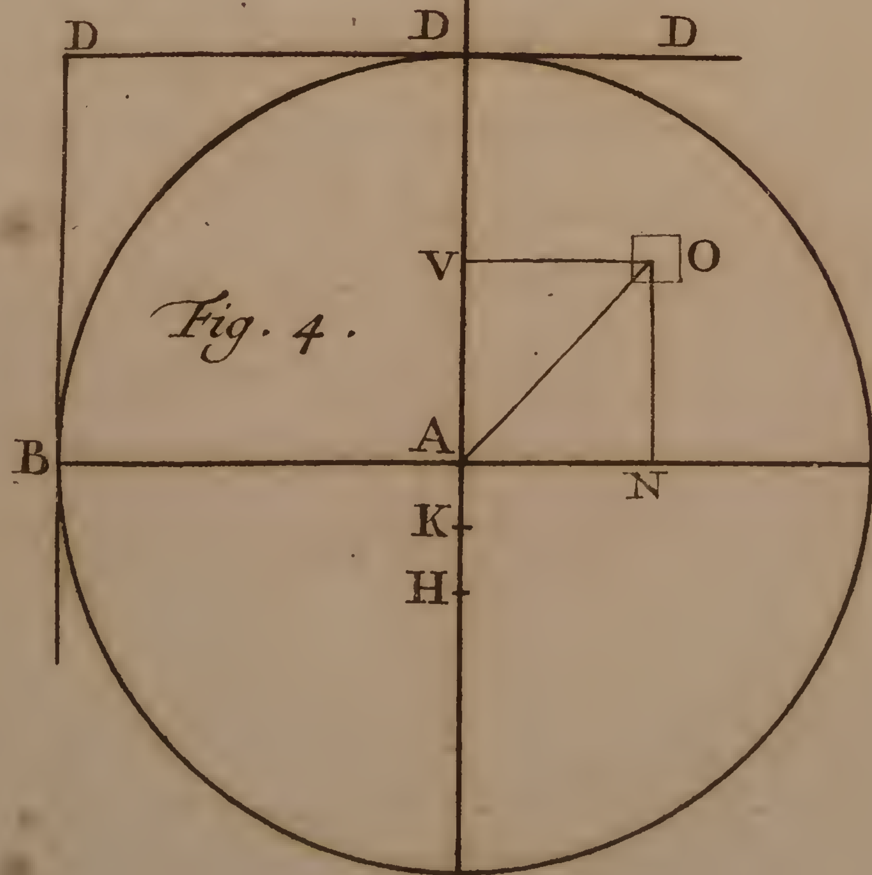
F A,

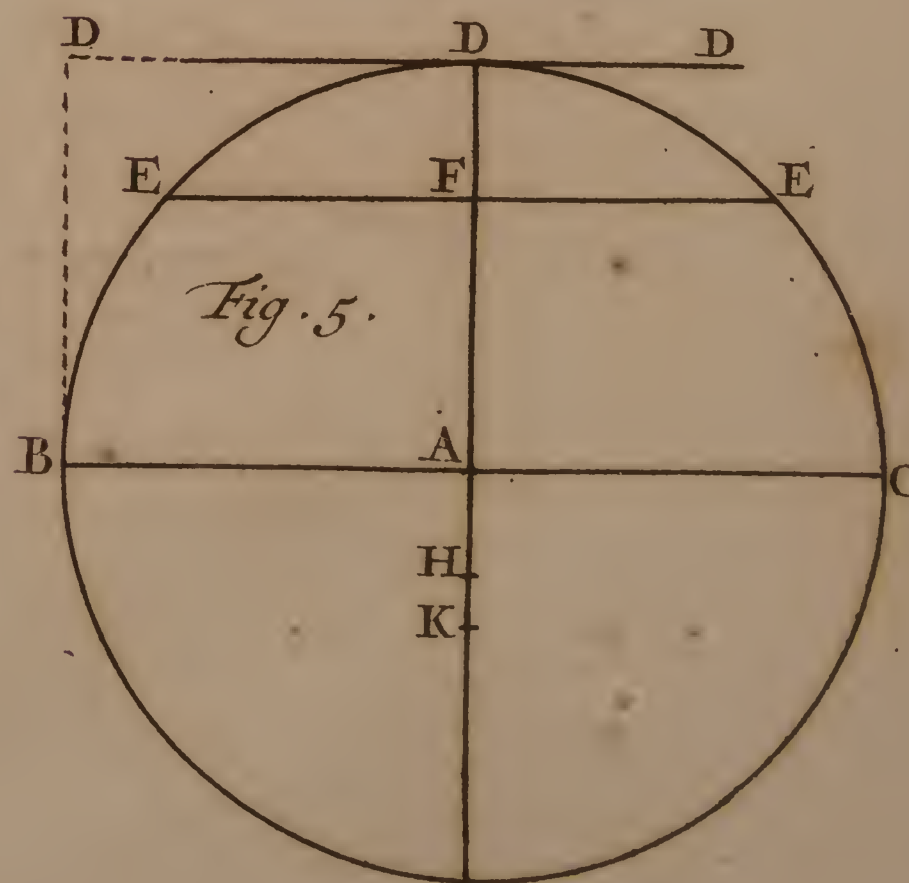

S
F
Z
L
V
O
V
A
Fig. 2.
Q
Q
M
M
I
R
R
N
N
X
X
E
K
K
T
Y
H
G
B
C
D
P


F
H
A
Fig. 1.
E
G
B
C


E
F
E


C
B
Fig. 3.
A
E
D


D
D
D
V
O
Fig. 4.
A
B
C
N
K
H


D
D
D
E
F
E
Fig. 5.
B
A
C
H
K

F A, dabit diſtantiam A K, qua centrum oſcillationis K inferius eſt centro gravitatis A. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Si vero F A ſit axis figuræ B C D, poteſt, pro cuneo abſciſſo per B D ſuper figura tota, adhiberi cuneus ſuper figura dimidia D B M abſciſſus plano per D M. Nam, ſi cunei hujus ſubcentrica ſuper D M ſit O A, diſtantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M ſit N A, æquale eſſe conſtat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, conſtituet quoque planum applicandum ad diſtantiam F A, ut fiat diſtantia A K. TAB. XXIII. Fig. 1. * Prop. 11. huj.

Et horum quidem manifeſta eſt demonſtratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia ſecundum numerum particularum figuræ, æqualia ſint quadratis diſtantiarum à centro gravitatis A; ſive, quod idem hic eſt, ab axe gravitatis axi oſcillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad diſtantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K *. * Prop. 11. huj.

Centrum oſcillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter ſe æqualia eſſe liquet, ſimulque efficere ſemiſſem quadrati à ſemidiametro. Unde, ſi fiat ut F A ad ſemidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit diſtantia A K, à centro gravitatis ad centrum oſcillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia ſumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in ſequentibus figuris planis centra oſcillationis quæſivimus, quæ ſimpliciter adſcripſiſſe ſufficiet. Nempe,

Centrum oſcillationis Rectanguli.

In rectangulo omni, ut C B, ſpatium applicandum, ſive rectangulum oſcillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à ſemidiagonio A C. Unde ſequitur, ſi rectangulum TAB. XXIII. Fig. 3.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. ab aliquo angulorum suspendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi isochronum esse $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

Centrum oscillationis Trianguli isoscelis.

TAB. XXIII. Fig. 4. In triangulo isoscele, cujusmodi C B D, spatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigesimæ quartæ quadrati baseos C D. Unde, si ab angulo baseos ducatur D G, perpendicularis super latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G; sitque A centrum gravitatis trianguli; divisoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipsi B A; erit B K longitudo penduli isochroni, si triangulum suspendatur ex vetrice B. Cum autem ex puncto mediæ basis E suspenditur, longitudo penduli isochroni E K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum isosceles rectangulum, si ex puncto mediæ basis suspendatur, isochronum esse pendulo longitudinem diametro suæ æqualem habenti. Similiterque, si suspendatur ab angulo suo recto, eidem pendulo isochronum esse.

Centrum oscillationis Parabolæ.

In parabolæ portione recta, spatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ basis. Cumque parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur penduli isochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque insuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

TAB. XXIII. Fig. 5. In circuli sectore B C D, si radius B C vocetur r: semi arcus C F, p: semisubtensa C E, b: fit spatium applicandum æquale $\frac{1}{2}rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc est, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A; ponendo A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim B A ∞ $\frac{2br}{3p}$. Si autem suspendatur sector

ex

ex B, centro circuli ſui, fit pendulum ipſi iſochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc eſt, trium quartarum rectæ, quæ ſit ad radium B F ut arcus C F D ad ſubtenſam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis ſubcentricis cuneorum; tum illius qui ſuper ſectore toto abſcinditur, plano ducto per B K parallelam ſubtenſæ C D, cujus cunei ſubcentricam ſuper B K invenimus eſſe $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a ſinum verſum E F; tum illius qui ſuper dimidio ſectore B F C abſcinditur plano per B F, cujus nempe cunei ſubcentricam ſuper B F invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$.

De centro oscillationis.

Sed & alia via, ſectoris centrum oſcillationis, facilius invenitur, quæ eſt hujuſmodi. Intelligatur ſectoris B C D pars minima ſector B C P, qui trianguli loco haberi poteſt. Quadrata autem, à diſtantiis particularum ejus à puncto B, æqualia ſunt quadratis diſtantiarum ab recta B R, bifariam ſectorem dividente, una cum quadratis diſtantiarum ab recta B Q, quæ ipſi B R eſt ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data eſt major, quoniam angulus C B P minimus; ideoque illa pro nullis habenda ſunt.

TAB. XXIII. Fig. 6.

Poſitâ vero B O duarum tertiarum B R, hoc eſt, poſito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R: ut nempe N ſit centrum gravitatis cunei, ſuper triangulo B C P abſciſſi plano per B Q. His poſitis, conſtat quadrata, à diſtantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici ſecundum particularum ejuſdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale cenſendum quadratis diſtantiarum à puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata diſtantiarum harum, ad quadrata diſtantiarum totius ſectoris B C D, ſicut ſector B C P ad ſectorem B C D, hoc eſt, ſicut numerus particularum ſectoris B C P, ad numerum particularum ſectoris B C D; hoc enim facile intelligitur, eo quod ſector B C D dividatur in ſectores qualis B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex ſecundum

nume-

numerum particularum ſectoris B C D, æquale erit quadratis diſtantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, diſtantiam inter ſuſpenſionem & centrum gravitatis ſectoris, dabit longitudinem penduli iſochroni, cum ſector ex B ſuſpenditur *. Eſt autem rectangulum N B O $\infty \frac{1}{2} rr$: diſtantia autem B A, ut jam ante diximus, $\infty \frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli iſochroni, ut ante quoque inventa fuit.

* Prop. 17. huj.

Centrum oſcillationis Circuli, aliter quam ſupra.

Tab. XXIV. Fig. 1.

Eodem modo etiam ſimpliciſſime, in circulo, centrum oſcillationis invenire licet. Sit enim circulus G C F, cujus centrum B; ſectorque in eo minimus intelligatur B C P, ſicut ante in ſectore B C D.

Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum.

Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B *, quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus.

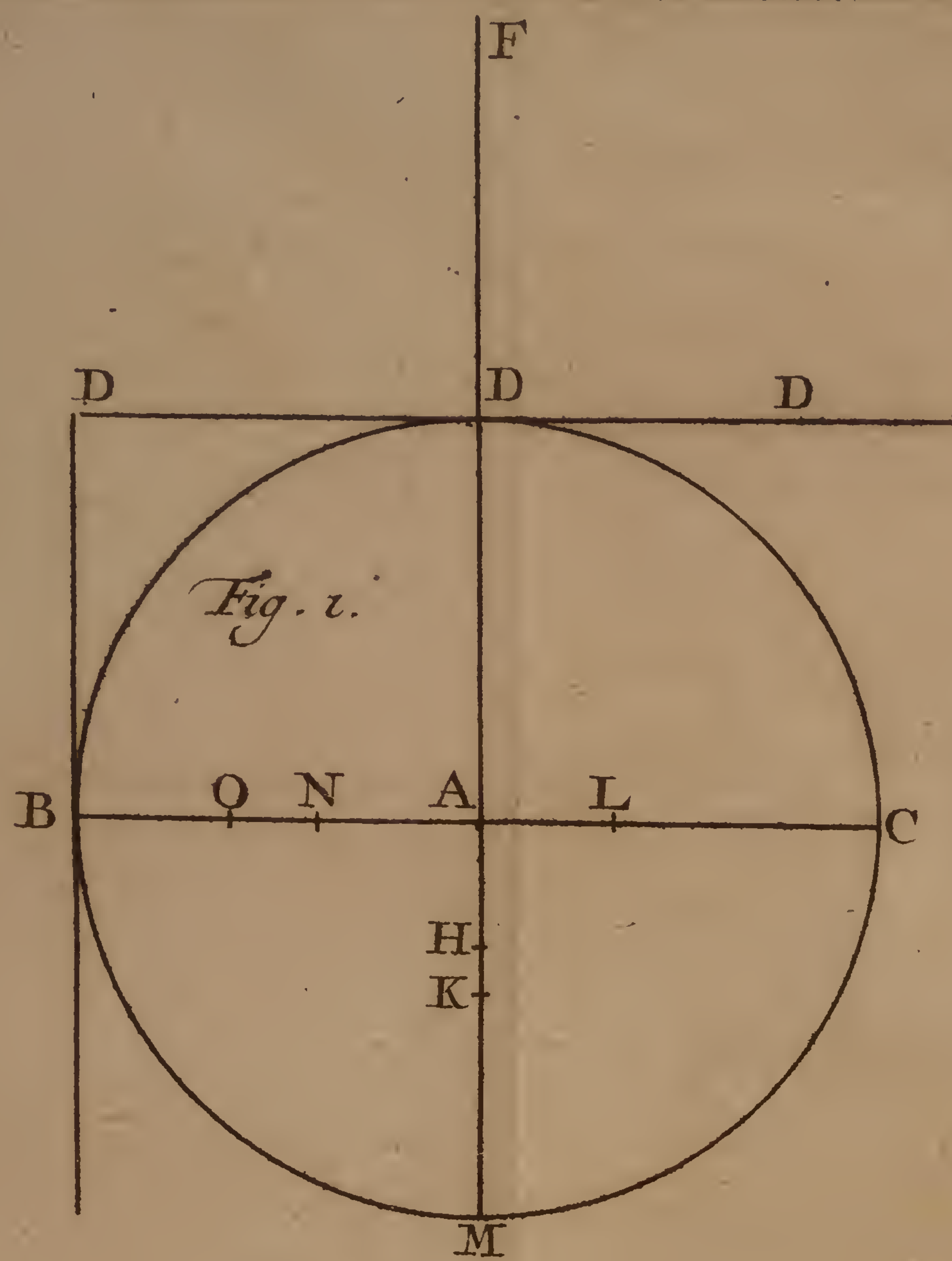
* Prop. 18. huj.

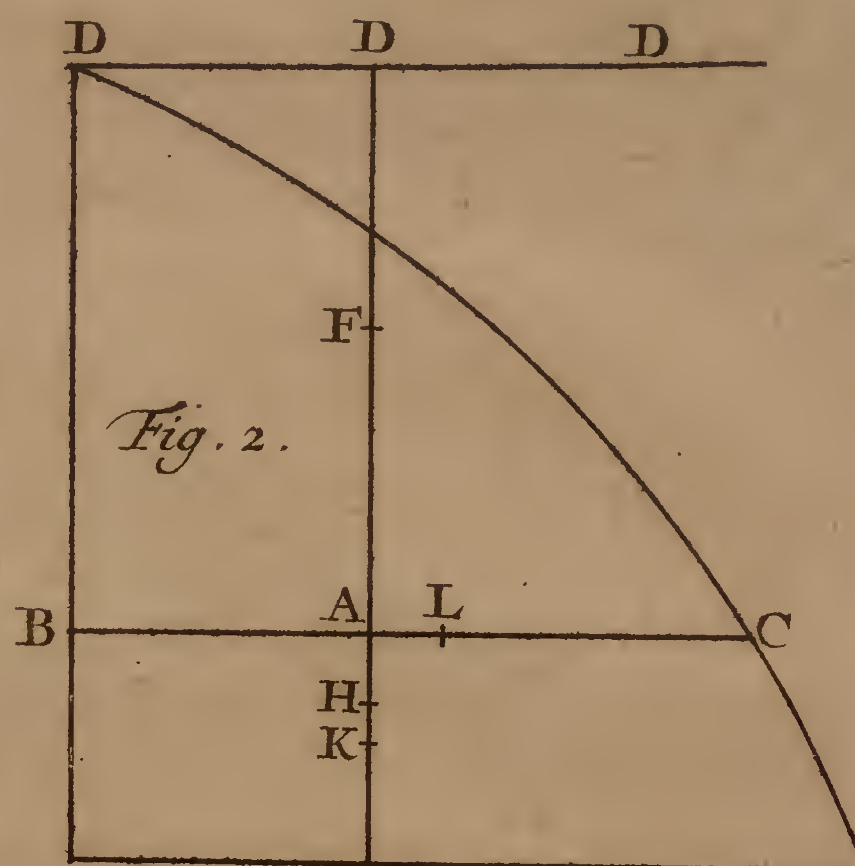
Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.

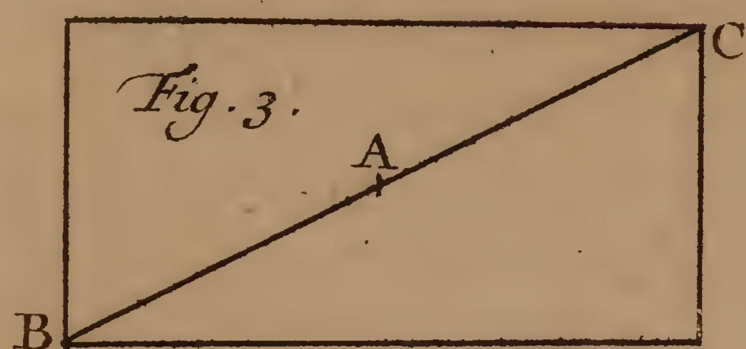
Tab. XXIV. Fig. 2.

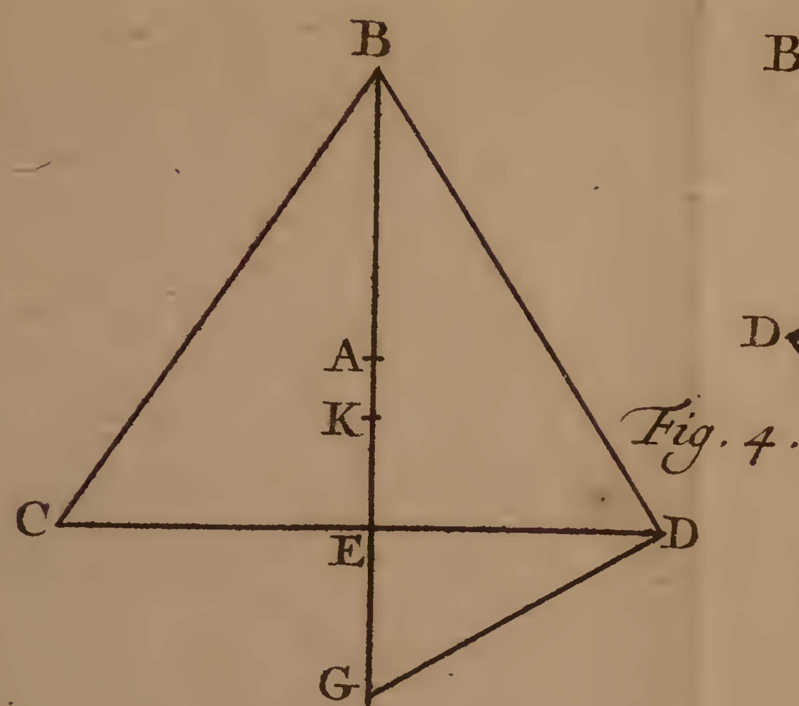
Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc pacto reperitur. Eſto enim circumferentia deſcripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex ſecundum numerum particularum in quas circumferentia diviſa intelligitur, æquatur quadratis à diſtantiis omnium earum

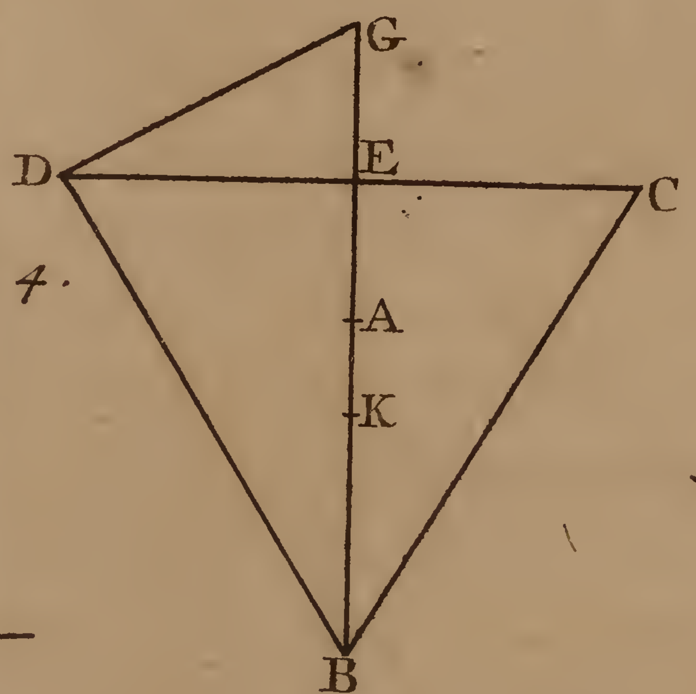
TAB. XXIII.

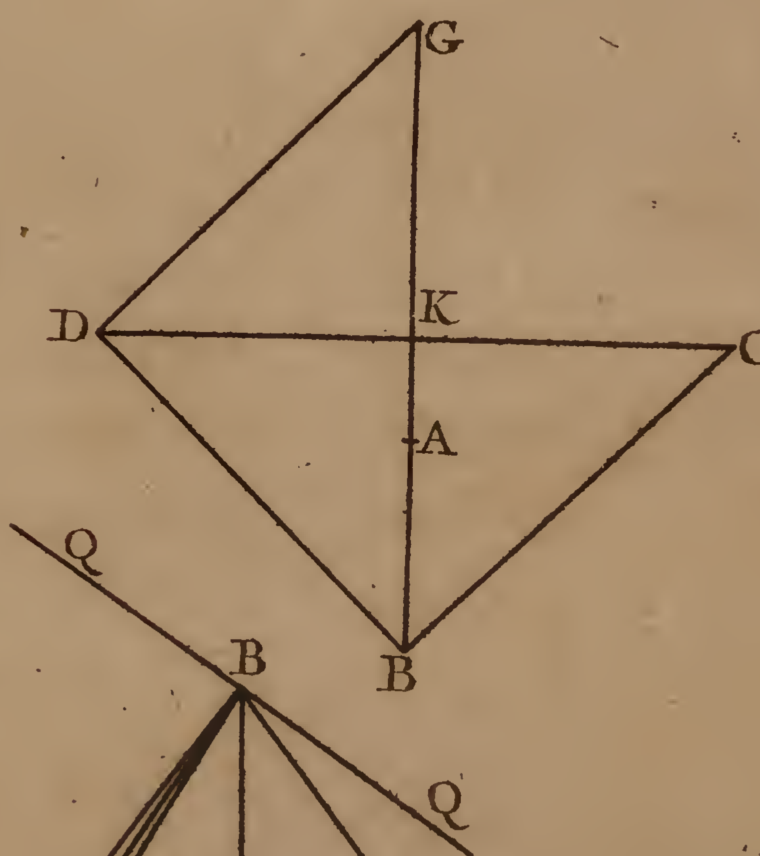

F
D
D
D
Fig. 1.
B
O
N
A
L
C
H
K
M

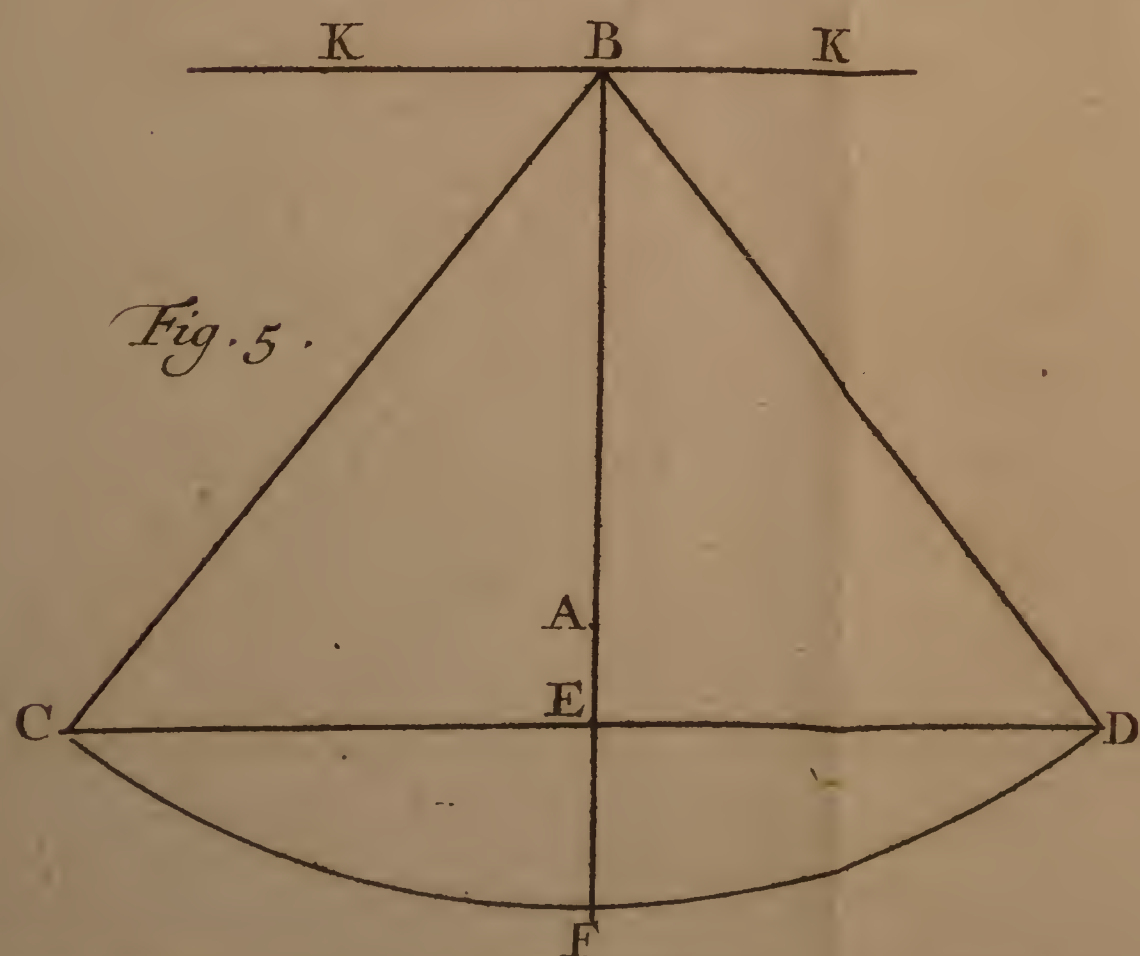

D
D
D
F
Fig. 2.
B
A
L
C
H
K

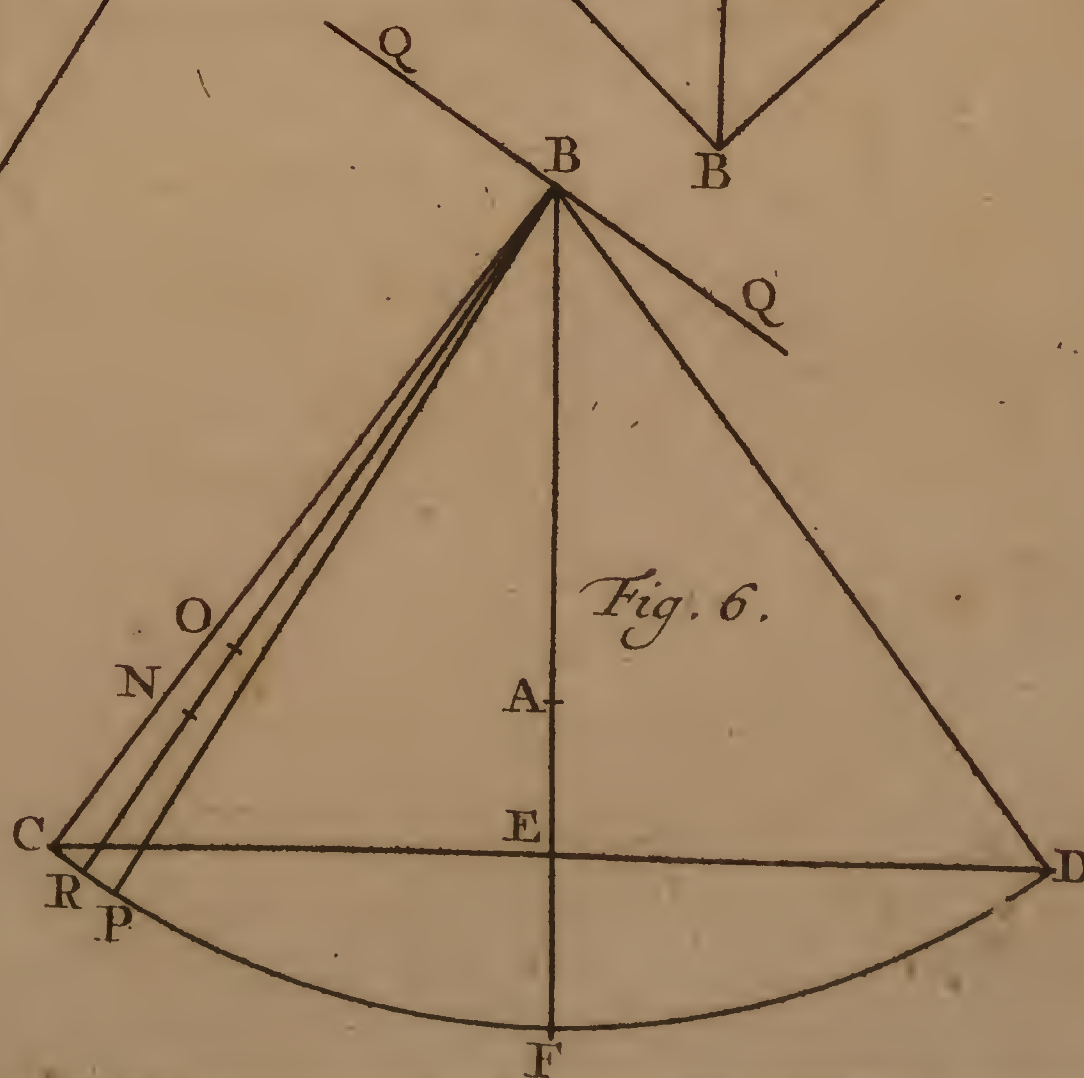

C
Fig. 3.
A
B


B
A
K
Fig. 4.
C
E
D
G


G
D
E
C
A
K
B


G
K
D
C
A
B


K
B
K
Fig. 5.
A
E
C
D
F


Q
B
Q
O
Fig. 6.
N
A
E
C
R
P
D
F

earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic ſpatium applicandum*. Patetque hinc, ſi ſuſpenſio ſit ex G, puncto circumferentiæ, penduli iſochroni longitudinem æquari diametro G F. DE CENTRO OSCILLATIONIS. * Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud abſimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum iſochronum invenitur. Fit enim, ſpatium applicandum, æquale ſemiſſi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una cum vigeſima quarta parte quadrati lateris. At, ſi perimetro polygoni pendulum iſochronum quæratur, fit ſpatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris. TAB. XXIV. Fig. 3.

Loci plani & ſolidi uſus in hac Theoria.

Eſt præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Ut ſi propoſitum ſit, dato puncto ſuſpenſionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B diſtantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, iſochrona ſint pendulo ſimplici longitudinis A B. TAB. XXIV. Fig. 4.

Ponatur A B ∞ a, ductâque C D, quæ ſecet A B ad angulos rectos in E, ſit A E indeterminata ∞ x: E C vel E D ∞ y. Ergo quadratum A C ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex ſecundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis diſtantiarum earundem particularum ab axe ſuſpenſionis A. Ergo quadratum A C, ſive $xx + yy$, applicatum ad diſtantiam A E, quæ nempe eſt inter axem ſuſpenſionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli iſochroni*; quam propterea oportet æqualem eſſe A B ſive a. Itaque $\frac{xx+yy}{x}$ ∞ a. Et yy ∞ $ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, eſſe circumferentiam circuli, cu- * Prop. 17. huj.

De centro oscillationis.

ejus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem $\infty \frac{1}{2} a$, sive F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam A C B D, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo A B isochronam esse.

TAB. XXIV. Fig. 5. Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis A N.

Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & sit O R æqualis $\frac{2}{3}$ O L. Itaque cunei super recta O L, abscissi plano per O H ducto, subcentrica erit O R. Sed cunei alterius super eadem O L, abscissi plano per rectam A H, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa A M. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum O M R. quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit distantiam centri oscillationis lineæ O L, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam A N ∞ a: A M ∞ x: M O vel M L ∞ y. Est ergo rectangulum O M R $\infty \frac{1}{3} yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi M N æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ O L esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x \infty a$. Unde $y \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor A N; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius A N triplum.

Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi O L parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas

nas habeat pendulo ſimplici A N, etiam totum Ellipſeos planum, ex A ſuſpenſum & in latus agitatum, ipſi A N pendulo iſochronum fore. Sed & partem Ellipſeos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abſcindetur. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Cæterum adſcribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

Sit virga A B ponderis expers, ſuſpenſa ex A; oporteatque, ad datum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, ſive infinite parvi exiſtimandi, quæque, ita ſuſpenſa ab A, oſcillationes iſochronas faciant pendulo ſimplici datæ longitudinis A L. TAB. XXIV. Fig. 6.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo A B ∞ a; A L ∞ b; B G ∞ x; C G ∞ y: invenitur æquatio $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, baſes triangulorum C, & D, quæ baſes hic ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus ſimplex $-xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod ſi a ſit nihilo æqualis, hoc eſt, ſi punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, ſit idem cum puncto A; tum futura ſit æquatio $y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc caſu, ſi ſumatur A O ∞ $\frac{2}{3}b$, hoc eſt, ∞ $\frac{2}{3}$ A L, centroque O per A circulus deſcribatur A D N; erunt baſes triangulorum A C, A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutiſſima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D conſtituuntur, magnitudine & ſitu ſibi reſpondentia, centrum oſcillationis habeant punctum L, poſitâ A L ∞ $\frac{3}{4}$ diametri A N; cumque circulus totus ex ejuſmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æqualia habens; manifeſtum eſt, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oſcillationis eſſe in L. TAB. XXV. Fig. 1.

Rurſus, ſi in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, ſeu TAB. XXV. Fig. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. $2a \infty b$; hoc est, si triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A L secet bifariam, erit $y \infty \sqrt{2aa-xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum B A, circumferentia describatur, ea erit locus basium triangulorum acutissimorum B C, B D, quorum nempe, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & sector ejus quilibet, axem habens in recta A L, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifestum est & horum, ex A suspensorum, centrum oscillationis esse punctum L.

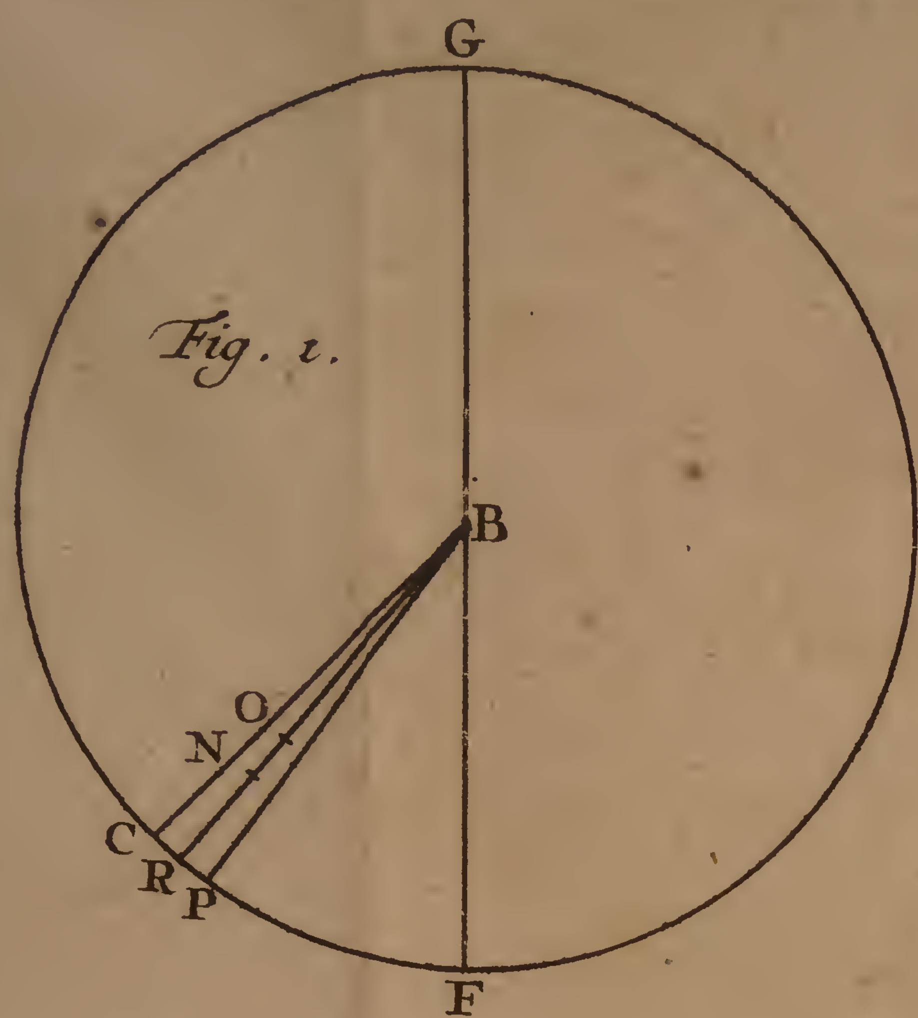
Adeoque quilibet circuli sector, suspensus à puncto quod distet, à centro circuli sui, semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno casu, absque posita dimensione arcus, pendulum sectori isochronum invenitur.

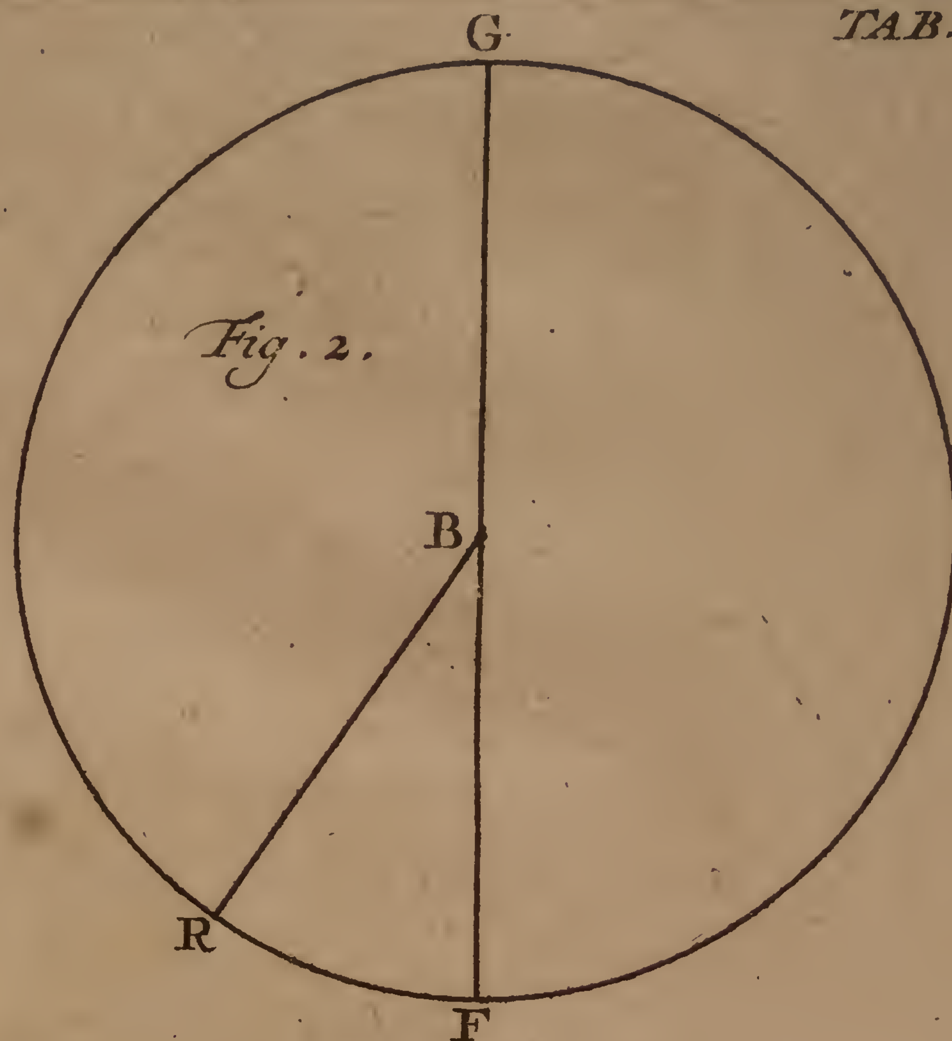
TAB. XXV. Fig. 3. & 4. Porro, ad universalem constructionem æquationis primæ, $y \infty \sqrt{2ab-2aa-\frac{8}{3}ax+\frac{4}{3}bx-xx}$, dividatur A L bifariam in E, & adponatur ad B E pars sui tertia E F; eritque F centrum describendi circuli; radius autem F O æqualis sumendus ei, quæ potest duplum differentiæ quadratorum A E, E F.

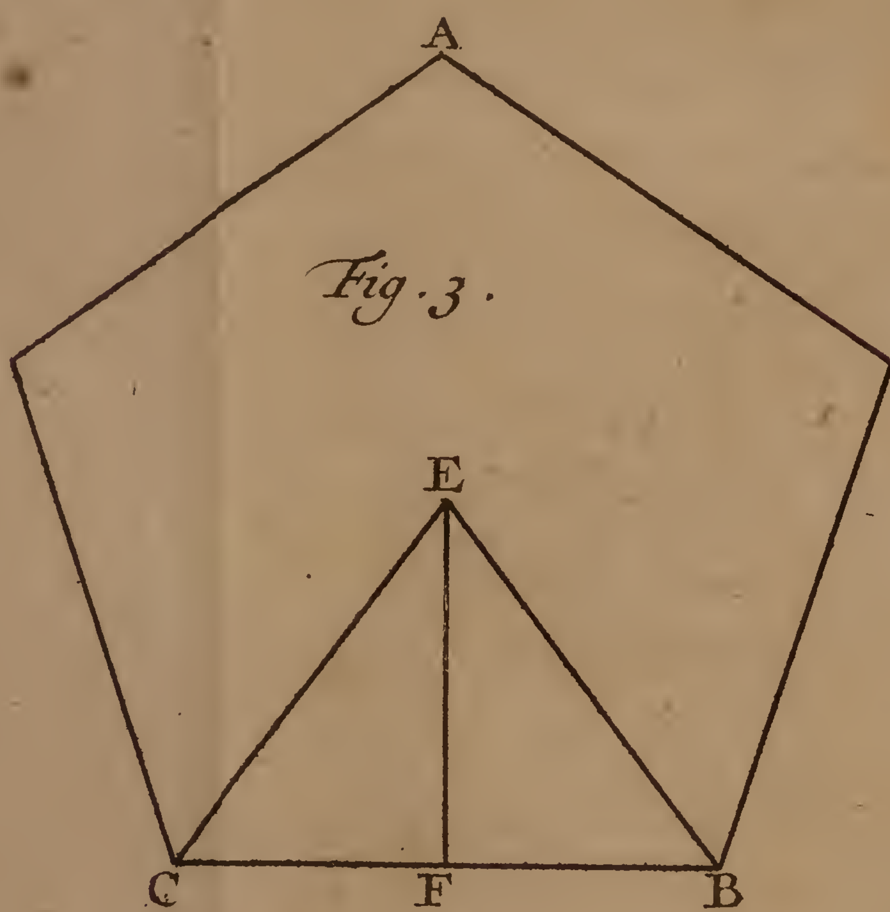
Si itaque, ex puncto B, ad descriptam circumferentiam triangula duo paria acutissima constituantur, ut B C, B D; illorum, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L. Quare & portionis cujuslibet descripti circuli, cujus portionis vertex sit in B, axis vero in recta A L, quales sunt utraque C B D; posita suspensione ex A; centrum oscillationis idem punctum L esse constat. Atque adeo etiam circuli segmentorum K O N, K M N, quæ facit recta K B N perpendicularis ad A B.

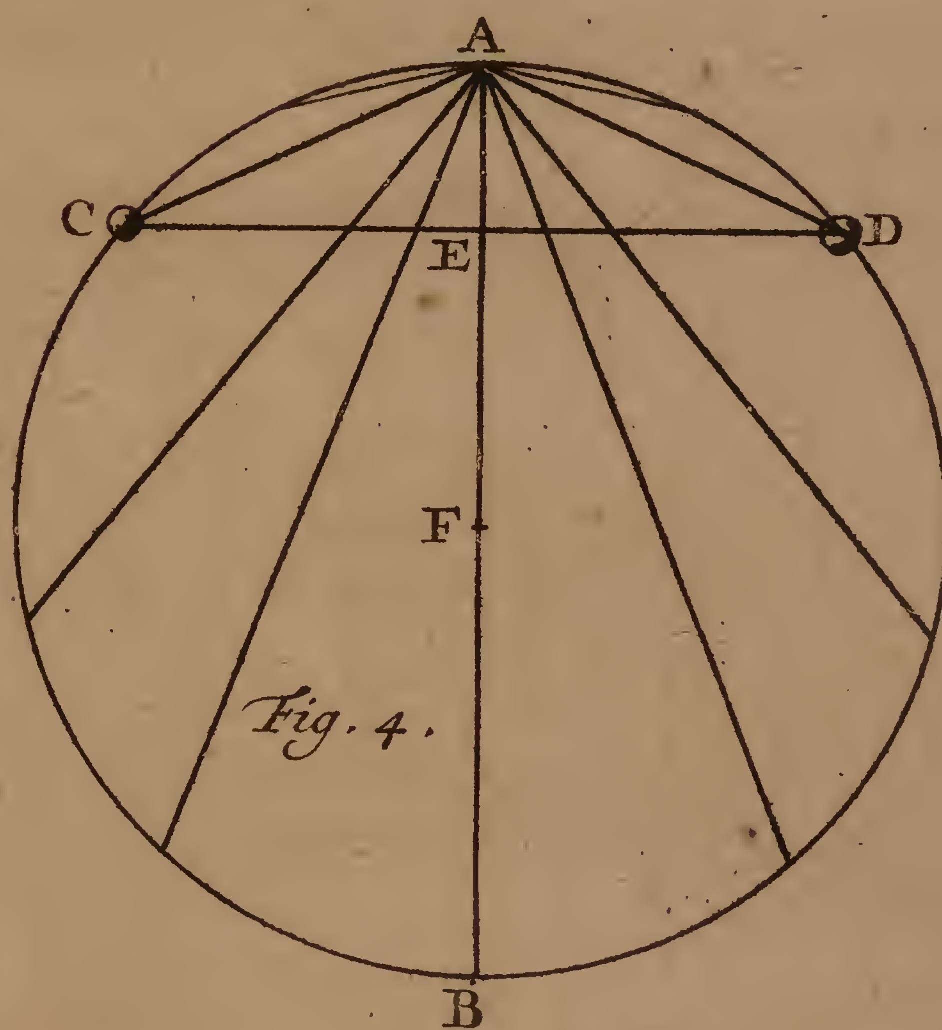
Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertisse sufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oscillationis figurarum rectarum, seu quæ æqualiter ad axem utrinque constitutæ sunt; ut trianguli isoscelis, vel parabolicæ sectionis rectæ; etiam obliquarum,

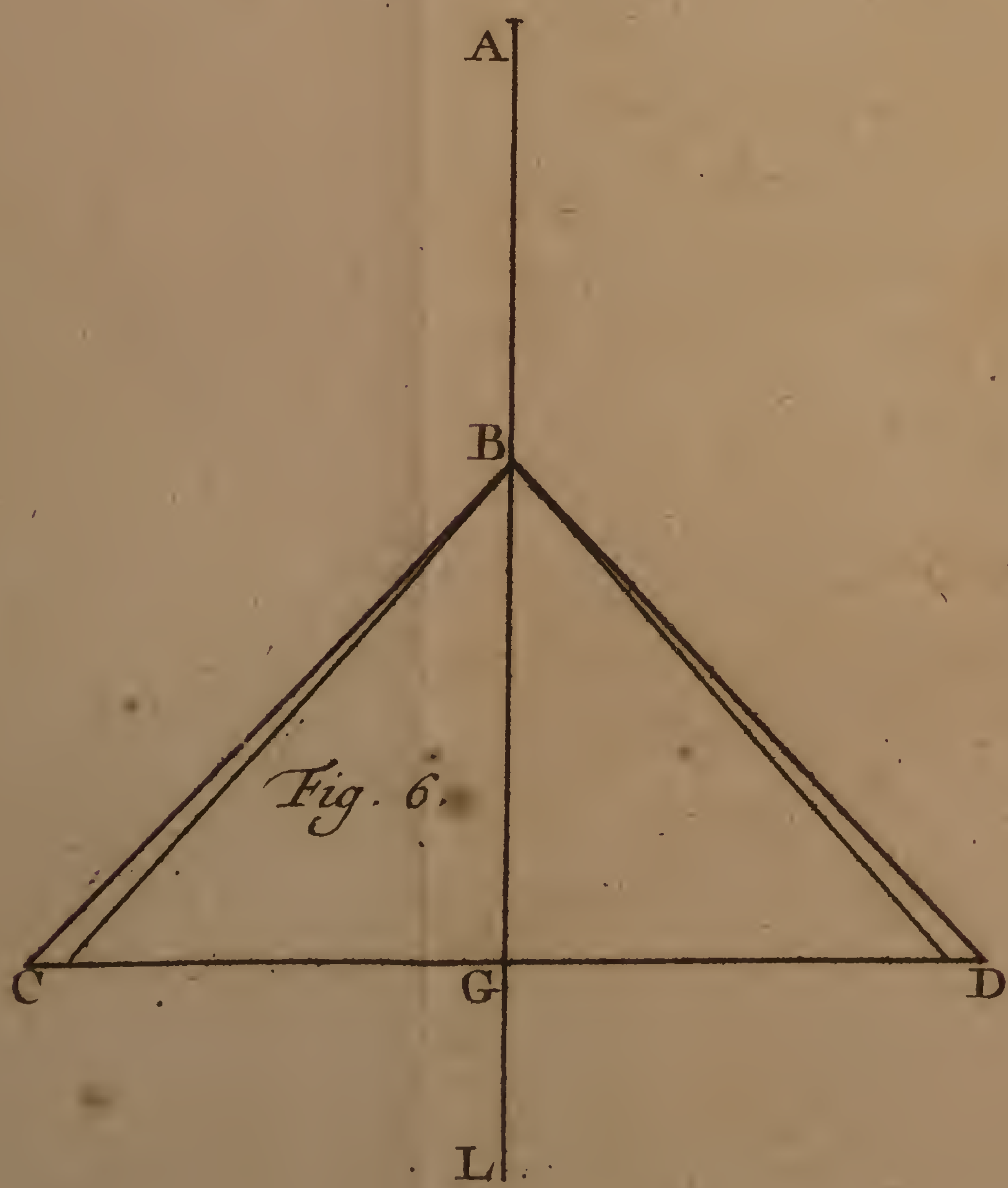
quæ

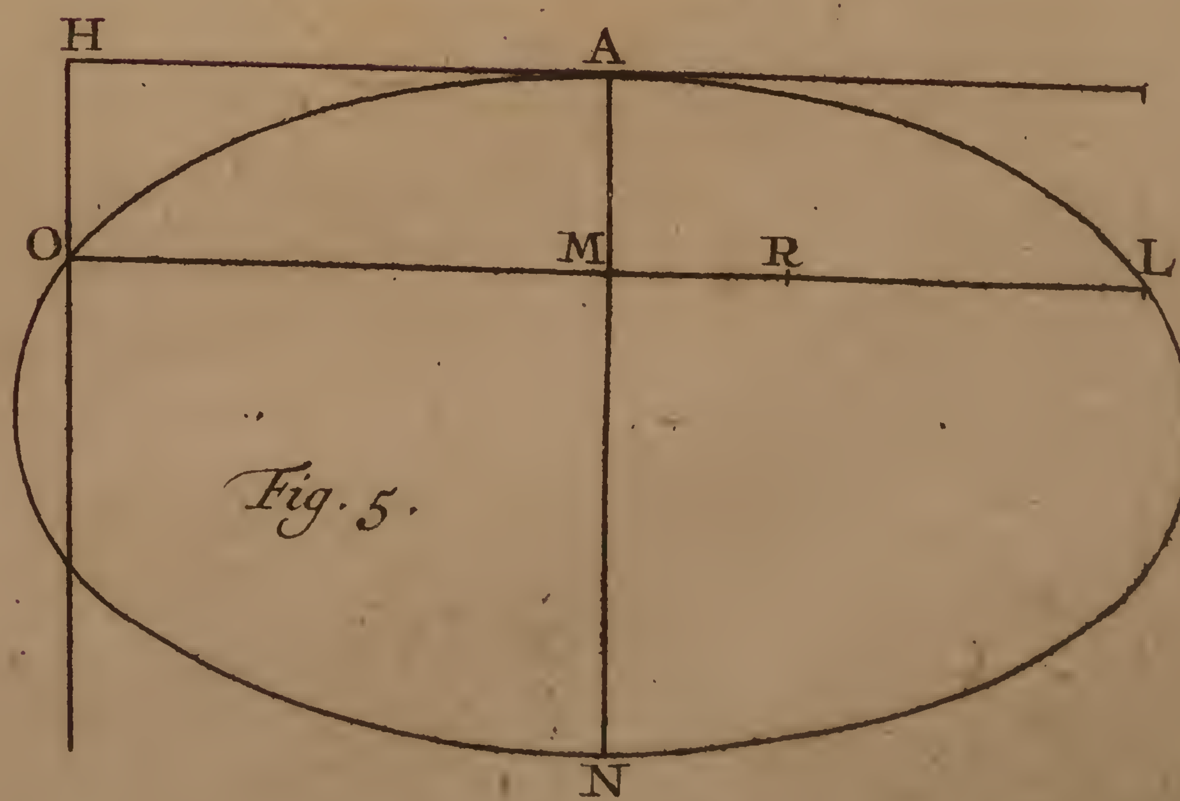

G
Fig. 1.
B
O
N
C
R
P
F


G
Fig. 2.
B
R
F


A
Fig. 3.
E
C
F
B


A
C
E
D
F
Fig. 4.
B


A
B
Fig. 6.
C
G
D
L


H
A
O
M
R
L
Fig. 5.
N

quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli ſcaleni, & parabolæ non rectæ, centra oſcillationis haberi. Ut ſi, exempli gratia, triangulum B A C iſoſceles, cujus axis A D, à puncto E ſuſpenſum intelligatur; ſit vero & aliud triangulum ſcalenum F A G, axem eundem habens A D, & baſin F G æqualem baſi B C; etiam hoc triangulum, ex E ſuſpenſum, priori B A C iſochronum eſſe dico. DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XXVII. Fig. 1.

Quia enim virga, ſeu linea gravis, F G, affixa virgæ ſine pondere E D in D, ſitu obliquo, ſuſpenſaque ex E, iſochrona eſt virgæ B C, ſimiliter in D affixæ *; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem A D ſecant in iisdem punctis, atque inter ſe æquales ſunt: neceſſe eſt tota triangula, quæ ex lineis, ſeu virgis iisdem compoſita intelligi poſſunt, iſochrona eſſe. In aliis figuris ſimilis eſt demonſtratio.

* Prop. 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

Quomodo, in ſolidis figuris, oſcillationis centra inveniantur.

In ſolidis porro figuris facile quoque, per ante demonſtrata, centrum oſcillationis invenire licebit. Si enim ſit ſolidum A B C, ſuſpenſum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis ſit F: ductis jam per F planis E F D, G F H, quorum poſterius ſit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propoſitionem 14, ſummis quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi A B C à plano G F H, itemque à plano E F D; hoc eſt, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia ſecundum numerum dictarum particularum, æqualia ſint dictis quadratorum ſummis; rectangula hæc applicata ad diſtantiam E F, qua nempe axis ſuſpenſionis diſtat à centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius eſt centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propoſitione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot. TAB. XXV. Fig. 5.

Centrum oscillationis in Pyramide.

TAB. XXVI. Fig. 1.

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, basin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, sit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

Hic figura plana proportionalis O V V, à latere adponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis O P V, quæ nempe supersunt, cum, à rectangulis Ω P, auferuntur semiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

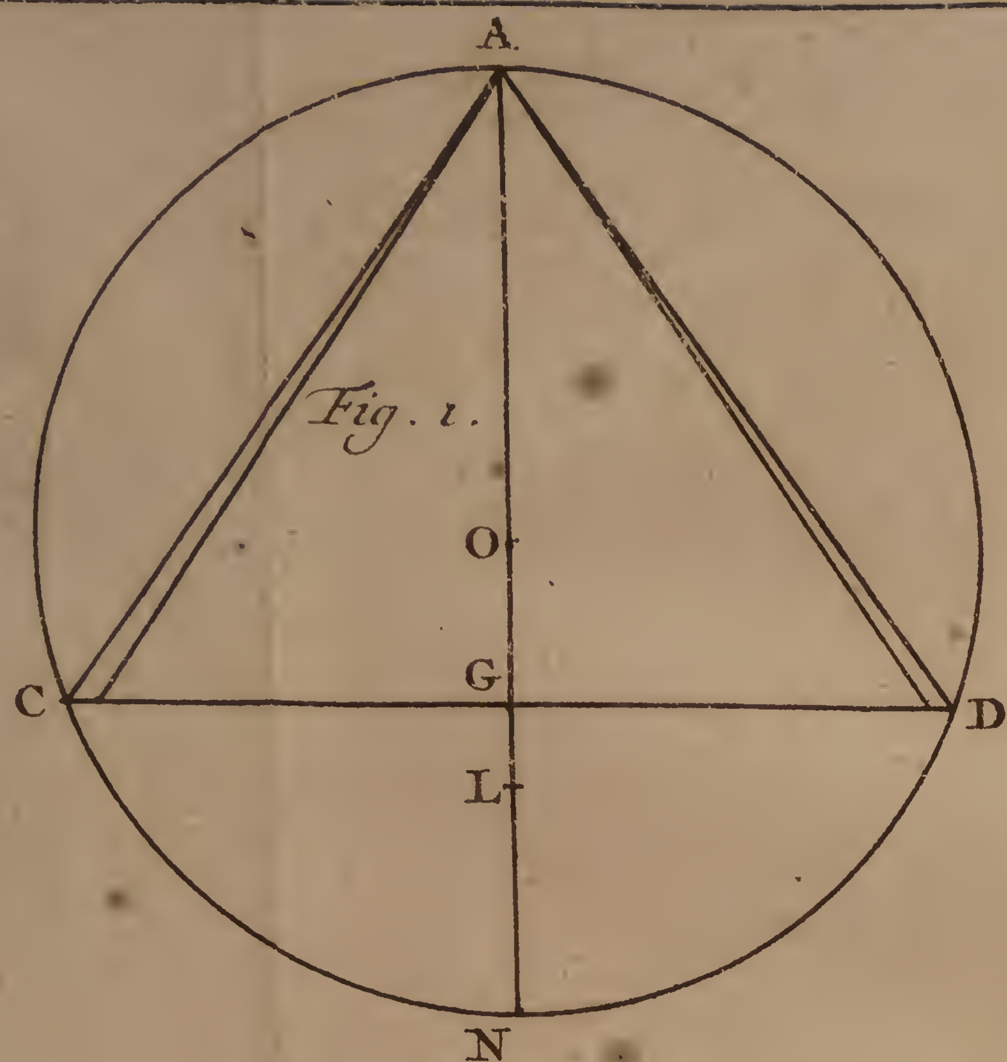
Sicut enim inter se sectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipsis in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V, distabit tribus quartis diametri O P à vertice O.

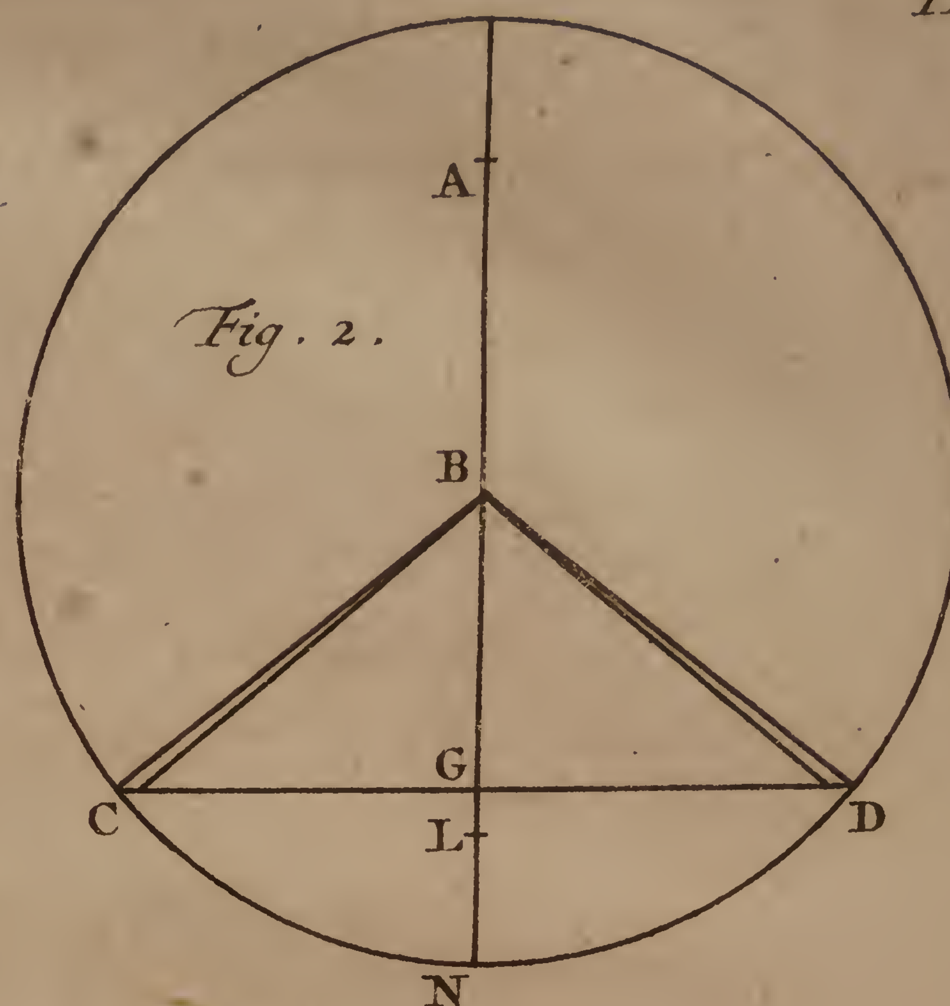
Intellecto porro horizontali plano N E, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V secet secundum R F; inventâque subcentricâ cunei, super figurâ O V V abscissi plano per O Ω, quæ subcentrica sit O G, (est autem $\frac{4}{5}$ diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis distantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano N E, particularum solidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale $\frac{3}{80}$ quadrati O P, vel quadrati A D.

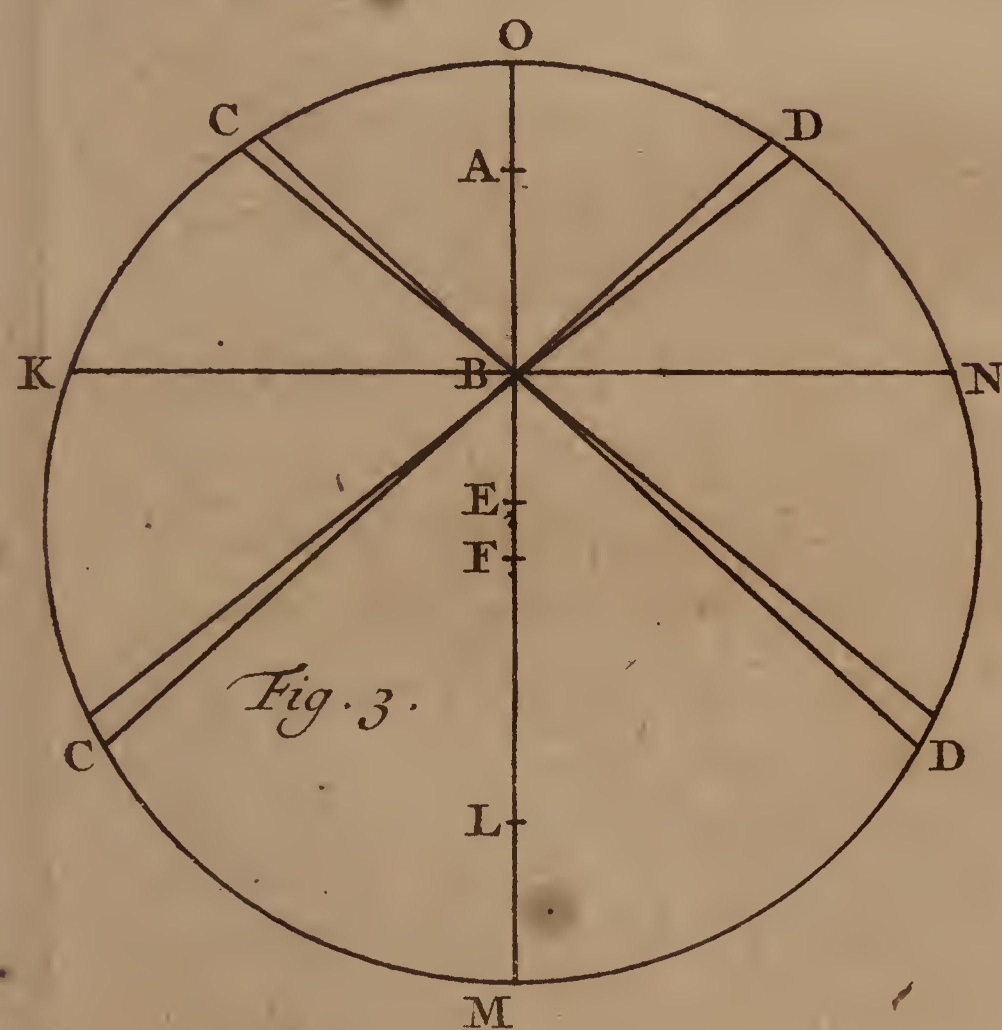
* Prop. 10. huj.

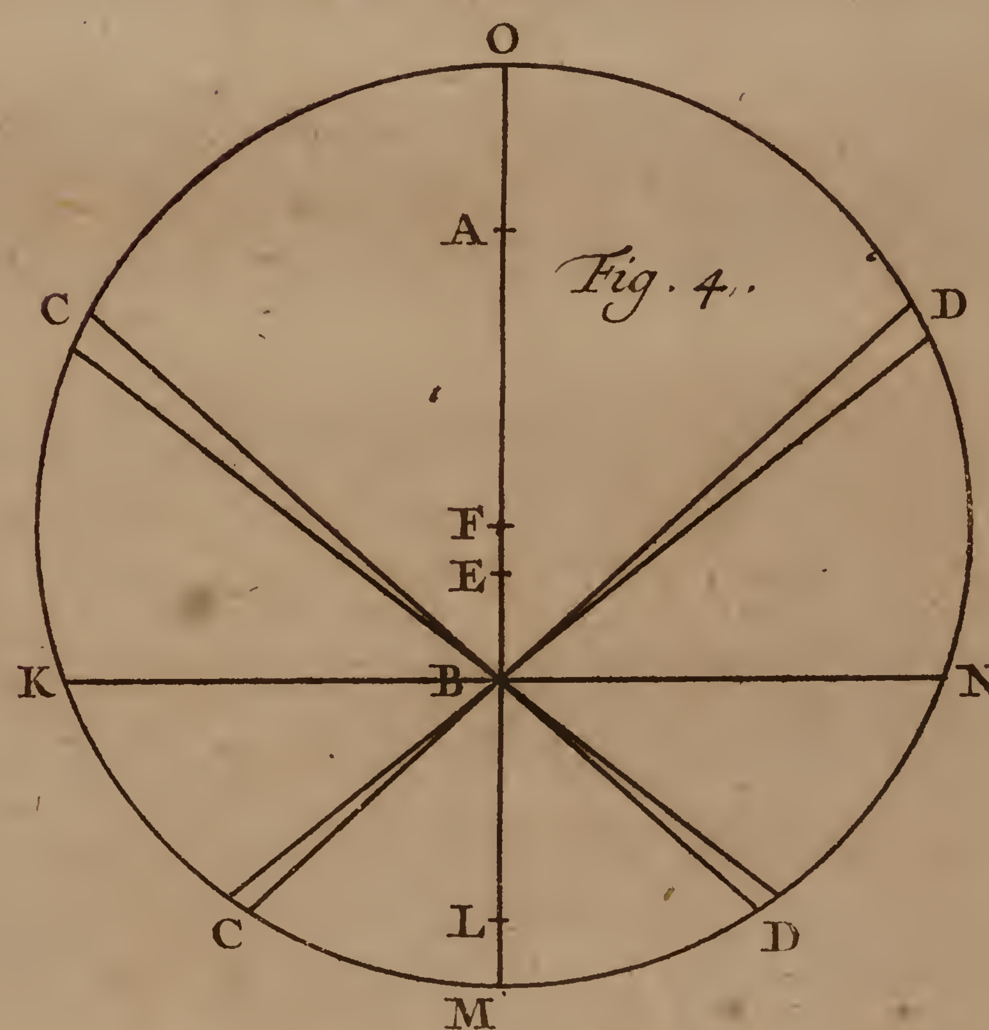
Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda primo subcentrica cunei, super quadratâ basi pyramidis B C abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit B K; estque $\frac{2}{3}$ B C. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P; quæ sit Φ P; estque $\frac{3}{10}$ P V. Inde, divisâ bifariam P V in Δ, si fiat ut Δ P ad P Φ, hoc est, ut 5 ad 3, ita rectangulum B D K, quod est $\frac{1}{12}$ quadrati B C, ad aliud spatium Z; erit hoc, multiplex secundum nu-

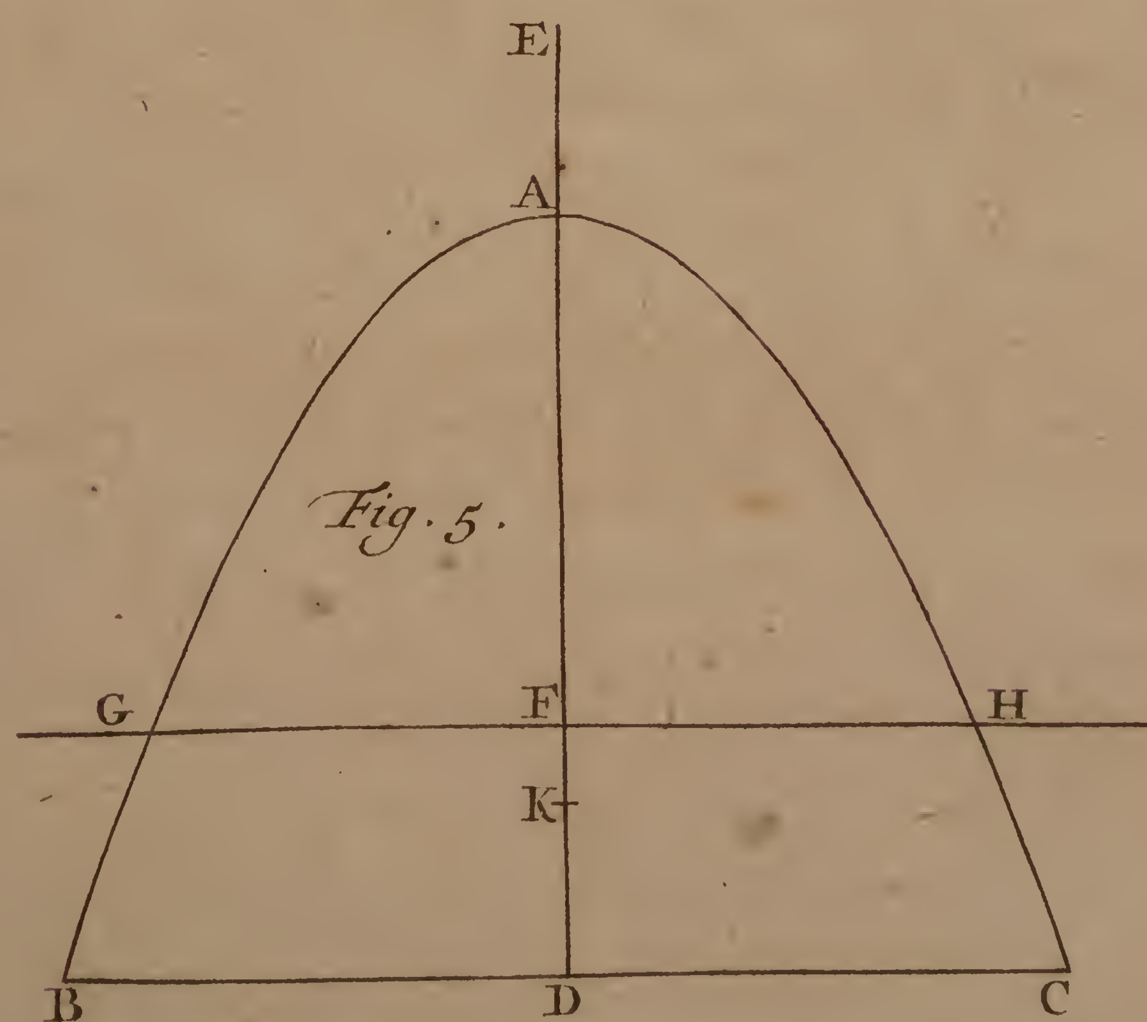
TAB. XXV.

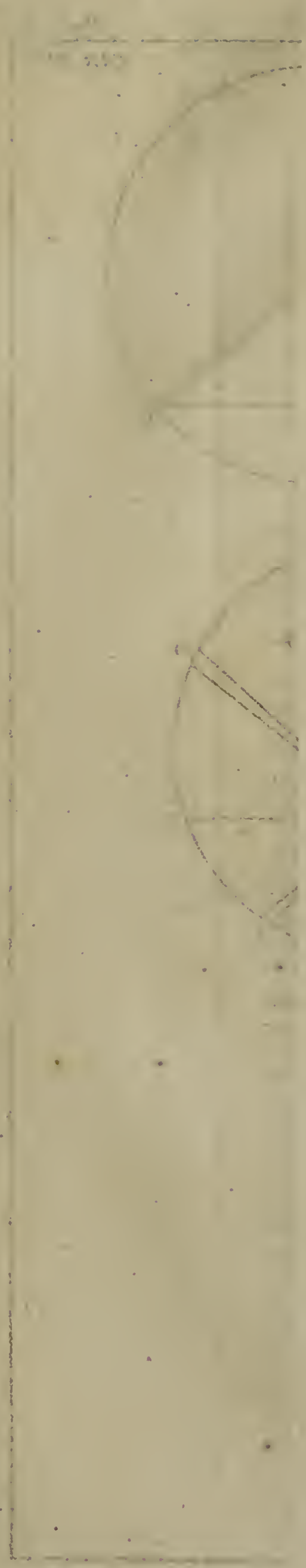

A
Fig. 1.
O
G
C
D
L
N


A
Fig. 2.
B
G
C
D
L
N


O
C
D
A
K
B
N
E
F
Fig. 3.
C
D
L
M


O
A
Fig. 4.
C
D
F
E
K
B
N
C
L
D
M


E
A
Fig. 5.
G
F
H
K
B
D
C



numerum particularum solidi A B C, æquale quadratis distantiarum à plano A D*. Apparet autem, fieri spatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati B C.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 15. huj.

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati A D, cum $\frac{1}{20}$ quadrati B C. Unde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda, A E æqualis $\frac{3}{4}$ A D; fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$ A D, atque insuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionialis.

Centrum oscillationis Coni.

Quod si A B C conus fuerit, omnia eodem modo se habebunt, nisi quod spatium Z hic sit æquale rectangulo Δ P Φ *, hoc est $\frac{3}{20}$ quadrati P V vel B D, sive $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Quare, totum spatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati A D, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Ac proinde, posita suspensione ex vertice A, fiet E S, qua centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$ A D, & $\frac{1}{20}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifestum est, si A D, D B æquales sint, hoc est, si conus A B C sit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D.

* Prop. 15. huj.

Sequitur quoque porro, ex propositione 20, conum hunc rectangulum, si ex D centro baseos suspendatur, isochronum fore sibi ipsi ex vertice A suspenso, quemadmodum & de triangulo rectangulo supra ostensum fuit.

Centrum oscillationis Sphæræ.

Si A B C sit sphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, O V H, ex parabolis composita, quarum basis communis O H, æqualis sphæræ diametro A D. Sectâ vero sphærâ planis per centrum E, quorum B C sit hori-

TAB. XXVI. Fig. 2.

horizonti parallelum, A D vero verticale: ut inveniatur summa quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda est distantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ sit Φ P, estque $\frac{2}{5}$ V P. Deinde, divisâ P V bifariam in Δ, constat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum sphæræ A B C, æquari quadratis distantiarum à plano A D*. Est autem rectangulum Δ P Φ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati P V, vel quadrati B E.

* Prop. 15. in fine.

Atqui, quadrata distantiarum à plano B C, æqualia esse liquet quadratis distantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo spatium applicandum, in sphæra A B C, erit duplum rectanguli Δ P Φ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio E B.

Itaque, si sphæra suspensa sit ex puncto in superficie sua A, erit E S, à centro sphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ semidiametri A E. Totaque A S æqualis $\frac{7}{10}$ diametri A D. Si vero ex puncto alio, ut L, sphæra suspensa sit; erit E S æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus L E, E B.

Centrum oscillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si cylindrus à centro basis superioris suspendatur, fit longitudo penduli isochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si à puncto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni $\frac{3}{4}$ axis, cum $\frac{1}{4}$ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad axem, id est, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis.

Cen-

Centrum oſcillationis Conoidis Hyperbolici.

In conoide quoque hyperbolico centrum oſcillationis inveniri poteſt. Si enim, exempli gratia, ſit conoides cujus ſectio per axem, hyperbola B A B; axem habens A D, latus tranſverſum A F: erit figura plana ipſi proportionalis B K A K B, contenta baſi B B, & parabolicæ lineæ portionibus ſimilibus A K B, quæ parabolæ per verticem A tranſeunt, axemque habent G E, dividentem biſariam latus tranſverſum A F, ac parallelum baſi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum diſtat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B; eſtque axis A D ad A L, ſicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum ſesquialtera A D. Deinde & diſtantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri poteſt, atque etiam ſubcentrica cunei ſuper figura B K A K B, abſciſſi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei ſubcentrica, ſuper ipſa A P, inveniri quoque poteſt; atque ex his conſequenter centrum agitationis conoidis, in quavis ſuſpenſione; dummodo axis, circa quem movetur, ſit baſi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, ſi axis A D lateri tranſverſo A F æqualis ponatur, ſpatium applicandum æquari $\frac{1}{20}$ quadrati A D, cum $\frac{31}{200}$ quadrati D B. Tunc autem A L eſt $\frac{7}{10}$ A D. TAB. XXVI. Fig. 3.

Unde, ſi conoides hujuſmodi ex vertice A ſuſpendatur, invenitur longitudo penduli iſochroni, A S, æqualis $\frac{27}{35}$ A D, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

Centrum oſcillationis dimidii Coni.

Denique & in ſolidis dimidiatis quibuſdam, quæ fiunt ſectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Ut ſi ſit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum ſemicirculi baſeos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum eſt, quoniam A D eſt $\frac{3}{4}$ rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, ſicut quadrans circumferentiæ circuli TAB. XXVII. Fig. 2.

 ad

ad radium, ita sint $\frac{2}{3}$ C B ad B E. Tunc enim E est centrum gravitatis semicirculi baseos, ideoque in A E centra gravitatis omnium segmentorum semiconi A B D, basi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, O V V, eadem est quæ in cono toto supra descripta fuit: per quam nempe invenietur summa quadratorum, à distantiis particularum semiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata distantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, sicut supra prop. 14. adhibenda est, cujus nempe sectiones verticales, exhibeant lineas proportionales sectionibus sibi respondentibus in semicono A B C. & hujus figuræ cognoscenda est distantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem esse constat distantiæ D N, centri gr. semiconi à plano trianguli A B. positâque H G subcentricâ cunei abscissi super figura S Z Y, ducto plano per S Y, noscendum est rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, secundum numerum particularum semiconi A B C, æquabitur quadratis distantiarum semiconi in planum M D O. Licebit vero cognoscere rectangulum illud G F H, etiamsi subcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

Diximus supra, cum de cono ageremus, quadrata distantiarum à plano per axem ejus, æquari $\frac{1}{80}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{1}{20}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in semicono A B C, quadrata distantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano A B, ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{3}{20}$ quadrati B C. Ponendo autem A B ∞ a; B C ∞ b; & quadrantem circumferentiæ, radio B C descriptæ, ∞ q; fit E B ∞ $\frac{2bb}{3q}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, sive G F ∞ $\frac{1bb}{2q}$.

Cujus

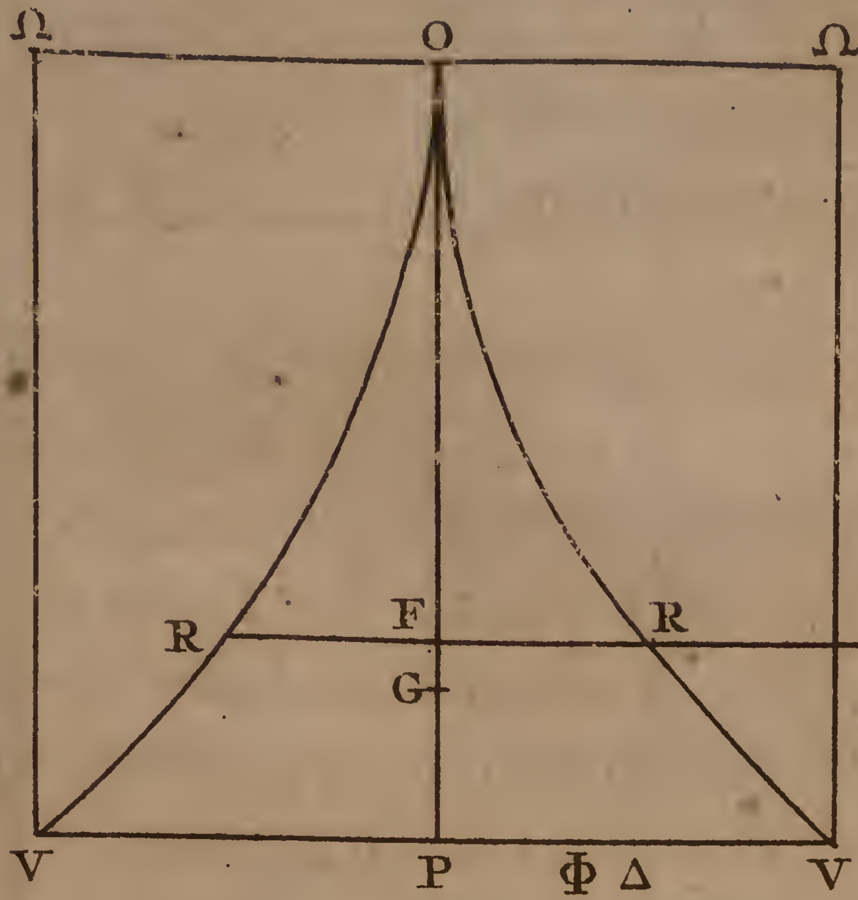
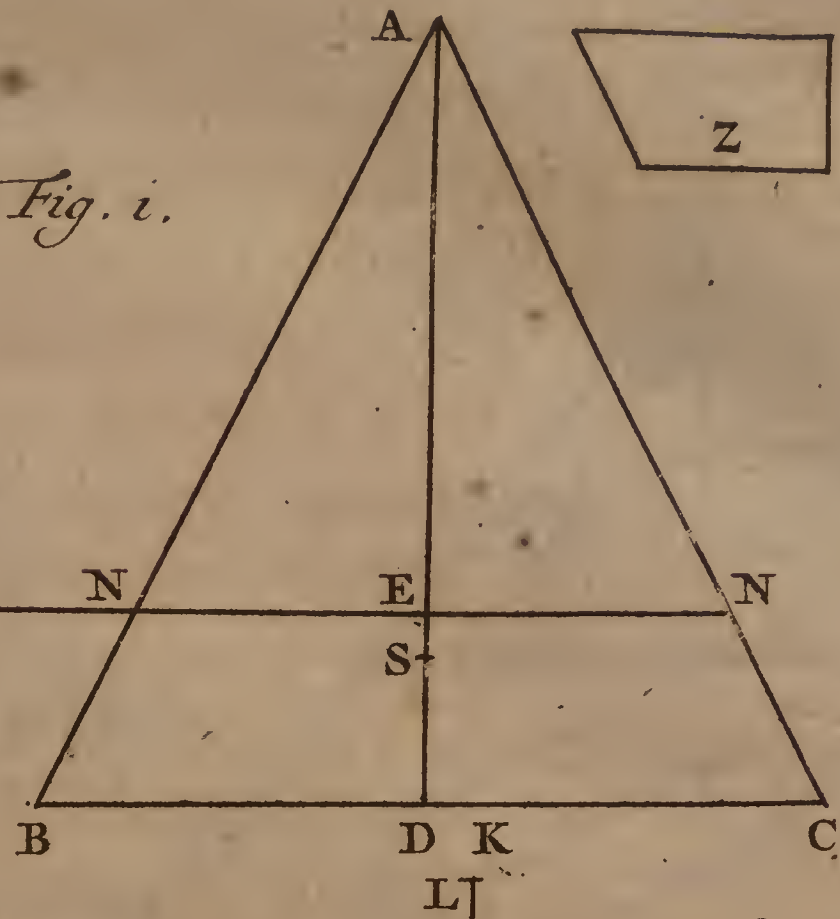


Fig. 1.



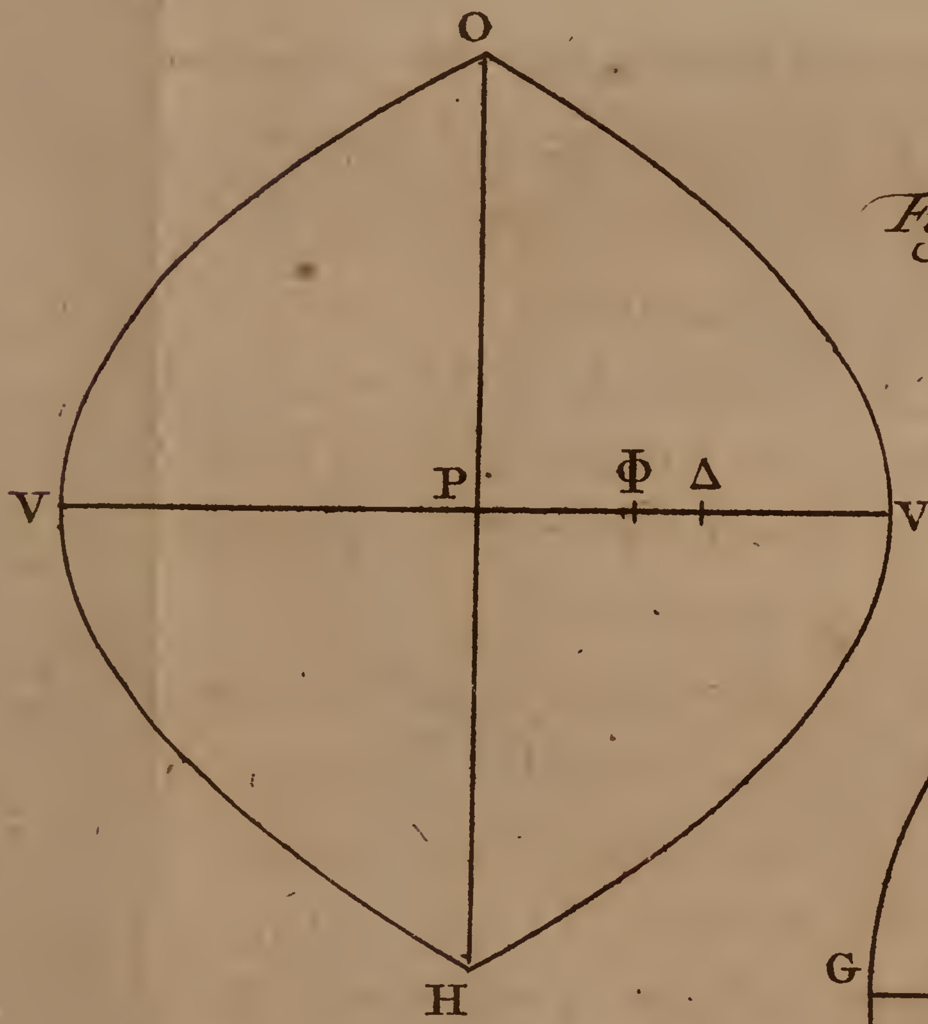
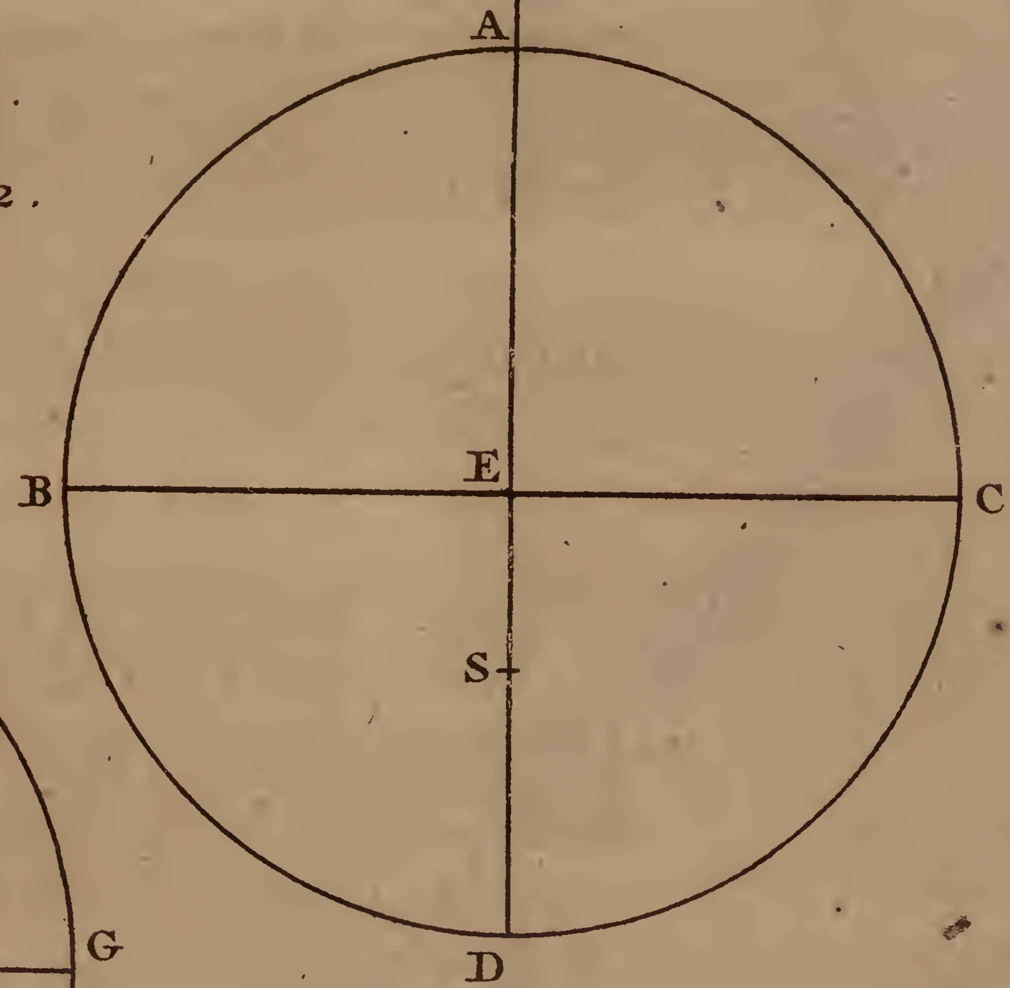


Fig. 2.



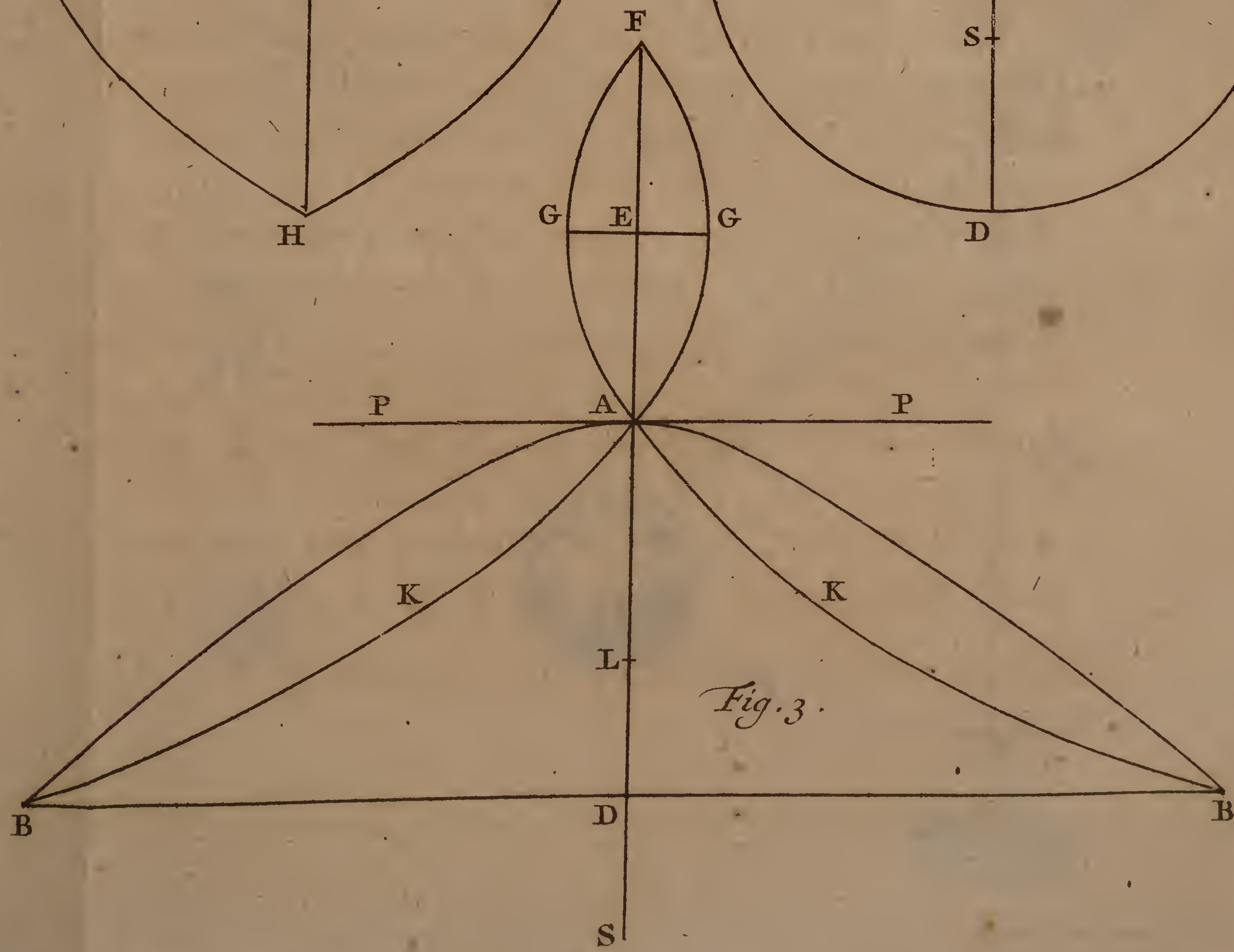


Fig. 3.

Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H ∞ $\frac{3}{20} bb - \frac{1 b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano M D O. At quadratis distantiarum à plano N D æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati A B, sive $\frac{3}{80} aa$, multiplices per numerum particularum semiconi A B C. Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80} aa + \frac{3}{20} bb - \frac{1 b^4}{4qq}$.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui sit parallelus basi trianguli à sectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y sit ignotæ prorsus naturæ, subcentricam tamen G H, cunei super ipsa abscissi plano per S Y, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{3}{20} bb$, sive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{1 bb}{2q}$, fit inde G H æqualis $\frac{3}{10} q$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ aliis investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerunt A B C, A F G, alter rectus, alter scalenus; quorum & diametri & bases æquales; hi ex vertice suspensi, vel à quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.

TAB. XXVII. Fig. 1.

PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo secundario, quod super virga penduli, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit.

TAB. XXVII. Fig. 3. Ut hoc expediamus, primo penduli ipsius, ex virga gravitate prædita, & appenso parte ima pondere, compositi, centrum oscillationis inveniendum est.

Sit virga, cum appenso pondere, A C, cujus longitudo dicatur a. Intelligantur autem, tum virga ipsa, tum pondus appensum C, in particulas minimas æquales divisa, earumque particularum virga habeat numerum b, pondus vero C numerum c, ponendo nempe b ad c, sicut gravitas virgæ ad gravitatem appensi ponderis. Longitudo igitur penduli simplicis, dato isochroni, habebitur, si summa quadratorum à distantiis particularum omnium à puncto suspensionis A, dividatur per summam earundem distantiarum *. Secetur A C bifariam in M; tum vero in T, ut A T sit dupla T C. Quia ergo M est centrum gravitatis lineæ A C, & A T subcentrica cunei super ipsa abscissi plano per A D, perpendicularem ad A C; qui cuneus hîc revera triangulum est; erit summa quadratorum, à distantiis particularum virgæ à puncto A, æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M; hoc est, rectangulo T A M, multiplici secundum numerum particularum b; hoc est, $\frac{1}{3}aab$; quia M A est $\frac{1}{2}a$, & T A $\frac{2}{3}a$, ac proinde rectangulum T A M ∞ $\frac{1}{3}aa$. Summa vero quadratorum, à distantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici secundum numerum particularum ipsius ponderis; hoc est, aac. Adeoque summa quadratorum omnium, tam à distantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3}aab + aac$.

* Prop. 6. huj. in fine.

Porro, distantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur $\frac{1}{2}ba$; longitudini scilicet virgæ ipsius, quæ

est

est a, multiplici secundum semissem numeri particularum quas continet. Et distantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, sunt $a\,c$. Ita ut summa utrarumque distantiarum sit $\frac{1}{2}ab + ac$. Per quam dividendo summam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3}aab + aac$, fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{\frac{1}{2}ab + ac}$ sive $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, longitudo penduli isochroni. Quæ itaque habebitur, si fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appensi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejusdem appensi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem sumere longitudinem A C, à puncto suspensionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum consideretur.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quod si jam, præter pondus C, alterum insuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, seu particularum numerus sit d: distantia vero A D sit f. Ut pendulum simplex huic ita composito isochronum inveniatur, addenda sunt ad summam superiorem quadratorum, quadrata distantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet esse dff. Adeo ut summa omnium jam sit futura $\frac{1}{3}aab + aac + ffd$. Item, ad summam distantiarum, addendæ distantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac summa proinde distantiarum omnium erit $\frac{1}{2}ba + ca + df$; per quam dividenda est ista quadratorum summa, & fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$, longitudo penduli isochroni.

TAB. XXVII. Fig. 4.

Quod si vero, hæc longitudo penduli isochroni, datæ æqualis postuletur, quæ sit p, & reliqua omnia quæ prius data sint, præter distantiam A D seu f, quæ determinat locum ponderis D: sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff \propto pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}$. Et $f \propto \frac{1}{2}p$

 + vel

De centro oscillationis.

$+$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$. Ubi animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}abp + cap$ minus sit quam $\frac{1}{3}aab + aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga A C & pondere C.

Unde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus; posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione superiori, $f \propto \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ non minus esse debere quam $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{d}$. Unde non debebit esse minor quam $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc} - \frac{ab - 2ac}{d}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{d}$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f \propto \frac{1}{2}p$, hoc est, $\frac{a}{2d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc} - \frac{ab - 2ac}{2d}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda notet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{50}$ gravitatis appensi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas eadem ponatur quæ ipsius virgæ.

gæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno ſcrupulo primo acceleretur horologii motus, ſpatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum ſcrupulorum primorum ſit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Ductis viginti quatuor horis ſexagies, fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius ſcrupuli acceleratio quæritur: ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, ſi penduli ſimplicis, ſecunda ſcrupula notantis, longitudo diviſa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno ſcrupulo primo. Adeò ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenſo compoſitum, iſochronum ponitur pendulo ſimplici partium 1440; invenienda primum eſt virgæ illius longitudo, ex æquatione ſuperius poſita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli ſimplicis, quod iſochronum compoſito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo ſi longitudo penduli ſimplicis iſochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} \infty a$. poſitoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet, $a \infty 1444\frac{4}{7}$, longitudo virgæ.

Jam, quia erat $f \infty \frac{1}{2}p$ + vel - $\sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$, fiet $f \infty \frac{1}{2}p$ + vel - $\sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Unde porro, ſi p ſit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{7}$, qualium nempe f, ſeu pendulum ſimplex, ſecunda ſcrupula oſcillationibus deſignans, continet 1440. Cujus longitudo ſi pedum trium ſtatuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, ſupererunt unciæ duæ, lineæ 9,

a

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

à centro oſcillationis penduli compoſiti ſurſum ſumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius ſcrupuli primi accelerationem præſtans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas diſtantias, quibus virga dividenda eſt, calculo inveſtigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem *p*: easque ſubjecta tabella exhibemus, ſecundum cujus numeros etiam virga penduli diviſa eſt, quæ ſuperius in deſcriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 ſcrupula ſecunda, ſeu primorum ſcrupulorum quadrantes. Ex. gr. ſi, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius juſto incedere, in 24 horis, differentiâ 15 ſecundorum ſcrupulorum; oportebit ſurſum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii ſpatio 24 horarum.		Partes, à centro oſc. ſurſum accipiendæ.
Scrup. pr.	*Sec.*	*Linea & decima linearum pedis horarii.*
0,	15	7, 0
0,	30	15, 2
0,	45	23, 7
1,	0	32, 6
1,	15	41, 9
1,	30	51, 7
1,	45	62, 2
2,	0	73, 4
2,	15	85, 6
2,	30	99, 0
2,	45	114, 1
3,	0	131, 8
3,	15	154, 3
3,	30	192, 6

Centrum oſcillationis altius eſt centro gravitatis C partibus 1, 4.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

De centro oscillationis.

Centri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspenso, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis; quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphæra aut lens plumbea. Quid enim, si sphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, conveniant pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκρίβειαν sectemur. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni facienda est difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum constat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etsi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere prorsus has tricas velimus, id ita consequemur, si sphæram lentemve penduli, circa axem suum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inserendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sit necesse

est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo positionem, respectu horizontalis plani, sphæra penduli servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides easdem percurrant. Unde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum consequitur, quam si puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

PROPOSITIO XXV.

De *mensuræ universalis, & perpetuæ, constituendæ ratione.*

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi possit, res est & utilissima, & à multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur; cum sine illo nequaquam, aut ægre admodum, haberi possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejus-

modi horologium, fixarum ſtellarum obſervationibus, compoſitum fuerit, methodo illa quam in horologii deſcriptione oſtendimus: aliud pendulum ſimplex, hoc eſt, ſphæra plumbea, aut alia materia gravi conſtans, ex tenui filo religata, juxta ſuſpendenda eſt, motuque exiguo impellenda; ac tantiſper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recurſus ejus, per quadrantem horæ, aut ſemiſſem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oſcillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, ſatis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ menſurâ diſtantiæ, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis penduli ſimplicis; eâque, ſi recurſus ſinguli ſcrupula ſecunda valeant, in tres partes diviſâ; facient hæ ſingulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in ſuperioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non ſolum ubique gentium conſtitui poſſit, ſed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, ſemel ad hunc proportionibus ſuis expreſſi, certò quoque in poſterum cognoſci poſſint. Sicut jam ſupra, pedem Pariſienſem ad hunc horarium eſſe diximus, ut 864 ad 881; quod idem eſt ac ſi, poſito prius pede Pariſienſi, dicamus tribus hujuſmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, conſtitui pendulum ſimplex, cujus oſcillationes ſcrupulis ſecundis horariis reſponſuræ ſint. Pes autem Pariſienſis ad Rhenanum, quo in Patria noſtra utuntur, ſe habet ut 144 ad 139; hoc eſt, quinque lineis ſuis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas menſuras accipiunt.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quomodo autem centrum oſcillationis in ſphæra, ex qualibet longitudine ſuſpenſa, inveniatur, in ſuperioribus demonſtratum eſt. Nempe, ſi fiat ut diſtantia inter punctum ſuſpenſionis & ſphæræ centrum, ad ſemidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorſum acceptas, terminari in quæſito oſcillationis centro. Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem. Nam, ſi à pun-

cto ſuſpenſionis ad ſphæræ centrum diſtantia accipiatur, ſphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit certa menſura penduli cujus recurſus ſecunda ſcrupula metiantur; ſed quo major erit ejus ſphæra, hoc minor invenietur menſura illa, inter centrum ſphæræ & punctum ſuſpenſionis intercepta. Quia in iſochronis pendulis, centra quidem oſcillationis à punctis ſuſpenſionum æqualiter diſtant; amplius autem deſcendit centrum oſcillationis infra centrum ſphæræ majoris, quam minoris.

Hinc neceſſe fuit illis, qui, ante hanc centri oſcillatorii determinationem, menſuræ univerſalis conſtituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii noſtri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana ſibi negotium ſumpſit, & recentius doctiſſimus Aſtronomus Lugdunenſis, Gabriel Moutonus; his, inquam, neceſſe fuit deſignare globuli ſuſpenſi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret; vel menſura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc poſteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipſum eſt quod quærendum eſt: etſi ſcio vix ſenſibilem errorem fore, dummodo ſphæræ iſtam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem poſſet quidem aliquo pacto res explicari; ſed ita, ut numerandarum oſcillationum labor ſubeundus ſit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præſtat, centra oſcillationis adhibendo, certam rationem ſequi, nulliſque præter neceſſitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus ſphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occurſu aëris minus impediantur.

Cæterum, non ſphæræ tantum ex filo ſuſpenſæ, ſed & coni, cylindri, aliaque omnia ſolida, planaque, quorum centra oſcillationis ſuperius exhibuimus, ad hanc menſuram inveſtigandam, apta ſunt; quoniam, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis, certum idemque omnibus iſochronis pendulis eſt intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ ſecunda ſcrupula aut eorum ſemiſſes ſingulis penduli

recurſibus

recursibus indicant, ad hæc usurpare possumus; sed & aliâ quæcunque penduli longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ conveniant vel singulis, vel binis ternisve recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper à puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 3. Part. 2.

 sit

ſit longitudo. Itaque & pendulorum ſimplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oſcillationes minimæ tranſiguntur.

Quod ſi quis oſcillationum numerandarum, quæ horæ aut ſemihoræ tempore tranſeunt, laborem non defugiat; horologiumque adſit, cujus index ſecunda ſcrupula demonſtret; quæcunque accipiatur penduli ſimplicis longitudo, ejus numerus oſcillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoſcetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad ſecunda ſcrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXVI.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc menſuram quicunque hactenus inveſtigarunt, experimenta conſulere neceſſe habuerunt; quibus, prout hactenus inſtituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, ſub finem motus acquiſitam. Ex noſtra autem prop. 25, de Deſcenſu gravium, cognitaque longitudine penduli ad ſecunda ſcrupula, abſque experimento, per certam conſequentiam, rem expedire poſſumus. Ac primo quidem ſpatium illud inquiremus, quod unius ſcrupuli ſecundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad ſecunda ſcrupula, longitudinem diximus eſſe pedum Horariorum 3: tempus autem unius oſcillationis minimæ, eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc eſt, ut 355 ad 113: ſi fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius ſecundi ſcrupuli, ſive ſexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19'''\frac{1}{10}$, tempus deſcenſus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum

modum ſuperiori propoſitione fuit oſtenſum. Ergo, ſi fiat ut quadratum ex 19‴ $\frac{1}{10}$ ad quadratum ex 60‴, hoc eſt, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo deſcenſus perpendicularis, tempore unius ſecundi. Cum autem pes Horarius ſit ad Pariſienſem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc menſuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius. Atque hæc cum accuratiſſimis experimentis noſtris prorſus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo caſus finitur, non aurium aut oculi judicio diſcernitur; quorum neutrum hic ſatis tutum eſt; ſed ſpatium deſcendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, abſque ullo errore cognoſcitur. DE CENTRO OSCILLATIONIS.

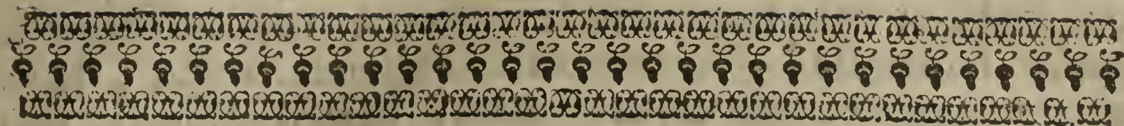
Penduli, ad parietem tabulamve erectam, ſuſpenſi dimidia oſcillatio moram temporis, cadendo abſumpti, indicat. Cujus ſphærula, ut eodem momento ac plumbum caſui deſtinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, caſuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad parietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile ſequi poſſit, rectáque ſecundum longitudinem ſuam deſcendere; eo loci tranſiens, quo penduli ſphæra ad tabulam accidet. Abſumpto igitur funiculo toto, pars inſuper regulæ deorſum trahitur à cadente plumbo, priuſquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta ſit pars, ſphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem ſignans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, ſpatium cadendo emenſum certò definitum habetur.

Aëris autem occurſum, quaſi nullus eſſet in his intelligimus, ut menſura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte conſentiat. Nec ſane tantus eſt ille, ut in altitudinibus his, quò aſcendere datur, ſenſibile diſcrimen inducere poſſit; dummodo ſolida corpora è metallo, aut, ſi levio-

leviore materia constent, mole grandiuscula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem secant, ita magnitudine corporis pensatur, ut sphæra lignea, vel etiam è subere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni suberisve gravitatem. Tunc enim gravitates sphærarum erunt inter se sicut earum superficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum sensu percipi potest, decidant corpora, quæ multum intrinseca gravitate differunt, nequaquam opus est ut proportio illa diametrorum servetur. Possunt enim inter se æqualia esse, dummodo utraque satis magna sint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum est, tantam vel altitudinem esse posse; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in superioribus demonstravimus, proportione plurimum recessura sit. Namque in universum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac superficiei suæ, constitutus est; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam possit. Quæ nempe celeritas ea est, quam si aër, aut liquor ille sursum tendens, haberet, suspensum corpus idem sibi innatans sustinere posset. Verum de his, alias fortasse, pluribus agendi occasio erit.



HORO-



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUINTA.

Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem facilioremque. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumen-

 to

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

to plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili ſpeculatione maturius fruantur harum rerum ſtudioſi, neve caſu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter deſtinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, ſimulque Theoremata traduntur, ad Vim Centrifugam pertinentia; demonſtratione ipſorum in aliud tempus dilata *.

* Vide Auctoris Opera poſthuma p. 401. & ſeq.

Horologii ſecundi conſtructio.

TAB. XXVII. Fig. 5.

Non neceſſarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii conſtant, diſpoſitionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus facile ordinari, variiſque modis mutari poſſit; ſed eam partem explicari ſatis eſſe, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expreſſa eſt.

Axis D H ad horizontem erectus intelligendus eſt, ac ſuper polis duobus mobilis. Huic ad A affixa eſt lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque ſecundum lineam A B; quæ eſt paraboloides illa de qua oſtendimus, Propoſ. 8. partis 3, evolutione ejus, poſtquam ipſi recta quædam juncta fuerit, deſcribi parabolam. Ea recta hic eſt A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A E deſcriptam, refert linea E F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola deſcribitur, eſt B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in ſeſe vertitur, filum B G F, in rectam lineam extenſum, ſphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoreſve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: ſed ita, ut omnes in ſuperficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipſo æqualia ſemper circuitus tempora evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu poſtea dicemus, apparebit.

Quod ſi circuitus ſingulos, ſecundorum ſcrupulorum ſemiſſes notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F eſſe $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii noſtri, hoc eſt dimidium

lon-

longitudinis penduli, cujus singulæ oscillationes semiscrupulum secundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis A B; quippe quod illius $\frac{2}{16}$ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium est. Si vero secunda scrupula unoquoque circuitu expleri desideremus, quadrupla priorum accipienda sunt, tum latera recta, tum linea A E.

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Porro, etsi filum B G F veluti unicum ac simplex hactenus designavimus, sciendum tamen longe præstare ut parte superiori duplex sit, ac F versus in angulum coëat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta esse debet, quanta isti filorum divaricationi sufficit; vel & ipsa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, absque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque sibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, si unico tantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri sciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo nisu, motum sphæræ F semel inditum, conservat.

Hoc autem quo facilius possit, liberrimam axis K H revolutionem esse oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam si, parte sui ima, durato chalybe constet, suppositamque habeat adamantis superficiem planam; cujus minima quævis particula hic sufficit, subter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B G F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata servetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides suspensum est, experti sumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

DE VI CENTRIFUGA
ex motu circulari, Theoremata.

I.

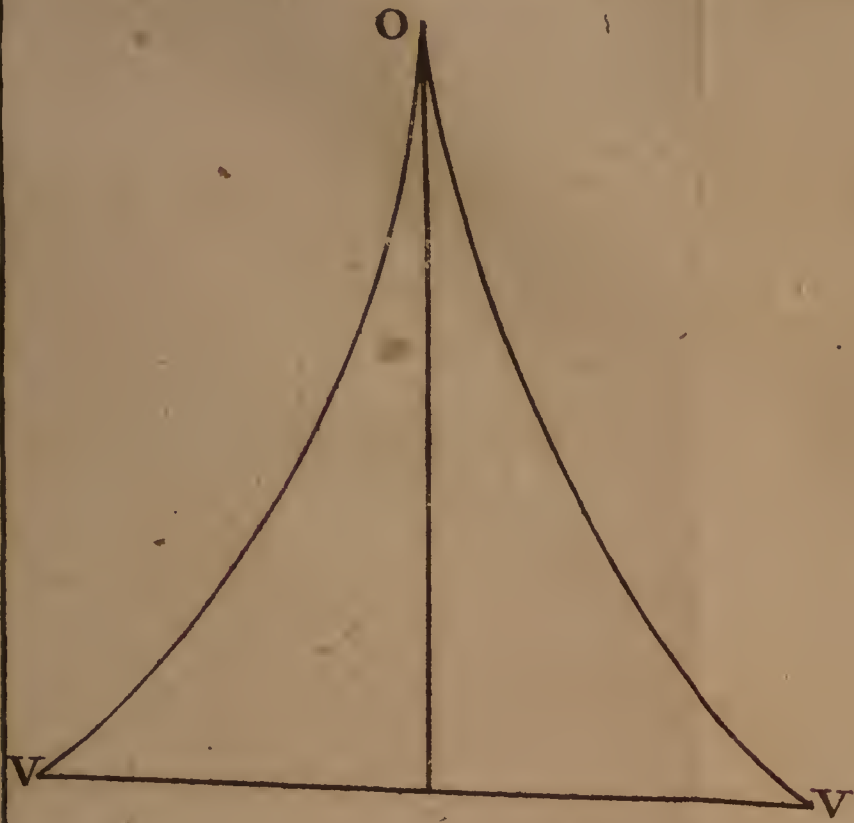
SI mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri.

II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, sed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.



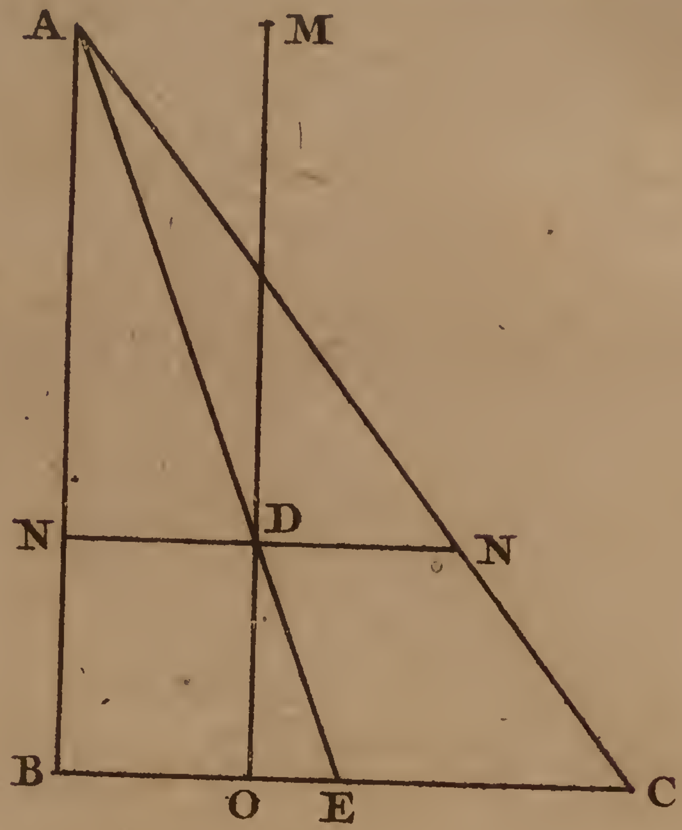
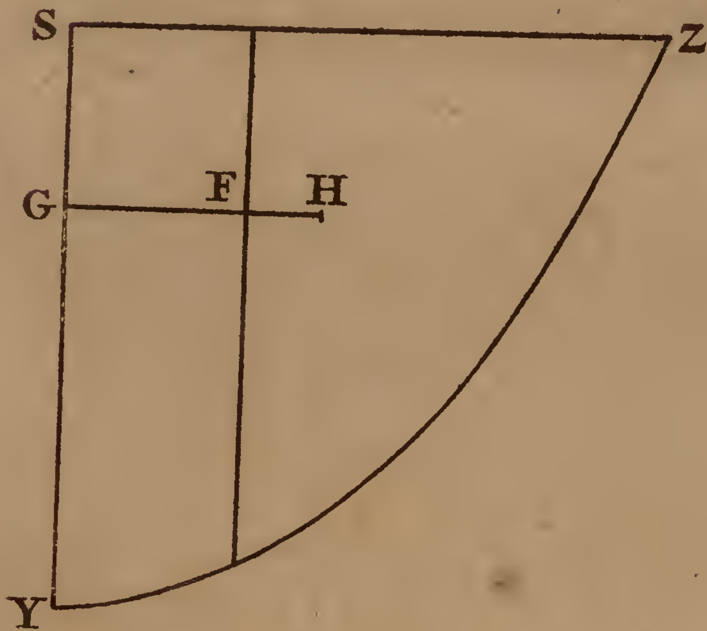


Fig. 2.



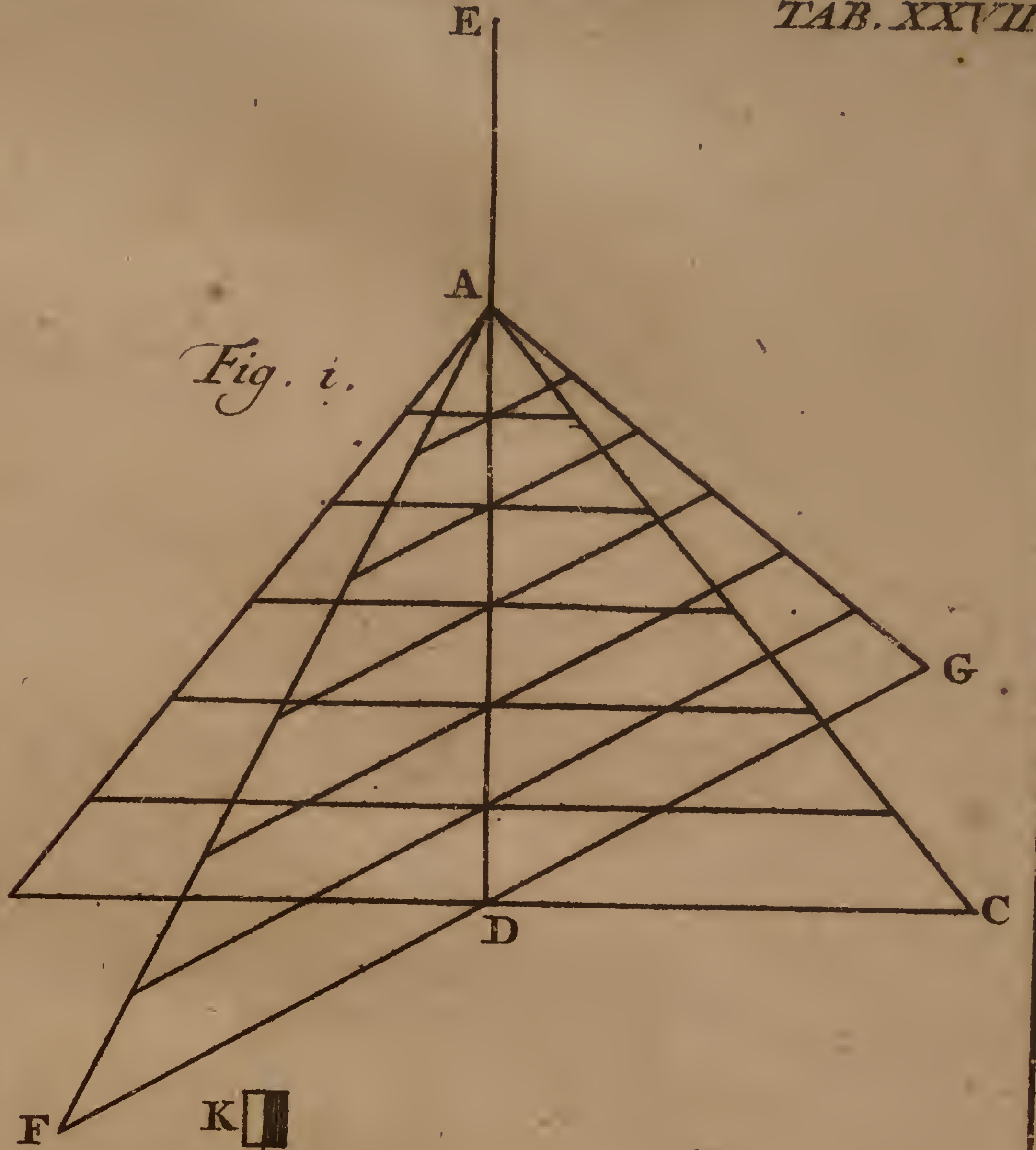


Fig. 1.

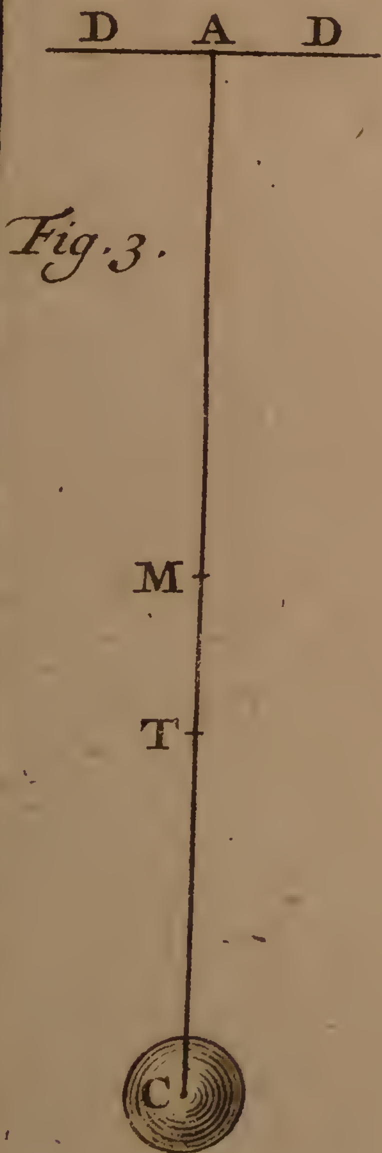


Fig. 3.

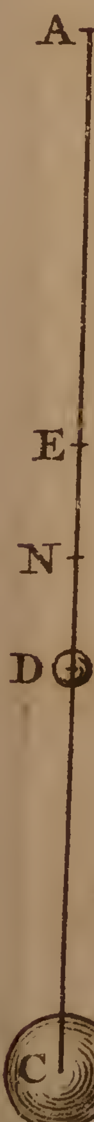


Fig. 4.

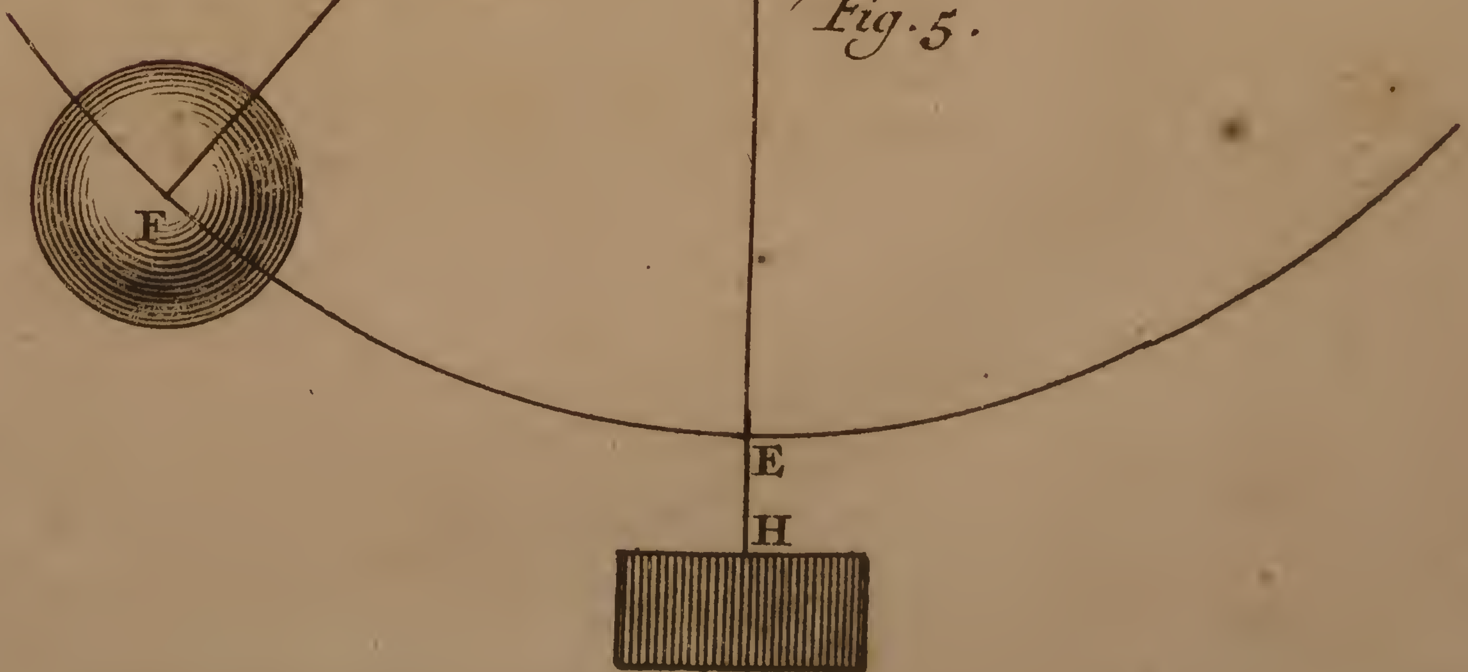
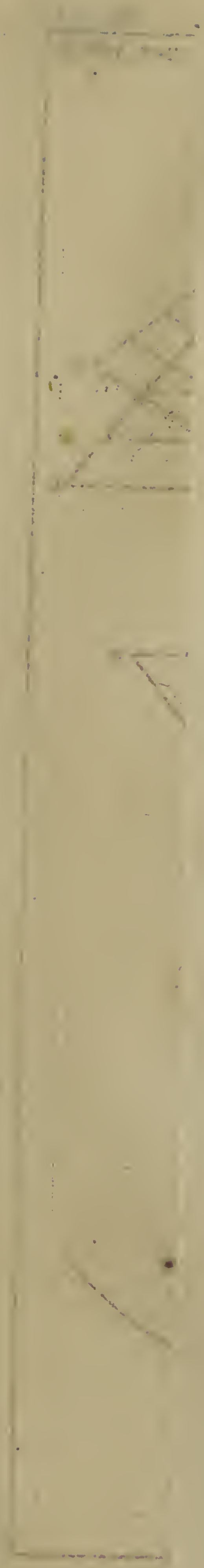


Fig. 5.



I V.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ sit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem; hoc est, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo suspensum est.

V I.

In cava superficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, sive parvæ sive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora singula æquantur binis oscillationibus penduli, cujus longitudo sit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

De vi Centrifuga.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus suspensa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant; capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum; ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X.

De vi centrifuga.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

X I.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium; ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

XIII. *Si*

De vi Centrifuga.

XIII.

Si pendulum ſimplex oſcillatione laterali maxima agitetur, hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet, quam ſi ex illo ſimpliciter ſuſpenſum foret.

F I N I S.



BREVIS INSTITUTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

Adr. Metius in Geographicis Institutionibus Cap. 4.

ET hæc ſane facillima & aptiſſima eſt methodus (*ſcilicet qua adhibitis Horologiis longitudines deteguntur*) quam acquirere poſſis ; niſi quod difficultas & error conſiſtat in irregulari Horologiorum motu : ideoque diligentes inquiſitores & inventores rerum naturalium id curate, neque laboris veſtri vos pæniteat, quo hunc errorem tollere tentetis. Inquirite in hunc verum & æquabilem naturæ curſum ; quo potiti verum lapidem Philoſophorum inveniſtis, neque fortes Naucleri ad ſcopulos toties offendent.

Fournier in Hydrographia l. 12. C. 35.

UNde tandem colligo, ſi via inveniri queat ad Horologia perficienda, & laborem ſuſcipere velimus iis bene utendi, nullam praxim (*ad inveniendas longitudines*) cum hac comparandam eſſe.

Didericus Rembrantz a Nierop in Animadverſionibus de inveniendis longitudinibus.

HOc modo laudabiliora cenſerem nova excogitata Horologia Domini Chriſtiani Hugenii a Zuylichem, quæ, loco liberamenti, a plumbo pendulo oſcillato moderantur, de quibus per certa teſtimonia certus ſum, quod hæc tempus exacte ad hebdomadas, imò ferè ad menſes juſte dimetiri queant ; Unde confiderem, quod ope horum Horologiorum maximum perciperemus commodum, imò quod, niſi agitatio navis impediret, ſatis attingere poſſemus ad inventionem longitudinum.

BREVIS INSTRUCTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

I.



D minimum bina nova Horologia Oscillatoria in navem ferantur: ut si alterutrum forte fortunâ vel ex negligentia quiescat; vel si diuturnitate temporis contractis sordibus, purgandum sit, alterum nihilominus moveatur; præstaret autem 3 vel 4 adhibere horologia.

I I.

Cui cura horologiorum committetur, discat a fabro quæ spectant indices horarum minutarum primarum & secundarum, internas etiam horologiorum partes intelligere, & reducendi ea methodum.

I I I.

Horologia in navi suspendenda sunt in loco arcte clauso, ubi tuta sunt ab humore vel sordibus, & ne disturbentur contactibus: Et si locum illum in media navi prope malum principem ordinare possemus, multum præstaret, quoniam ibi motus minimus est.

I V.

Antequam horologia in navem inferantur, conabimur ea aptare ad rectam dierum mensuram, tum enim usus est facillimus, nullusque fabris labor est ad unum bene adaptatum horologium alia accommodare. Sed si tamen tempus vel opportuna id præstandi occasio defuerit, nihilominus poterunt æque certe mari usurpari, dummodo observaveris vel scias, quanto citius vel tardius spatio 24 horarum moveantur, ut postea docebitur.

V.

Reducere horologia ad rectam dierum menſuram vel cognoſcere quanto citius vel tardius ſpatio 24 horarum moveantur.

Obſerva, dies ab una ad alteram meridiem aliquantulum differre quæ cauſa eſt cur horologium, licet prorſus exactum & ſecundum mediorum dierum menſuram moveatur, non ſemper cum ſole conveniat. Sed ut hæc inæqualitas æquetur, & ſemper ope Horologii ſcire poſſimus, quam horam indicat Sol, & conſequenter num horologium ad rectam mediorum dierum menſuram diſpoſitum ſit, conducit ſequens tabula cujus uſus talis eſt. Quando primum horologium conſtituendum eſt, ſubtrahe ex hora ſolari obſervatâ æquationem ejus diei quæ in tabula reperitur, & diſpone horologium ad reſiduas horas, minuta prima & ſecunda: ubi poſt aliquot dies quæritur hora ſolaris, adde ad horam horologii æquationem diei ultimi, & aggregatum erit hora ſolaris, ſi horologium exacte fuit adaptatum, ſecundum menſuram dierum mediorum; verum ut hæ obſervationes quam certiſſime inſtituantur, & horologia ad menſuram adaptentur antequam in navem inferantur, methodus ſequens aptiſſima eſt.

Duc lineam meridianam in pavimento, cujus operationis methodi ſatis notæ ſunt; obſervandum præterea ſummam hic non requiri exactitudinem; Porro, directe ſuper lineam meridianam, ſuſpende 2 fila appenſis infra ponderibus, vel aliter verticaliter tendantur, certoſque a ſe mutuò diſtent pedes, quo plures eo melius.

Ubi dein medietas ſolis videtur exacte ex adverſo amborum filorum (ad quod requiritur vitrum obſcuri coloris, vel in fuligine candelæ denigratum) eo momento horologiorum indices diſponendi ſunt, non exacte in 12 horas, ſed tanto magis retrorſum, quanta eſt æquatio illius diei in Tabula: ex. gr. ſi fuerit 22 dies Martii, cujus æquatio in Tabula eſt 8 min. 3 ſec: hæc ſunt ſubducenda ex 12 horis, & reſiduum erit 11 horæ 51 min. 57 ſec: in quot horas minuta & ſecunda diſponendi ſunt indices Horologiorum quam primum ſol medius

dius ex adverſo 2 filorum conſpicitur. Dein poſt aliquot dies obſervatio rurſus eodem modo eſt inſtituenda, ubi ſol ex adverſo filorum cernitur, & ſimiliter notanda hora minuta & ſecunda horologiorum, quibus adde æquationem ejus diei excerptam ex Tabulâ, & ſi aggregatum exacte componat 12 horas Horologium ad rectam menſuram accommodatum eſt. Si vero differat dividenda ſunt minuta & ſecunda iſtius differentiæ, per numerum dierum inter utramque obſervationem, ad obtinendam quotidianam differentiam.

Supponamus hanc ſecundam obſervationem fieri 30. Martii ſcil. octo diebus poſt primam & comperiatur medietate ſolis viſa in meridiano ex adverſo 2 filorum,

	h.	m.	ſ.
horologium indicare	11.	51.	7.
Æquatio 30. Martii in tabula eſt	0.	10.	40.
Quæ addita horæ oſtenſæ per horologium præbet ſummam	12.	1.	47.

Si hæc ſumma exacte fuiſſet 12 horarum, horologium recte diſpoſitum fuiſſet, ſed cum excedat 12. horas 1. minuto 47. ſecundis, tanto citius promotum fuit ſpatio octidui; & hoc 1 minutum & 47 ſecunda, aut 107 ſecunda, diviſa per 8. efficiunt 13. ⅜ ſecundorum, differentiam in ſpatio 24. horarum. Quâ differentiâ cognitâ, ſi non otium nec animus ſit ſuſcipiendi moleſtiam ut adaptetur horologium ad veram menſuram, neceſſe hoc non eſt; ita enim in navim inferre licet, modo prædicta quotidiana differentia annotetur, & ad eam nosmet componamus ut ſtatim dicetur.

Sed ſi accuratius Horologium diſponere velimus, removendum eſt minus pondus penduli parumper deorſum, quo tardius movebitur: & tum de novo obſervatio per ſolem inſtituenda eſt ut antea; ſi tarde nimis motum fuiſſet, ſupra memoratum pondus parumper ſurſum promovendum fuiſſet, ita tamen, ne ſupra punctum medium penduli promoveatur. eâ quippe gaudet proprietate, quod inde ſurſum promotum horologium lentius iterum promoveat, cujus rei in deſcriptione Horologii datur demonſtratio *; ut & æquationis temporis, cujus ſolummodo hic docemus uſum. Præter certam de-

* Vide ſupra pag 172.

Dies.	*Januar.* Min.	Sec.	*Febr.* Min.	Sec.	*Mart.* Min.	Sec.	*Apr.* Min.	Sec.	*Maj.* Min.	Sec.	*Jun.* Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	19	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

demonſtrationem etiam revera exactis Pendulis compertum eſt, quod ad inæqualitatem dierum ad rectam menſuram reducendam, æquatio, prout eam hic per præcedentem Tabulam inſtituimus, exacte cum experientia conveniat, ita ut tuto ei confidere liceat. Idque tanti momenti eſt in inveniendis longitudinibus, ut, ſi non fuerit obſervatum, nonnunquam ſpatio 3 menſium in calculo errorem committas 7 graduum & amplius, ſine ulla tamen horologiorum culpa: qui gradus ſub Tropicis ultra 100 Germanica milliaria continent.

Oſtenſo, quomodo horologia poſſint adaptari terrâ; vel quomodo eorum differentia quotidiana ſit invenienda, proximum erit dicere, quomodo idem faciendum ſit in navi fixa ad anchoram, cum minime poſſibile ſit idem præſtare in velificatione.

Obſervabimus quodam die ortum & occaſum Solis, & in utraque obſervatione ubi ejus medietas exacte ſupra Horizontem apparet, notabimus horam quam indicat horologium, & ſupputabimus quot horæ interea fuerint præteritæ, cujus numeri dimidio addito ad horam obſervationis matutinæ, habebimus horam quam indicavit horologium cum Sol eſſet in meridiano: cui addens Tabulæ æquationem iſtius diei, ſummam notabimus, & horologium ulterius promoveri patiemur. dein quibusdam diebus, elapſis (quo autem plures præterierint, eo melius eſt) idem omnino faciemus; Et ſi hora hujus ultimi diei ſit eadem, cum ea quæ antea fuerat notata, horologium recte accommodatum eſt. Sin vero major vel minor ſit, vel lentius vel celerius movetur, & differentia diviſa per numerum dierum interim dilapſarum dabit quotidianam differentiam, quam annotabimus, & ſi velimus horologium relinquemus in illo ſtatu; vel alioquin removendo minus pondus penduli ut ſupra dictum eſt, melius horologium accommodabimus.

	h.	m.	ſ.
Ex. Gr. pone 21. Martii mane cum ſolis medietas apparet ſupra horizontem horologium indicare.	5.	30.	10.
Et veſperi ubi Solis medietas latet infra horizontem.	5.	20.	6.

Ut

	h.	m.	ſ.
Ut ſcias ope horologii horas inter binas obſervationes elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	30.	10.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	29.	50.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	20.	6.
Prodeunt horæ inter binas obſervationes elapſæ	11.	49.	56.
Quarum dimidium eſt	5.	54.	58.
Quo addito ad horam ortus	5.	30.	10.
Prodit hora horologii, cum ſol eſſet in Meridiano	11.	25.	8.
Cui addita æquatione 21. Martii	0.	7.	45.
Summa eſt	11.	32.	53.
Septem diebus poſt ſc. 28. Martii obſervetur ortus ſolis, quum horologium indicat	5.	19.	4.
Et occaſus quum indicat	5.	25.	4.
Ad habendas horas interim elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	19.	4.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	40.	56.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	25.	4.
Prodeunt horæ interea delapſæ	12.	6.	0.
Quarum dimidium eſt	6.	3.	0.
Quo addito ad horam ortus	5.	19.	4.
Prodit hora horologii cum Sol erat in meridie	11.	22.	4.
Cui addita æquatione 28. Martii	0.	10.	1.
Summa eſt	11.	32.	5.

Quæ ſumma ſi fuiſſet eadem cum priori ſcilicet 11. 32. 53. ad rectam menſuram diſpoſitum fuiſſet horologium; ſed cum poſterior minor ſit priori, differentiâ exiſtente 49. ſecundorum, horologium ſpatio 7 dierum tanto tardius fuit promotum, quæ 49 ſecunda diviſa per 7 numerum dierum, dant quotientem 7 ſecunda differentiam diurnam, quâ horolo-

gium tardius movetur; possumus etiam loco ortus & occasus Solis duas æquales Solis altitudines observare ante & post meridiem, & hora horologii annotatâ utriusque observationis tempore, eodem modo, ac hic dictum est procedemus.

VI.

Ope Horologiorum mari invenire longitudinem loci in quo versaris.

Singulis horologiis nomina vel signa impone ut A. B. C. & antequam velifices, dispone eadem secundum tempus observatum per Solem in loco, ubi moraris, diminutum æquatione ejus diei, quo observas; quem annotabis.

Dein ubi in mari versaris si vis scire longitudinem loci, in quo es; quot gradibus Meridianus loci hujus sit orientalior vel occidentalior meridiano loci illius in quo adaptasti horologia; observa Solem vel Stellas, ut determines horam, & vide quam horam eodem momento indicent horologia; quam horam, si horologia non fuerint disposita ad rectam mensuram æquabis cognitâ diurnâ differentiâ, ei porrò addens æquationem præsentis diei, quo ita habeas horam in loco illo, ubi horologia fuere disposita. Si hæc hora eadem sit cum illa quæ observata fuit in loco præsente, consistis sub eodem Meridiano, ac ubi horologia fuere disposita ad Solem: Si vero hora observata major sit illâ quam horologia ostendunt, certus es, te pervenisse sub Meridianum Orientaliorem; sin denique fuerit minor, pervenisti sub Meridianum Occidentaliorem: & computatis in singulas quasque horas differentiæ temporis 15 gradibus longitudinis vel in singula minuta 15 minutis, vel totidem quadrantibus gradus, cognosces, quot gradibus dicti Meridiani ab invicem distent. E. Gr. pone Horologia A. B. C. fuisse aptata ad Solem in loco ex quo abiisti, 2 Martii, id est ad horam observatam, sed in tantum diminutam, quanta est æquatio 2 Martii, 2 min. 28 sec. & pone horologium A fuisse dispositum ad veram mensuram, sed B moveri singulis diebus 7 secundis tardius, & C singulis diebus 12 secundis citius.

Ali-

Aliquot diebus post E. G. 15. Maji, ut detegas longitudinem loci in quo in mari versaris; observa horam diei, quæ sit

	h.	m.	s.
horam diei, quæ sit	5.	18.	10.
Et comperis horologium A indicare	2.	6.	0.
Sed horologium B. indicare	1.	57.	22.
Sed cum singulis diebus 7. sec. tardius moveatur, prodeunt spatio 74. dierum nempe a 2. Martii ad 15. Maji	0.	8.	38.
Quæ addita ad horam a B. demonstratam prodit hora eadem ac indicavit horologium A	2.	6.	0.
Invenis etiam horologium C. indicare	2.	20.	48.
Sed cum moveatur 12. sec. singulis diebus citius, habemus spatio 74. dierum	0.	14.	48.
Quæ subtracta ab hora a C. indicata, iterum prodeunt	2.	6.	0.
Cum itaque hora horologiorum sit	2.	6.	0.
Adde illi æquationem 15. Maji	0.	19.	29.
Prodit hora loci ubi horologia disposita sunt	2.	25.	29.
Sed hora observata est	5.	18.	10.
Excedens priorem	2.	52.	41.
Ergo Meridianus loci in quo versaris 15. Maji Orientalior est, Meridiano loci, in quo horologia fuere aptata	2.	52.	41.

	gr.	min.	sec.
Quæ horæ in gradus reductæ, ponendo 15. gradus valere unam horam, prodeunt	43.	0.	15.

Verum est ex eodem calculo posse concludi te esse sub Meridiano hôc ipso 180. gradus Orientaliori, quia index horarius revolutionem suam absolvit spatio 12. horarum in horologiis, sed differentia tanta est, ut nequeas in ea decipi. Alioquin enim horologium posset construi, cujus index circuitum suum semel absolveret spatio 24 horarum.

Observandum quoque hic est, cum dico, locum tot gradibus Orientaliorem esse illo ex quo abiisti, illud dici eo respectu quod illuc veneris ad Orientem navigans, versus quam partem gradus numerari possunt usque ad 360; alioquin enim satis no-

 tum

tum eſt: locum, qui 180. gradus Orientem verſus ab alio diſtat, tantum etiam Occidentem verſus inde diſtare: & pariter, qui 300. gradus Orientaliter ab alio diſtat etiam 60. gradus Occidentaliter inde diſtare.

V I I.

Mari invenire horam diei.

Quandoquidem pro invenienda longitudine requiritur ut hora loci, in quo es, cognita ſit, ut ſupra dictum eſt, dicta hora ſumma exactitudine eſt obſervanda; unumquodque enim minutum quo in calculo aberras conſtituit errorem $\frac{1}{4}$. gradus in longitudine, id eſt, prope Æquatorem $3\frac{3}{4}$. Germanicorum milliarium ſed minus ubi longe inde abes:

Quare ad certam horæ inventionem, ne fidas obſervationi maximæ Solis altitudinis, ut inde concludas præciſe meridiem eſſe vel Solem in Meridiano, niſi inter Tropicos Sol fuerit in ipſo puncto Zenith vel ei quam proximus. Nam alias Sol exiſtens prope Meridianum aliquamdiu perſeverat ſine ulla ſenſibili mutatione altitudinis ſuæ; ideoque altitudo meridialis idonea ſatis eſt ad latitudinem vel elevationem Poli loci alicujus dimetiendam, non tamen ad longitudinem ejus exacte inveniendam. Multo minus niti potes pyxidibus nauticis in accurato meridiei tempore inquirendo.

Neque annuli Aſtronomici vel alia horologia ſolaria certa ſatis ſunt in oſtendenda hora ad minuta & ſecunda. Sed melius eſt obſervare ſolis altitudinem, ubi eſt in Oriente vel Occidente, quo autem Orienti aut Occidenti propior eſt, eo melius; ibi enim cum eſt, mutatur ejus altitudo ſenſibiliter magis quam ante vel poſt & ita, ex inventa Poli elevatione, & nota Solis declinatione, hora poteſt computatione detegi, cujus modus ab aliis ſatis deſcriptus eſt; quia tamen computatio illa moleſta eſt & nonnulli errores in menſuranda altitudine Solis committi poſſunt faciliorem hic methodum oſtendam & demonſtrabo.

VIII. *Quo-*

VIII.

Quomodo ex observatione ortus & occasus Solis & ex hora horologiorum longitudo mari inveniri queat.

Hæc ſane methodus meo judicio omnium eſt certiſſima, cum ad eam neque notitia Poli elevationis, neque Solis declinationis, neque ulla inſtrumenta ad obſervandum requirantur; cum neque refractio quid nocere poſſit, quoniam hæc in ortu & occaſu Solis ejusdem diei parum aut nihil differre poteſt.

Sicuti ergo antea docuimus horologia in navi adaptare, & obſervare quâ horâ eorundem horologiorum Sol fuerit in meridiano; hic eodem modo procedendum eſt, id eſt, in ortu & occaſu ſolis, ubi ejus medietas eſt ſupra horizontem, annotabis horam demonſtratam tunc temporis per horologia; & licet interea velificando fueris progreſſus, nil refert, uti poſtea demonſtrabitur: dein computans quot interea horæ horologiorum dilapſæ ſint, earumque dimidium addens ad horam ortus, habebis horam quam horologium indicabat quum Sol erat in Meridiano; ad quam addenda eſt æquatio iſtius diei ex tabula deſumta; & ſi ſumma æqualis ſit 12 horis, fuiſti meridie ſub eodem Meridiano, ſub quo horologia ad ſolem fuere adaptata; ſed ſi ſumma excedat 12. horas, fuiſti meridie ſub occidentaliori meridiano, quam loci ejus in quo horologia ſunt diſpoſita; ſed ſi ſumma fuerit minor 12. horis fuiſti ſub orientaliori Meridiano, idque toties quindecim gradibus, quot horis ſumma fuerit minor vel exceſſerit 12. horas, prout iſtius rei computationem antea jam docuimus.

E. G. Ponatur Horologia A. & B, ut ante, fuiſſe adaptata ad Solem in loco ex quo deceſſiſti 2. Martii, id eſt ad horam Solis diminutam æquatione iſtius diei ſcil. 2. min. 28. ſec. Horologio A. ad rectam menſuram redacto; B. vero ſingulis diebus 7. ſecundis tardius moto; Poſtea ſcire deſiderans longitudinem loci in quem perveniſti,

 (pone

(pone 1. Junii,) obſervetur mane ſol medius	*h.*	*m.*	*ſ.*
ſupra horizontem quando horologium indicat	2.	30.	37.
Et Veſperi iterum medius Sol infra horizontem, cum idem horologium indicat	3.	9.	7.
Ad inveniendas horas interea elapſas, ſubtrahe horam ortus	2.	30.	37.
ex	12.	0.	0.
Reliquum eſt	9.	29.	23.
Huic adde horam occaſus	3.	9.	7.
Prodeunt horæ interea elapſæ	12.	38.	30.
Quarum dimidio	6.	19.	15.
Addito ad horam ortus	2.	30.	37.
Habebis horam Horologii A, quum Sol erat in Meridiano	8.	49.	52.
Eodem modo quæratur hora horologii B, cum Sol erat in Meridiano, quæ ſit	8.	38.	5.
Sed hoc horologium ſingulis diebus 7. ſecundis tardius motum retardatur ſpatio 101. dierum a 2. Martii ad 1. Junii	0.	11.	47.
Quæ propterea ad inventam horam addita, datur	8.	49.	52.
Id eſt, eadem hora, quæ per horologium A. inventa eſt; ad quam nunc addita æquatione 1. Junii	0.	18.	10.
Prodit	9.	8.	2.
Hæc eſt diei hora loci in quo horologia adaptata ſunt, quæ cum coincidit cum meridie loci obſervationis;			
Differentia eſt	2.	51.	58.
Quare hic ultimus Meridianus tanto orientalior eſt; quibus horis reductis ad gradus,	*gr.*	*min.*	*ſec.*
uti ſupra docuimus prodeunt	42.	59.	30.

Patet te hoc modo invenire longitudinem loci, in quo meridie vel Sole exiſtente in Meridiano fuiſti; quæ differt a longitudine loci, in quo obſervas Solis occaſum,

ſum, ſed ſine ſenſibili errore æſtimare potes, quantum paucis horis progreſſus fueris, vel longitudo mutata fuerit: Potes etiam, loco obſervationis ortus & occaſus Solis, prius Solis occaſum, veſperi obſervare, & dein proximo mane ortum, utroque tempore notando horam Horologiorum; & inde computa eodem modo horam in loco diſpoſitionis, quum media nox erat in loco obſervationis, & detege differentiam longitudinis ut ante. Tandem potes quoque loco ortus & occaſus Solis obſervare duas æquales ſolis altitudines ante & poſt meridiem, annotando horam horologiorum, & computando eodem modo, quo diximus de ortu & occaſu; conſiderandum tamen eſt, Solis altitudines optime obſervari, quando Orienti vel Occidenti proximus eſt, ut antea notatum.

Licet forte quis cenſeat, in praxi hujus methodi, inter ante & pomeridianam obſervationem, quieſcentem navem deſiderari, aut quæ parum transferatur; certum tamen eſt, progrediendo nullum ſenſibilem errorem cauſari poſſe, in quantum interea eundem teneas curſum, æquabili velocitate.

Primum enim, ſi curſum Orientem vel Occidentem verſus dirigas, nullus omnino error erit, ſed certo concludere poteris, qua longitudine meridie vel mediâ nocte fueris, unde ergo, uti antea dictum eſt, ſatis exacte æſtimare potes, ubi ſis ultimæ obſervationis tempore.

V. G. pone, quod ante meridiana Solis altitudo 10 graduum obſervata ſit, quum horologia indicant 8. horas & pomeridiana æqualis altitudo quum horologia indicant 2. horas; & quod inter utramque obſervationem æquabili velocitate Orientem verſus navigaverim, licet inſcius me 1. gradum in longitudine progreſſum eſſe, id eſt, 1. gradum paralleli juxta quem navigo: Agens jam ſecundum præſcriptam regulam, comperio longitudinem 15. gradus Orientem verſus, calculum ineundo a loco, in quo Horologia fuere diſpoſita. quam longitudinem 15. graduum dico eſſe loci, ubi meridie fui.

Quod ita demonſtratur. Quoniam locus veſpertinæ obſer-

vationis uno gradu Orientalior eſt, quam matutinæ; certum eſt in loco veſpertinæ obſervationis Solem 4. minuta prius perventurum eſſe, ad altitudinem 10. graduum, quam in loco matutinæ. Duorum enim locorum ſub eodem paralelo ſitorum, quot gradus unus altero Orientalior eſt, totidem 4. minutis prius in illo obſervantur ſingulæ Solis altitudines; ideo ſi in priori loco cum navi ſubſtitiſſem, Solem veſpertinâ obſervatione reperiſſem ad altitudinem 10. graduum quum horologia indicabant non 2. horas, ſed 2. horas 4. min. ubi tum loci ejus longitudinem, juxta regulam, inveniſſem 14½. gradus Orientem verſus. Sed certum eſt, me in priori temporis dimidio inter 2. obſervationes progreſſum fuiſſe ½ gradum, quoniam ponitur, me toto tempore profeciſſe 1. gradum, velocitatemque fuiſſe æquabilem. Eram igitur meridie in longitudine 15. graduum Orientem verſus, ſicuti prius erat inventum.

Pariter poteſt demonſtrari, progreſſum navis Occidentem verſus nil obſtare, ſed regulam ſequendo, iterum invenire longitudinem loci, quem meridie prænavigaſti.

Si jam curſus inter 2. obſervationes Meridiem verſus vel Septentrionem deſciſcat, imo licet fieret directe Septentrionem vel meridiem verſus, modo ponatur æquabilis velocitas, nullus inde orietur error ſi Solis altitudo ſumatur, quando prope Orientem vel Occidentem eſt, quibus in locis alibi quoque dictum eſt optime fieri obſervationem. Ratio hæc eſt, quando 2. loca Septentrionaliter vel Auſtraliter a ſe mutuò diſtant, & ſolummodo 1. vel 2. gradus in latitudine differunt, ſi Sol reſpectu unius loci in Oriente vel Occidente verſetur, ad certam ſupra horizontem altitudinem, etiam quam proxime eodem tempore ad eandem altitudinem ſupra horizontem alterius loci apparebit. Ita ut comperiam, licet navis inter matutinam & veſpertinam obſervationem 2. gradus navigaret, quod raro vel nunquam accidit, nullum tamen in longitudine errorem hinc oriri poſſe, vel tantum paucorum minutorum.

Præſcriptis ergo modis, vel per ortum & occaſum Solis, vel per occaſum & ortum Solis, vel per 2 æquales Solis altitudines, tuto ſemper uti poſſumus, non obſtante progreſſu navium; quemcunque hæ teneant curſum.

Si autem procul ab Æquatore Septentrionem vel Meridiem verſus naviges, præſertim hyeme, altitudo Solis lente mutatur, unde incertæ ſunt obſervationes; ſed iis in locis gradus longitudinis ſunt breviores, vel pauciora milliaria continent quam prope Æquatorem, ideoque errores in inveniendis longitudinibus eo minus ſenſibiles ſunt.

IX.

Potes verò, præſertim in iis oris, quæ procul ab Æquatore Septentrionem vel Auſtrum verſus remotæ ſunt, vel etiam ubicunque velis, præſcriptam regulam ad praxin vocare, obſervando 2 æquales altitudines cognitæ alicujus ſtellæ, quæ multum attollitur ſupra Horizontem. Nam inde ſecundum memoratam regulam, diſces quâ horâ Horologiorum in Meridiano fuerit ſtella, & porro cognita ejuſdem *aſcenſione recta*, ut & *aſcenſione recta* Solis, facile inde ſupputabis horam ſolarem, qua comparatâ cum horâ Horologiorum, ut ante, habebis longitudinem loci, ubi fuiſti ſtella exiſtente in Meridiano.

X.

Quando Horologia, quorum aliquamdiu motus fuit accuratus, ab invicem paululum differunt, prout diuturnitate temporis facile accidit, ut unum vel alterum minuto circiter deficiat, eo in caſu computatio ineunda eſt erit ſecundum iſtud, quod celerius movetur: niſi noris cauſam veriſimilem ob quam citius moveatur; facilius enim Penduli motus retardatur, quàm acceleratur: nam filum, cui Pendulum appendet, poterit forſan per violentam navis agitationem nonnihil extendi, ſed nequit contrahi.

X I.

Quando videndam ſe offert regio cognita, ne negligas annotare longitudinem illius, quantum exacte fieri poterit, ex inventa longitudine loci in quo verſaris; Primo ad corrigendas inde mappas marinas, poſtquam longitudo loci fuerit diverſis temporibus comperta eadem, ita ut nil amplius de ea dubites. In his enim mappis quantum attinet ad ſitum locorum Orientem & Occidentem verſus, multa ſuperſunt emendanda. Secundo ut ſcias, in proſecutione tui itineris, quantum reſpectu loci viſi velificando progreſſus fueris ad Orientem vel Occidentem: etiamſi infortunio, vel negligentia, omnia quieſcant Horologia, poteris eadem ad motum rurſus adaptare, & diſponere ad horam per Solem compertam. computando porro longitudinem ab ejusdem loci viſi Meridiano. Nam nullatenus teneris certum Meridianum alicujus loci cogniti, pro initio computationis longitudinum habere, cujus uſus tantum eſt in mappis vel Tabulis longitudinum, in quo caſu uſu venit Meridianus montis Pici in inſula Teneriffa, vel Meridianus inſularum Corvo & Flores, occidentaliſſimarum Azorum vel inſularum Flandricarum, vel cujusvis alterius loci: & foret egregium (quod non obtinet) ſi omnes auctores unum eundemque Meridianum pro primo eligerent, ut ſingula loca iisdem gradibus longitudinis pariter ac latitudinis determinarentur: ſed in itinere ſatis eſt longitudinum differentiam obſervare, initio computationis facto a Meridiano cujuscunque loci.

X I I.

Si accidat, ut mari medio omnia Horologia quieſcant, quam primum fieri poteſt, rurſus eadem ad motum adapta, ut

ut illorum ope ſcias, quantum dein ad Orientem vel Occidentem progreſſus ſis, quod non parvi eſt momenti, nam defectu hujus notitiæ, nonnunquam violentis fluctibus ita abriperis, ut, licet vento ſecundo naviges, tamen retrorſum abigaris, cujus rei varia dantur exempla.

F I N I S.



EXCERPTA EX LITERIS DATIS LONDINI 13/23 JANUARII MDCLXV.

Tandem Navarchus Holmius huc advenit, & relatio, quam ipſe mihi communicavit de experimento, quod de noſtris Horologiis fecit, plane nos certos facit de bono, qui ſperandus eſt, ſucceſſu; Cum ad inſulam St. Thomæ ſub æquatore eſſet, ut inde huc veniret, coactus fuit, longiſſime Occidentem verſus curſum dirigere, proſperum ut obtineret ventum; cum ergo ſub ejus auſpiciis quatuor darentur naves, omnes ſimul navigarunt per 600 *milliaria non mutato curſu: cum dein ſecundum ventum nacti eſſent quo peterent littora Africæ, eo tendebant, curſum ſuum Orientem inter & Septentrionem dirigentes; cumque hoc curſu* 4 *vel* 500 *milliaria confeciſſent, judicabant navitæ* 3 *navium quæ ſub ejus erant auſpiciis, ſe procul a prædictâ orâ eſſe, ita ut non ſufficientem aquæ quantitatem haberent, dum eo pervenient; Navarchi Holmii navis ſatis habebat; ſed ubi audiret, quid ſentirent cæteri, qui tribus reliquis præerant navibus, omnes nautas & gubernatores convocari juſ-*

sit, ut deliberarent de eo quod faciendum esset. Ubi verò vidisset commentarios, & ephemerides, quas illi, qui præerant 3 iis navibus proferebant, & conjecturam de loco in quo versabantur; cumque post longas deliberationes, omnes censerent, præstare ad Barbadas trajicere, quam oras Africæ quærere, quia ventus longe citius eos illuc transferret, dixit ille: Viri computatio vestra cum nostra minimè convenit; nam secundum Horologia mea processi, unde concludo, vos errare omnes, statuendo nos multò longius Occidentem versus esse progressos, quam revera sumus, unius error est 120 milliaria, alîus 100, alîus 80: verùm ita Horologiis confido ut hac vice experimentum facere velim; nam secundum meam computationem insula del Fuogo (quæ una est ex insulis Capoverdæ seu promontorii Hesperii,) non ultra 30 milliaria a nobis abest; Ibi nobis aquam possumus curare, & eo cursum dirigere constitui; Si vera est computatio, multum præstabit nobis hanc viam ingredi, quam a vobis ostensam; sin evenerit aliter, biduum tantum producemus navigationem, satisque aquæ interim supererit, ut Barbadas perveniamus; quoniam tanta mihi in navi copia est, ut vobis defectum vestrum supplere queam; Addens quem cursum tenere vellet, mandavit ut sequerentur ipsum cæteri. Postero mane detegebant insulam del Fuogo, & opportuno illuc advenêre tempore, uti prædixerat: Cogor hic desinere, communicaturus tecum reliquos omnes casus peculiares, quos scriptis mandare promisit, quamprimum illos nactus fuero.

Nota, hæc Horologia fuisse ex primo Pendulorum genere, nec tam exacta quam recentiora.

EX-

EXCERPTA EX LITERIS HAGÆ COMITUM, DIE XXVI. FEBRUAR. MDCLXV. DATIS.



Um per aliquot dies necesse mihi foret cubiculum tenere, & variis observationibus circa duo mea novæ fabricæ Horologia pendula tempus impenderem, mirum quendam eorum effectum, & a nemine unquam vel cogitandum, detexi. Suspensa enim juxta se invicem ad distantiam unius aut duorum pedum, tam accurate congruebant, ut sine ullâ variatione pendulorum vibrationes simul peragerentur. Quod cum per aliquod tempus impense miratus fuissem, tandem reperi ex aliquâ quasi sympathiâ id oriri; ita ut si pendula movissem vibrationibus diversis & ut ita dicam intermixtis, intra dimidiæ horæ spatium consona rursus fierent, & sibi mutuo, quamdiu motum non turbabam, responderent. Remotis deinde à se invicem Horologiis, & ad distantiam 15. pedum suspensis, uno die quinque secundorum discrepantiam animadverti, quæ clare demonstravit, priorem pendulorum convenientiam, uti dixi, à sympathia quadam debuisse proficisci; quæ, meo quidem judicio, unicè insensili aëris agitationi, per pendulorum motus productæ, adscribi potest. Continentur tamen Horologia suis Capsis, quarum utraque si omne plumbum contentum numeres, centum fere li-

brarum pondus æquat. Et hoc observandum, pendula, cum congruunt, non parallelis motibus ferri, sed contrariis, nunc accedendo, nunc recedendo. Quando autem horologia ad parvam distantiam rursus à me fuere posita, pendula, priorem convenientiam brevi tempore recuperarunt.

Nec hisce contentus, asserem latum tres pedes, crassum unum pollicem, ita interposui, ut pars inferior fundum tangeret, superior Horologia excederet & quasi separaret. Non turbata tamen fuit motuum concordia, sed dies noctesque perduravit, imò si ipse turbassem, brevi instaurata fuit. Nunc in id incumbo, ut quam accuratissime Horologia concordent, experturus deinde ad quam usque distantiam sympathia hæc sese exerat; sed, ut ex observatis auguror, non infra 5. aut 6. pedes subsistet. Major tamen horum omnium est expectanda veritas, quam præstabit diligentia mea, & accuratior in rei causas inquisitio.

Quicquid sit, habemus duo Horologia, quæ nunquam inter se discrepant: quod etiamsi mirum sit, tamen est verissimum. Addo, præter Horologia quæ novo hoc invento constructa sunt, nulla alia idem præstitisse; unde simul patet, quam accurata illa sint, quæ ad perpetuum consensum tantillum requirunt.



DE
HUGENIANA
CENTRI
OSCILLATIONIS
DETERMINATIONE
CONTROVERSIA.



DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA.

I.

Observationes Abbatis Catelani in propositionem, quæ fundamentum est 4ᵉ. partis tractatus de Pendulis, Hugenii.

DOminus Hugenius in tractatu suo de Pendulis, ut nil quod ad materiam spectat intactum relinqueret, hanc divisit in 5 partes, in quarum 4ª. fuse examinat quæstionem de *Centro Oscillationis* vel *vibrationis*. Sed cum difficile sit animo semper æqualiter attento abstrusas veritates, quales sunt Mathematicæ, perpendere; non est quod miremur, si quæstionem illam non æque accurate, quam quidem reliquas ejusdem operis, examinaverit. Principium autem, quo nititur totum ejus Systema Oscillationis hoc est.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compositum atque e quiete dimissum, partem quamcunque Oscillationis integræ confecerit; atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quo usque possunt ascendere; hoc facto centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam Oscillationem obtinebat *. * Vide supra pag. 126.

Ut parum firmam propositionem hanc demonstremus, sufficiet observasse; vim, quam vocamus gravitatem, longe aliter agere in pondera inter se juncta quam in pondera a se invicem separata. Sint A & B æqualia pondera, quorum TAB XXVIII, Fig. 1.

non considerantur neque magnitudo neque figura, quasi singula in unicum punctum reducta forent; si separatim suspensa ex eodem puncto D, & elevata ad idem planum Horizontale D A B, dimittantur usque ad F & G, gravitates eorum, ex ratione Mechanica, quæ cum experimentis, & principiis Physices congruit, augebuntur in tali ratione, vel quod idem est, acquirent velocitates tales, ut harum quadrata sint inter se ut altitudines A H & B I. unde illa pondera perpendiculariter descendunt ad Horizontem.

Quod si dein pondera hæc duo, lineâ aut virgâ inflexili A B, quam pondere expertem ponimus, conjungamus, & ex eodem puncto D, ad memoratas distantias D A & D B, suspensa, dimittamus ad F & G ab eâdem, quâ ante, altitudine. Pendulum ex illis compositum, acquiret tantum velocitatis quantum summa duorum Pendulorum simplicium, quoniam commune gravitatis centrum E idem, quod antea, manebit, & ponderum non mutatur situs respectu centri Telluris; sed partes, in quas tota illa velocitas se distribuet ponderibus A & B, erunt inter se ut arcus A F, B G, vel ut radii D F, D G; quoniam in hoc casu ratio inter motus ponderum pendebit ab eorum situ respectu puncti suspensionis D, quod est motuum centrum. Triangula autem H A F & I B G, ut & triangula A F D, B G D cum sint similia, latera eorum A H & B I, A F & B G, D F & D G sunt proportionalia, id est datur eadem ratio inter altitudines, unde pondera A & B descendunt, & inter velocitates quas acquirunt descendendo; sed altitudines sunt eædem ac in priori suppositione; ergo velocitates sunt diversæ, quoniam illæ altitudines, quæ sunt proportionales velocitatibus ponderum simul appensorum, non sunt proportionales nisi quadratis velocitatum, quando sunt separata.

Porro ponamus pendulum compositum in vibratione suâ occurrere plano duro D F G, quo rumpatur, ita ut a se invicem pondera solvantur, erunt hæc reflexa juxta tangentes arcuum F A & G B ad altitudines, quæ inter se erunt ut quadrata velocitatum, quas cadendo acquisivere, id est, ut quadrata radio-

radiorum D F & D G, vel horum proportionalium A H & B I. nam ſeparatio ponderum non mutat quantitatem motus eorum: efficit ut moveantur juxta legem corporum cadentium, quæ non inter ſe conjuncta ſunt. Demonſtratur in Mechanicis, altitudinem perpendicularem ad horizontem, unde deſcendit, vel ad quam aſcendit, commune gravitatis centrum multorum ponderum, æqualem eſſe ſummæ altitudinum, quarum reſpectu (gallice *par raport auquelles*). pondera deſcendunt vel aſcendunt, diviſæ per eorundem numerum: ſed probavimus pondera, quæ ſeparantur, rupto pendulo percuſſione in planum oſcillationi illius oppoſitum, iterum aſcenſura eſſe, ad altitudines diverſas ab iis, unde deſcenderunt, & quidem tales, ut ſummæ ad utramque partem æquales eſſe nequeant; nam ultimæ altitudines ſemper habent pro radicibus quantitates primis proportionales, & prætereaeandem, quam eorum radices componentes ſummam, quæ exprimit totam celeritatem penduli A B; ſi ergo diverſas illas ſummas ſeparatim dividamus per numerum ponderum, habebimus altitudinem ad quam centrum commune gravitatis iterum aſcendit, diverſam ab illa, unde deſcendit; quoniam ſunt partes aliquotæ ſimiles quantitatum inæqualium.

Propoſitio igitur Domini Hugenii falſa eſt, & conſequenter quidquid concluſit circa centrum Oſcillationis corruit; vera autem Mathematica hujus quæſtionis ſolutio hæc eſt.

I I.

Domini Abbatis Catelani Examen Mathematicum Centri Oſcillationis.

QUæſtio de determinando centro Oſcillationis, ſi bene intellecta fuerit, haud difficilis eſt. Centrum Oſcillationis vocatur punctum mobile in Pendulo ad talem ab axe, vel centro ſuſpenſionis, diſtantiam, ut ſi omnes aliæ Penduli partes deſtruerentur, illa ſola pergeret in vibrationibus ut antea; id eſt eodem tempore ac totum Pendulum; Quod ita non fiet cum aliis partibus ſingulis ſeparatim ſumtis; nam

 quæ

quæ axi viciniores sunt, breviores & frequentiores vibrationes peragent quam remotiores, si arcus similes describant, & aër non resistat.

Cujus rei ratio est, quod viciniores describant arcus minores & acquirant celeritates majores respectu arcuum quam remotiores: nam arcus sunt proportionales quadratis, & velocitates radicibus eorum; quo autem radices minores sunt inter se, eo majores sunt respectu quadratorum suorum.

Cum in Pendulo omnes partes nisi simul, propter earum conjunctionem, moveri nequeant, vibratio minus distantium ab axe ita retardata est a vibratione remotiorum, & vibratio remotiorum ita accelerata est a vibratione aliarum, ut inter illas detur compensatio velocitatum proportionalis arcubus quos describunt; ita ut tempus vibrationis totius Penduli medium sit inter tempus, quo Oscillationem peragunt ejus partes a se invicem solutæ, ut sit æquale summæ illorum temporum, divisæ per numerum partium, quas ut Mathematice & exactissime procedamus consideramus, ac si reductæ essent in puncta.

Constat experimentis, & per Philosophiam Cartesianam demonstrari potest, omnia gravia tellurem versus cadere in temporibus quæ sunt in ratione subduplicatâ, vel sicuti radices, altitudinum, unde descendunt, si verticaliter descendant; quod etiam & ex principiis Galilæi demonstrari potest, si cadant per arcus similes, qui incipiunt omnes in eodem plano.

Hæ altitudines in Pendulis, quæ describunt arcus similes circa axem, quocum forrmant idem planum, sunt inter se ut distantiæ ab axe, circa quem moventur.

Proposita ergo quæstio eo redit, *ut dividamus, per numerum partium Penduli, summam radicum distantiarum partium ab axe. vel generaliter summam linearum rectarum quæ repræsentant tempora vibrationium partium separatim sumtarum, ut habeamus lineam rectam, quæ sit mensura temporis, quo vibrationes suas peragit Pendulum, cujus consequenter quadratum vel 3a. proportionalis erit distantia inter axem & centrum Oscillationis.*

Applicatio hujus principii tribus magnitudinibus quas habet Geometria pro objecto satis facilis est. Ad

1. Ad determinandum centrum Oſcillationis lineæ rectæ ſuſpenſæ ex axe, debemus illam concipere, diviſam in partes æquales infinite parvas, vel in omnibus ſuis punctis. Parabola dein ſuper maximâ lineæ ab axe diſtantiâ deſcribenda eſt, cujus vertex ſit punctum axis in quod terminatur hæc diſtantia & parameter linea quæ eſt unitas reſpectu ejusdem diſtantiæ. E quovis lineæ puncto ducenda eſt axi parallela quæ occurrat parabolæ, ejusque applicata fiat, ſumma omnium applicatarum ſimilium eſt æqualis rectangulo, cujus altitudo eſt linea propoſita, & baſis radix diſtantiæ inter axem & centrum Oſcillationis quæſitum; nam ſumma illa eſt Parabola, vel Parabolæ portio, cujus Diameter eſt linea data, & Parameter tertia proportionalis illi lineæ & maximæ ab axe diſtantiæ; vel 4a. proportionalis poſitis hiſce tribus, linea, maxima diſtantia, & differentia hujus cum minimâ.

2. Ut habeamus diſtantiam quâ centrum Oſcillationis Plani remotum eſt ab axe, debemus concipere partem ſolidi Parabolici, cujus Parabolæ habeant pro Diametris maximas diſtantias inter axem & unamquamque linearum parallelarum, quæ implent planum. Si ſolidum hoc in duas partes æquales ſecetur juxta Axis longitudinem; & dimidia pars ſecta fuerit inter applicatas ad diſtantias ab Axe, & inter Plani latera, ſegmentum æquale erit Priſmati, quod pro baſi habet planum, & pro altitudine radicem diſtantiæ axis a centro Oſcillationis ejusdem plani. ſi vibratio fiat circa Punctum vel ſi, quum fit circa Planum, Pendulum ſit compoſitum e partibus, quæ ſint in planis diverſis reſpectu Axis, determinabitur, eâ methodo quâ diximus, quodvis centrum Oſcillationis partium, quæ ſunt in eâdem lineâ rectâ transeunte per punctum ſuſpenſionis, vel in eodem plano transeunte per Axem; omnia illa Oſcillationis centra facient Pendulum multo ſimplicius & habens idem Oſcillationis centrum, ac primum. Invenietur Oſcillationis centrum dividendo per numerum aliorum Oſcillationis centrorum ſummam linearum rectarum, quæ repræſentant tempora, quibus conficerent peculiares ſuas vibrationes. Tempora illa pendent ab arcubus, vel curvarum portionibus, deſcriptis ab omnibus Oſcillationis centris in vibratione Penduli, qui arcus conſiderari debent ſinguli velut infinita plana diverſimode ad Horizontem inclinata.

3. Quod ad ſolida attinet, concipe illa dividi in parallelas

inter se superficies & ad axem perpendiculares; formari debet, secundâ sectione, planum vel superficies curva distantiarum inter illorum centra Oscillationis & axem †, circa cujus puncta moventur. Sic in summâ centrorum, quæ ab unâ parte rectas lineas terminant, ex quibus planum hoc, vel superficies illa curva, composita est, habetur Pendulum magis simplex quam solidum, & cujus vibratio æque diuturna est. Centrum Oscillationis novi illius Penduli determinabitur transferendo omnia illa centra Oscillationis particularia ad Axem qui est eorum numerus, & ponendo illum axem ita moveri, ut puncta ejus percurrant eosdem arcus ac centra. Si solida proposita sint Prismata recta, habebunt eadem Oscillationis centra, ac eorum bases, si hæ fuerint perpendiculares ad axem.

Sic centrum Oscillationis solidi pendet a centris Oscillationis certarum superficierum motarum circa punctum, quarum commune Oscillationis centrum est centrum Oscillationis lineæ rectæ motæ circa aliam rectam vel curvam; ita ut non requirantur aliæ regulæ pro corporibus quam pro lineis & superficiebus.

M O N I T U M.

Observationes Abbatis Catelani primum editæ fuere in 25 diario Parisiensi anni 1681, & examen Mathematicum in 29 diario ejusdem anni. Scripta ambo in primo diario sequentis anni iterum extant, cum monitu varia desici in prima editione, quam solam Hugenius viderat cum respondit; & in qua non reperiuntur ea quæ minori charactere hic edita sunt. Sola verba sequentia in prima dantur & in secunda fuere omissa post †. centrum Oscillationis hujus plani coincidet cum centro Oscillationis solidorum illorum.

I I I.

Excerpta ex literis Domini Hugenii, quibus respondet observationi Abbatis Catelani in 4am. propositionem Tractatus de centris Oscillationis.

ADmiratus vidi, Theoriam meam de centro Oscillationis oppugnari, contra quam per 9 annos, a quibus typis man-

mandata fuit, nemo quid protulit; ſed conſiderata refutatione, qua Abbas Catelanus 4am. meam propoſitionem aggreditur, non vidi, quod ullatenus me feriat. nam ut paucis dicam, in quo fallitur; negat, datis duabus lineis & præter has, duabus aliis, quæ diverſam quam primæ inter ſe rationem habent, ſummam duarum ultimarum æqualem unquam fore ſummæ duarum priorum.

Concipe priores 5 & 10 pedum, & alteras 3 & 12 & vide num harum ſumma æque ac illarum non ſit 15: ut autem pateat errorem ejus inde oriri, utar eodem, quod ille propoſuit, exemplo.

A & B ſunt duo pondera applicata virgæ vel lineæ D B, TAB. XXVIII. Fig 2. quæ conſiderari debet ut inflexibilis & ſine pondere; quæ libere notetur circa punctum D: tale Pendulum compoſitum voco e ponderibus A & B; ſi hoc peragat partem vibrationis, Ex. Gr. usque ad D F G, & occurrat plano, ad quod frangatur, ut pondera a lineâ inflexili ſeparentur, & tendat ſurſum eorum unumquodque cum velocitate acquiſita, ad maximam quam poteſt altitudinem, velut ad L & M, ſuper planis inclinatis ſi velimus, quæ tangant arcus A F, B G; dico commune centrum gravitatis ponderum A & B quæ aſcendunt in L & M tunc ad eandem fore altitudinem, ac erat in E, ante vibrationem inchoatam.

Abbas Catelanus ut falſam hanc probet propoſitionem, demonſtrat, altitudines, ad quas duo pondera ſoluta aſcendunt, ut hic N L, O M, diverſas eſſe ab iis unde deſcenderunt, ſcilicet A H, B I. id quod veriſſimum eſt ex ratione ab ipſo datâ, quod alteræ ſint inter ſe ut lineæ D F, D G, alteræ vero ut quadrata harum linearum; *ſi ergo dividamus*, inquit *diverſas illas ſummas per numerum illorum ponderum*, id eſt, ſi ſumamus dimidium linearum L N, M O, & dimidium linearum A H, B I. *habebimus ab una parte altitudinem ad quam centrum commune gravitatis aſcendit, & ab altera altitudinem unde deſcendit:* id verum eſt, per diviſionem has duas altitudines detegi. ſed minime concedo, duas ſummas diviſas differre inter ſe; quod Abbas Catelanus probare

bare nequit; neque igitur, duas inventas altitudines centri gravitatis inæquales esse, id quod in conclusione contendit, nam licet altitudines L N, M O, diversam habeant rationem inter se quam altitudines A H, B I, non sequitur summas primarum & secundarum differre.

Possem præter hunc alium locum observare, ubi fallitur Abbas Catelanus, sed non hærebo, quoniam id, quod profert non spectat ea quibus me aggreditur. Unicum verbum addam de examine ejus Mathematico, ut vocat, de centro Oscillationis edito in diario 15. Dec. 1681. ubi contendit se invenisse regulam hanc generalem, scilicet, *per numerum partium Penduli dividi debere summam radicum distantiarum partium ab axe; ut habeamus lineam rectam, quæ sit mensura temporis quo vibrationem peragit illud Pendulum, cujus consequenter quadratum vel 3ª. proportionalis erit distantia inter axem & centrum Oscillationis.*

TAB. XXVIII. Fig. 3. Relicto omni peculiari examine, satis erit ad vitium regulæ detegendum, notasse, juxta hoc principium, duas lineas graves ut A B, B C, junctas & inter se angulum quemcunque efficientes, suspensas in B semper idem Oscillationis centrum habere; ideoque vibrationes semper fore æque veloces, uti facile intelligunt hi, qui in hisce materiis parum sunt versati; sed & illi videbunt, quod æqualitas illa vibrationum locum habere nequeat, quoniam augendo angulo tandem duæ lineæ simul junctæ unicam efficiunt rectam *a* B *c*, cujus vibrationes forent æque diuturnæ cum vibrationibus anguli A B C, linea vero recta in puncto medio suspensa, nullas peragit vibrationes, aut saltem velocitate infinite exigua movetur.

Porro credo Abbati Catelano satis difficile fore, suâ regulâ, centrum Oscillationis in quibusvis particularibus figuris, etiam simplicissimis, determinare, sed, si id forte perficiat, inveniet, suam Theoriam cum experientiâ nunquam convenire, & meam semper summâ exactitudine eidem respondere, si modo experimenta exactissimè instituta fuerint.

Non possum hac occasione silentio præterire, P. Dechales, in

in quodam magni ſui Curſus Mathematici loco, memorando experimentum cum Pendulo compoſito ex duobus ponderibus inſtitutum, in quo computans rationem non habuit (ut debebat) ponderis baculi, cui pondera erant applicata, immerito regulas noſtras de determinando centro gravitatis culpare, quaſi non convenirent cum iis quæ ille revera obſervarat.

I V.

Exceptio Abbatis Catelani ad reſponſionem Hugenii.

NOn debebat Hugenius a ſuo principio ſeparare conſequentiam, ut hanc aliter intelligat, quam ego in ſcriptis meis. Prorſus deberem oblitus eſſe Arithmetices, ſi abſolute negarem, ut me facere contendit, *quod* 4 *magnitudines inæquales poſſint efficere* 2 *ſummas æquales*, quum nil aliud concludo in ſcriptis, præterquam quod propoſitio Hugenii vera eſſe nequeat, niſi pars ſit æqualis toti. Ut hoc melius pateat, debemus hic proferre propoſitionem illam generalem propriis terminis.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compoſitum, atque e quiete demiſſum, partem quamcunque Oſcillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus ſingula, relicto communi vinculo, celeritates acquiſitas ſurſum convertere, ac quouſque poſſunt aſcendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compoſitæ, ad eandem altitudinem reverſum erit, quam ante inceptam Oſcillationem obtinebat.

Cum hæc propoſitio terminis generaliſſimis concepta ſit, ita ut numerus ponderum, ſitus eorum, duratio Vibrationis, ipſam non mutent, pono, Exempli cauſâ, Pendulum compoſitum e ponderibus duobus æqualibus, & inter ſe ad quam libuerit a ſe invicem diſtantiam junctis. Conſidero porro altitudines, quæ ſunt proportionales quadratis velocitatum in duobus Pendulis ſimplicibus, eſſe inter ſe ut velocitates in

Pendulo compoſito. Nam eandem habent proportionem, quam arcus deſcripti a duobus ponderibus æqualibus, ex quibus Pendulum formatur; duo illi arcus ſunt ſpatia, quæ duo pondera percurrunt, eodem tempore, velocitatibus, quæ neceſſario ſunt ipſis ſpatiis proportionales.

Celeritas totalis Penduli compoſiti, quæ inter partes diſtribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipſæ deſcribunt, ſemper æqualis eſt ſummæ celeritatum, quas eædem partes acquirerent, ſi a ſe invicem fuiſſent ſejunctæ, & omnes ſeparatim ex iisdem altitudinibus & ad easdem ab axe, diſtantias deſcendiſſent. Altitudines ſemper ſunt ut quadrata velocitatum, ſive pondera ſeparatim adſcendant, ſive deſcendant. Omnibus his bene intellectis facile patet, ad hanc propoſitionem redire quæſtionem. *Si habeamus duas magnitudines inæquales* a a *&* b b, *ſummam radicum ipſarum* a † b, *& quadrata partium illius ſummæ, quæ ſint proportionales dictis magnitudinibus, quæque adeo communem denominatorem habeant* a a † b b, *& numeratores diverſos* a^3 † a a b *&* b^3 + a b b, *demonſtrare, ſummam harum duarum magnitudinum, quæ altitudines, unde duo pondera æqualia Pendulo alligata dimittuntur, repræſentant, non eſſe æqualem ſummæ quadratorum illarum partium, quæ altitudines exhibent, ad quas duo pondera, poſtquam percuſſione fuerint ſeparata, redeunt, niſi minor ex hiſce magnitudinibus* a a *&* b b *ſit æqualis majori, id eſt, quia iſtæ magnitudines in quæſtione propoſitâ ſemper inæquales ſunt, niſi pars æqualis ſit, toti.*

Maxime ſenſibilis hujus veritatis demonſtratio eſt comparatio terminorum quæſtionis per regulas Algebraicas, id quod examinandum relinquo iis, qui uſum illarum regularum norunt. Quod rem ipſam ſpectat, nullius eſt momenti; ſive centrum Mathematicum Oſcillationis bene ſive male determinatum ſit, inventio Penduli nec minus utilis hominibus, nec minus auctore ſuo digna eſt.

V. *Ob-*

V.

Objectio Abbatis Catelani contra motum Pendulorum in Cycloidibus.

Si vis gravitatis ageret in corpora tanquam in puncta Mathematica, vel si spatium contentum sub Cycloide esset divisibile in infinitas alias Cycloides, similes & parallelas, quidam Geometræ revera demonstrassent, uti contendunt, pendula illam debere describere curvam ut Vibrationes, æqualibus temporibus, peragant; sed nulla datur pars in corpore gravi, quale est Pendulum ex cupro vel plumbo, quæ non æque ac centrum Tellurem versus propellatur magis minusve pro inclinatione, juxta quam movetur; Præterea spatium, quod continet Cyclois, non potest repleri infinitis aliis Cycloidibus similibus, quoniam tripla circuli superficies æqualis esset duplo quadrato diametri. Latet igitur adhuc Geometras, quamnam lineam curvam describat Pendulum, cujus Vibrationes sunt isochronæ. Consequentia hæc patet, si consideremus, in corpore Pendulo, quando centrum vel alia quælibet pars Cycloidem percurrit, partes viciniores Axi, vel inde remotiores, eodem tempore, describere lineas curvas inter se similes, sed quæ non sunt Cycloides; ut patet ex dictis, & quia in quovis arcu perpendiculares ductæ e tangentibus suis ad tangentes Cycloidis sunt æquales. Omnes itaque partes non habent æqualem inclinationem in descensu, neque Tellurem versus cum eâdem velocitatis proportione propelluntur; unde sequitur, Vibrationem totius Penduli, quæ necessario pendet a Vibrationibus, quas peragunt partes ejus separatim sumtæ, differre a Penduli Vibratione, si reductum foret ad illam partem, quæ movetur in Cycloide.

Videtur huic potius causæ, quam crassitudini fili, cui pondus alligatur, adscribendam esse artificum praxin, quos experientia cogit curvaturam a Cycloide diversam laminis tribuere, inter quas suspendunt Pendulum.

Non tamen mihi animus est, hic absolute oppugnare sententiam illorum, qui credunt corpora gravia moveri, veluti puncta, quæ in Cycloide, ad Horizontem perpendiculari, peragunt suas Oscillationes, temporibus æqualibus, a quacunque dimittantur altitudine. Contendo tantummodo, illud nondum esse demonstratum, nisi alterutrum horum probetur, vel quod curvæ parallelæ Cycloidi eandem habent proprietatem quantum ad motum corporum, licet non sint Cycloides, vel quod inæqualitas temporis, quod brevius est in parallelis, interioribus & Cycloide viciniores Axi, ita moderetur contraria inæqualitate temporis, quod majus est in parallelis exterioribus & ipsâ curvâ remotioribus ab Axe, ut compensatio inæqualitatum ambarum in Cycloide detur, quæ tanquam medium locum tenet inter omnes curvas ipsi parallelas. Geometræ hanc difficultatem examinabunt si dignam suâ attentione judicent; nec, nisi postquam eorum sententiam novero, observationes meas hac de re dare potero.

VI.

Responsio ad objectiones Hugenii adversus methodum Abbatis Catelani de determinando Centro Oscillationis.

HUgenius proposuit objectionem adversus propositionem deductam ex principio, a me, ad determinandum Mathematice centrum Oscillationis Penduli, proposito; sed debuit examinare id, quod præcedit locum, quem e scriptis meis profert, nec generalem habere regulam ad casum particularem tantum accommodatam, quem elegi, ut uterer exemplo simplicissimo & facillimo; scilicet quando Pendula composita sunt ex partibus, quæ describunt arcus similes circa Axem, quocum faciunt idem planum; tum enim distantiæ ab illo Axe sunt radii arcuum, qui habent eandem inter se proportionem, ac perpendiculares ad Horizontem, vel sinus, qui sunt altitudines, a quibus singulæ partes in Oscillatione descendunt. Itaque cum Pendula, de

qui-

quibus Hugenius loquitur, ut probet propositionem meam falsam, sint anguli rectilinei agitati circa verticem, non habentes requisitam conditionem, me non feriunt. Si concipiamus tales angulos moveri circa Axem, per vertices illorum transeuntem, patet summas distantiarum Axis ab omnibus punctis linearum, quæ Pendula componunt, esse inæquales, prout illæ lineæ efficiunt cum Axe angulos magis minusve acutos. Et meâ regulâ detego summas distantiarum esse æquales Parabolis habentibus pro Diametro maximam ab Axe distantiam, & pro Parametro 4.^{am} proportionalem positis hisce tribus, linea datâ, quæ eadem est in quovis Pendulo, maximâ distantiâ, quæ variat pro variis angulis, & unitate; unde sequitur, tempus Oscillationis valere $\frac{2}{3}$ maximæ ab Axe distantiæ, & non in omni casu idem esse; tanto enim brevius est, quanto angulus est obtusior, id est, quanto Pendulum magis Axi vicinum est.

Si Hugenius desiderat propositionem quæ conveniat Pendulis, circa punctum motis, mutanda tantum erunt verba quædam in principio Pendulorum habentibum Axem; loco *radices distantiarum illarum*, legendum *summæ linearum rectarum, quæ repræsentant tempora Oscillationum omnium partium separatim sumtarum.*

Hoc modo propositio inserviet ambobus casibus. Sed res melius intelligitur per generale Principium, quod proposui & ita se habet. *In eodem Pendulo, cum omnes partes nisi simul moveri nequeant, propter suam conjunctionem, vibratio minus distantium ab Axe, vel puncto suspensionis, ita retardatur a vibratione remotiorum, & reciproce Oscillatio remotiorum ita acceleratur per Oscillationem aliarum, ut detur inter illas compensatio celeritatum proportionalis arcubus, vel curvarum portionibus, quas describunt, ita ut tempus Oscillationis totius Penduli sit medium inter tempora Vibrationum, quas peragerent illæ partes, si non inter se forent conjunctæ, id est, ut sit æquale summæ temporum illorum divisæ per numerum partium, quas debemus considerare ut æquales & infinite parvas.*

Demonſtrare potero in ſequentibus, non adeo difficile eſſe, ut quidem Hugenio videtur, accommodare illud Principium ad particulares magnitudinum Geometricarum ſpecies ſuſpenſarum ex Axe vel puncto.

Quod ad experimenta attinet, paratus ſum demonſtrare hæc ita non poſſe inſtitui, ut perfecte conveniant cum regulis ſimplicibus & generalibus, quæ deducuntur e principiis Mathematicis, eandem ob cauſam ob quam generalis regula, ſtabiliri nequit, certa, & conſtans, in caſibus particularibus, qui dependent a pluribus cauſis, non exacte notis.

VII.

Excerpta ex litteris D. Bernoullii datis Baſileæ ad Autorem Diarii Pariſienſis, de Controverſia, inter Abbatem Catelanum & Hugenium, de Centro Oſcillationis.

QUum nondum obſervaverim, Hugenium reſpondiſſe, ad exceptionem Abbatis Catelani, quæ ſpectabat primariam ejus de centro Oſcillationis propoſitionem, te haud ægre laturum credo, ſi verbulum ad ejus defenſionem ad te ſcribam. Quicquid D. Catelanus diſputat, eo redit ut probet, *ſummam radicum duarum magnitudinum quarumvis non poſſe in duas partes ita dividi, ut proportionales ſint ad magnitudines datas, utque ſumma quadratorum ipſorum ſit æqualis ſummæ magnitudinum.* Id vero neutiquam in dubium ab Hugenio vocatur, qui tantum affirmat, *ſummam harum magnitudinum poſſe eſſe æqualem ſummæ duarum aliarum, quæ quadratis priorum proportionales ſunt.* Quod & veritati conſonum eſt.

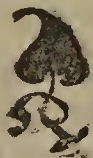
Atque ut oſtendam, controverſiæ omnis cardinem hic verti, utar eodem exemplo de duobus ponderibus æqualibus, & quidem poſitis numeris, ut veritates hæ abſtractæ ſenſui magis obviæ fiant.

Sint

Sint A & B duo corpora ex Axe D suspensa ita, ut unius distantia ab Axe quadruplo major sit alterius distantia. TAB. XXVIII. Fig. 4.

Adeoque si altitudo perpendicularis B I, ex qua descendit corpus B describendo arcum B G, ponatur quatuor pedum, altera A H, unde corpus A delabitur, unius pedis erit. Celeritates igitur, quas separatim cadendo acquirunt, quoniam sunt ut radices altitudinum, se habent ut 2 ad 1. Summa 3, quæ totalem Penduli celeritatem manifestat, quando proportionaliter ad altitudines, sive ad arcus B G & A F dividitur, dat gradus celeritatis, quos obtinent pondera, quando conjunctim in tabulam D G decidunt, videlicet $\frac{12}{5}$ & $\frac{3}{5}$, quorum quadrata sunt $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, unde quæ prodit summa, sane a summa altitudinum, e quibus pondera dimittuntur, differt. Veruntamen hæc quadrata proportionem solummodo altitudinum O M & N L, ad quas pondera, dum a tabula resiliunt, adscendunt, non ipsas altitudines exprimunt; quas inter ratio quidem esse potest, quæ est inter $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, hoc est inter 16 & 1, dum ipsa summa est quinque, quæ est summa altitudinum B I & A H unde pondera delapsa sunt.

Nam si ponamus altitudinem O M $4\frac{17}{17}$ pedum esse, & alteram N L $\frac{5}{17}$, O M se habebit ad N L, ut 16 ad 1; & O M † N L erit æqualis B I † A H. Idcirco centrum gravitatis commune ponderum A & B, ubi in L, M pervenere, erit ad eandem altitudinem, quam obtinebat ante Oscillationis initium. Id clare ex inspectione figuræ apparet. Pondus enim M tantum supra lineam Horizontalem B D elevatur, quantum L infra eam deprimitur, videlicet $\frac{12}{17}$ unius pedis; sequitur hinc in triangulis similibus M P Q & L Q R latera M Q & Q L esse æqualia, hoc est medium lineæ M L, quæ duo pondera conjungit, esse in intersectione lineæ Horizontalis.



VIII. Ex-

VIII.

Excerpta ex literis D^ni Hugenii ad Auctores Diarii Parisiensis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus responsionem ad exceptionem D^ni Abbatis Catelani, de centro Oscillationis.

HUc usque distuli respondere ad exceptionem D^ni Abbatis Catelani, & fere omnis nostræ controversiæ oblitus eram, quoniam non audiveram, ullum ex iis qui tales ponderant quæstiones in illius partes ivisse. Sed cum ex amicis quidam desiderarent, ut Geometris facilius redderem litis nostræ examen; & eo impedirem quo minus illi, qui hanc norunt, silentium meum reprehendant, vos rogo ut diariis vestris, sequentia velletis inserere, cum quibusdam vestrum jam dudum communicata.

Abbas Catelanus, visâ meâ responsione ad primam observationem, suoque errore cognito, credidit se illam posse dissimulare, si diceret, observationes suas ex vitioso autographo editas esse, in quo non solum quædam verba deerant, sed etiam sex septemve ordine sequentes lineæ; cumque illæ suppletæ sint in secunda Editione, ubi addidit, *& quidem tales, ut summæ* cum sex aliis lineis, propositam objectionem omnino mutavit.

Non opportunum tamen duxit hac de re lectorem monere, ne quidem in suâ exceptione, in qua positâ hac mutatione ratiocinatur. Cùm enim antea se demonstraturum promiserat, propositionem meam 4.^am de centris Oscillationum falsam esse nisi pars sit æqualis toti, in præsens ut illud probet, non tantum ponit axioma hoc irrefragabile *totum esse majus parte*, sed præter hoc pro vero habet quoddam, quod sibi finxit, de motu Pendulorum, principium.

Rem

Rem ita se habere ostendam, & ut mutatam ejus objectionem solvam, demonstrabo principium, quod ponit, verum esse non posse. Etiam falsum esse ostendam alterum ejus principium generale, quo utitur *in suâ verâ solutione Mathematica Problematis de centris Oscillationis*, & tandem ambo hæc principia sibi mutuò contrariare: non despero fore ut ipse Abbas Catelanus mecum conveniat, si ad sequentia attendat.

Quæstio secundum illum ad hanc propositionem redit. Si habeamus duas magnitudines inæquales aa & bb, & summam harum radicum dividamus in duas partes, quæ sint inter se ut aa ad bb, quæ partes ideo sunt $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, ut facile per Algebram invenitur, demonstrare, summam magnitudinum aa & bb, quæ repræsentant altitudines, unde descendunt pondera duo æqualia eidem Pendulo alligata, non posse æquari summæ quadratorum partium $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, quarum quadrata repræsentant altitudines, ad quas pondera, percussione separata, redeunt, nisi pars aa æquetur bb; id est (quoniam quantitates in quæstione proposita sunt inæquales) nisi pars æqualis sit toti.

Hæc est propositio Abbatis Catelani, quam tantum clarius exprimere conatus sum, quâ demonstratâ, ut facile fit comparando duas illas summas per calculum Algebraicum, contendit, fundamentalem meam de centris Oscillationis propositionem ruere.

Sed etiam relictâ Algebrâ demonstrari potest illius propositio; nam si ponatur aa æquale esse 1; & bb æquale 4; summa radicum $a + b$ est 3, & partes proportionales hujus summæ sunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$, faciunt enim junctim $\frac{15}{5}$ hoc est 3. Quadrata earundem partium sunt $\frac{9}{52}$ & $\frac{144}{25}$. Hoc igitur solum restaret demonstrandum, summam 1. & 4. non esse æqualem summæ, quæ prodit ex additione $\frac{9}{25}$ ad $\frac{144}{25}$, sive 5 & $6\frac{3}{25}$ non esse æqualia inter se; quod sane per se clarum est.

Vera ergo esset Abbatis Propositio nisi affirmaret quadrata partium $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, quæ hic sunt $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, re-

præsentare altitudines, ad quas pondera sejuncta redeunt. Non dissentiet & facile probari potest illud deductum esse ex Principio, quod sibi finxit, & pro fundamento habet propositionis suæ; scilicet, *celeritatem totalem Penduli compositi, quæ inter partes distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsæ describunt, semper æqualem esse summæ celeritatum, quas eædem partes acquisivissent, si sejunctæ singulæ separatim ex iisdem altitudinibus, & in eadem distantia ab Axe descendissent.* Ponit ergo, ut me refellat, principium hoc, quod falsum contendo; in demonstratione computationem memoratam sequar.

D^nus^ Abbas novit & concedit, detegi altitudinem, unde commune ponderum gravitatis centrum descendit, si dividamus summam altitudinum 1. & 4. (unde duo pondera simul alligata descenderunt) per 2 numerum ponderum, quæ ergo est $\frac{5}{2}$. Concedit pariter, dari altitudinem, ad quam revertitur commune eorum gravitatis centrum, scilicet $\frac{153}{50}$, vel $3\frac{3}{50}$, si per numerum ponderum duo, dividamus summam altitudinum $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, ad quas pondera percussione separata redeunt.

Centrum ergo gravitatis revertetur altius quam unde descenderat, quantum $3\frac{3}{50}$ excedit $2\frac{1}{2}$, quod primario adversatur Mechanices Principio. Hoc si D^nu^ Abbas efficere possit, detectum habebit perpetuum mobile: Quum ergo ejus Principium ex quo falsa sequitur conclusio, falsum sit, exinde nil quo mea labefactetur Propositio, potest inferri vel deduci. Quod ad alterum ejus Principium attinet, quod pro fundamento habet regulæ generalis de determinandis centris Oscillationis, in eundem inducit errorem. Hoc Principium est, *tempus Vibrationis Penduli compositi esse medium inter tempora Vibrationum partium, id est, æquale esse summæ illorum temporum, divisæ per numerum partium.* In Pendulo, quale consideravimus, ubi ponderum distantiæ, a puncto suspensionis, sunt 1 & 4, si ponamus tempus minoris ex partibus separatis esse unum, (unde sequitur, tempus alterius partis separatim agitatæ esse duo;)

secun-

ſecundum ejus principium, ſumma illorum temporum, quæ eſt tria, diviſa per duo, numerum partium, erit tempus Penduli compoſiti, ſcilicet $\frac{3}{2}$. Hiſce poſitis, nil præterea ponendo præter id quod concedit D.^{us} Abbas, deteguntur altitudines, ad quas revertuntur pondera, poſtquam a Pendulo compoſito ſunt ſejuncta; nempe $\frac{4}{9}$ & $\frac{64}{9}$; quarum ſumma $\frac{68}{9}$, diviſa per duo, numerum ponderum, dat $\frac{34}{9}$, vel $3\frac{7}{9}$, altitudinem, ad quam adſcendit commune gravitatis centrum, quæ etiam ſuperat $\frac{5}{2}$ vel $2\frac{1}{2}$ unde demonſtravimus centrum deſcendiſſe. Non addo methodum computationis quæ facilis eſt. D.^{nus} Abbas ergo dum quærit principium bis male divinavit; proprie enim divinare eſt, ratiocinia deducere ex principiis, quæ levem tantum veri ſpeciem præ ſe ferunt; & verum eſſet, quæſtionem de centro Oſcillationis non difficulter reſolvi, ſi, ut ipſe fecit, tantum ponendum foret id, quod ſtatim rem quæſitam determinat.

De cætero, contraria eſſe inter ſe ambo principia clarum eſt; quoniam ut patet, ex his diverſæ ſequuntur concluſiones, altitudines enim, ad quas centrum commune gravitatis aſcendit, diverſæ ex utroque deteguntur, nempe $3\frac{3}{50}$, $3\frac{7}{9}$.

Unum hoc addam, ut reſpondeam difficultati, quam D.^{nus} Abbas propoſuit, contra motum in Cycloide *, hanc difficultatem ſolutam dari in ipſo meo tractatu de centro Oſcillationis in cujus propoſitione 24 explicavi, quomodo effici queat, ut omnia ponderum Penduli puncta moveantur in Cycloidibus æqualibus; licet in praxi minime neceſſaria ſit correctio hæc.

* Vide ſupra pag. 227.

IX.

Reſponſio D.^{ni} Abbatis Catelani ad literas D.^{ni} Bernoulli de Controverſia ſua cum D.^{no} Hugenio de centro Oſcillationis *.

* Vide ſupra pag. 230.

UT reſpondeam ad has literas, idem repetam, quo utitur D.^{nus} Bernoulli, exemplum Penduli compoſiti ex ponderibus æqualibus eidem virgæ applicatis, & ex eodem centro

ſuſpenſis, a quo pondus unum quater magis quam alterum diſtat; ita ut altitudines perpendiculares, unde deſcendunt ſint ut 1 ad 4.

Convenit inter nos de proportione inter has altitudines, & de ſumma velocitatum, quas illa pondera acquirerent, ſi ſeparatim ab iis altitudinibus caderent; ſed contendimus de exprimendis his altitudinibus reſpectu ſpatii, quod ſit communis earum menſura, & pro unitate habeatur. Cum omnibus, qui ante me de ſimilibus quæſtionibus ſcripſerunt, pono veros numeros, quibus exprimuntur altitudines, eſſe quadrata ipſorum numerorum qui velocitates deſignant, in illis caſibus, in quibus inter altitudines & inter velocitates non alia datur ratio, præter generalem experientiâ detectam.

Patet autem ex numeris quos in computatione mea detexi, (cum 9 & 144 ducta in $\frac{1}{25}$ pedis, id eſt 6 pedes cum 1 digito 5 lineis & quod excedit, differant cum 1 pede & 4 pedibus, aut 5 pedibus,) ſummas altitudinum, ad quas adſcendunt pondera in exemplo propoſito, non eſſe æqualem ſummæ altitudinum unde deſcendunt, quam æqualitatem D.[us] Hugenius ponit in generali propoſitione; quâ utitur pro principio in ſuo tractatu de centro Oſcillationis.

D.[us] Bernoulli reſpondet, quadrata numerorum, qui exprimunt velocitates ponderum, tantum exprimere proportionem altitudinum, ad quas revertuntur poſt illorum ſeparationem, & non ipſas altitudines, quæ quidem inter ſe habere poſſunt rationem, $\frac{144}{25}$ ad $\frac{9}{25}$ dum tamen harum ſumma eſt 5, quæ eſt ſumma altitudinum, unde pondera deſcenderunt. Nam altitudines, ad quas revertuntur ſeparata, ſunt juxta illum $4\frac{12}{17}$ & $\frac{5}{17}$, quarum ſumma valet 5., ut ſumma primarum altitudinum 1. & 4. Iterum reſpondere non difficile erit. Rogatum velim D.[um] Bernoulli, dum contendit, proportionem quadratorum numerorum, qui velocitates exprimunt, tantum conſiderandam eſſe, quâ motus lege, & per quodnam principium Mechanicum pondera, de quibus agimus, potius redeant ad altitudines, quas ille notavit, &

quæ

quæ cum ipſius ſententia congruunt, quam ad illarum proportionales $5\frac{11}{17}$ & $\frac{6}{17}$, quarum ſumma eſt 6; vel ad $3\frac{13}{17}$ & $\frac{4}{12}$ quarum ſumma eſt 4; vel ad innumeras alias ſimiles, quæ habeant inter ſe eandem proportionem, $\frac{144}{25}$ ad $\frac{9}{25}$, ſed ex quibus altitudo centri gravitatis reverſi major minorve, quam unde deſcendit deducitur. Certè pondera non revertentur ad omnes altitudines proportionales quadratis velocitatum, quas deſcendendo acquiſiverunt, quoniam gravitas gradatim retardat, & tandem deſtruit velocitates, cum quibus reflectuntur pondera.

Quid ergo eveniet? rogo D^um Bernoulli ut illud explicare velit? An Natura per ſe incerta de eo quod ſibi agendum eſt, pro voluntate D^ni Bernouilli actura eſt? Cum ipſius veniâ, hac de re dubitabo, donec ſententiam ſuam ſolidis argumentis, ex Phyſica deductis probet. Interim credo me jure concludere, rationibus quas affert pro D. Hugenio hoc confirmari, propoſitionem hujus generalem & fundamentalem de centris Oſcillationis non eſſe omni exceptione majorem.

X.

Dn. Bernouillii narratio controverſiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de Centro Oſcillationis, quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dn. Catelani.

Excerpta ex Litteris Dn. Bernoullii Lipſiam miſſis.

Menſe Septembri A. 1681. Abbas Catelanus propoſitionem quandam tractatus Cl. Hugenii, quem de *Horologio*

logio Oscillatorio inscripserat, adortus est, formata contra illam objectione; in qua quia mentem suam minus feliciter expressit, ansam dedit isti controversiæ, quæ hucusque fere inter illos viguit. Verum quidem est, eum initio A. 1682. objectioni suæ, additis paucis lineis, variationem quandam induxisse; sed quoniam ejus partes satis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris sui excitavit opinionem, quasi persuasum haberet, summas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim descendunt, & ad quas postmodum separatim ascendunt, inæquales esse debere hanc solam ob causam, quod *priores altitudines sint proportionales ipsis ponderum celeritatibus, posteriores vero non nisi quadratis istarum celeritatum.* Quare etiam Hugenius, id unicum Catelano scrupulum movere ratus, respondere abstinuit, usque in mensem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12 breviter monstravit, fieri utique posse, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant summam, etiamsi diversam ab illis rationem habeant, neque tum temporis in dubium revocavit πρῶτον Catelani ψεῦδος quod tamen in prima jam objectionis suæ impressione manifeste satis prodiderat, dum supposuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compositum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat summa pendulorum simplicium;* id vero sicco pede præteriit Hugenius, vel quod non penetrarit statim, ob nullam periodorum connexionem, quorsum falsa ista Catelani suppositio tenderet, vel potius quod illi ceu verisimili admodum tum ipsemet adstipularetur. Catelanus interea Hugeniano responso non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis Algebraicis rem aggressus est, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compositi æquet summam celeritatum partium ejus separatarum.* Quo facto controversia ista ultra annum sopita jacuit. Me quod spectabat, cui Hugenii liber tum nondum visus, nedum lectus fuerat, scopum alium non habebam, quam illustrare ejus responsionem, remque examinare, qualiter ab ipso examinata, atque in Actis recensita fue-

fuerat. Animadvertens itaque, Catelani principium ab Hugenio non refutatum esse, & ego illud intactum reliqui, sufficere mihi ratus, si Hugenianum responsum simpliciter applicarem ad præsentem controversiam, proposito eum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compositi; ubi innuere saltem volui, quod supposito pro totali ejus celeritate numero ternario (quicquid statuatur de celeritatibus utriusque separatim spectati ponderis, dummodo eæ sint in ratione 2 ad 1) quadrata $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$ ex mente Hugenii significare debeant non nisi *rationem altitudinum*, ad quas ascendant separata pondera, minime vero *ipsas altitudines* (quod ipse quoque postmodum indigitavit Hugenius in secunda responsione, 8 Jun. 1684.*) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogeneæ, se mutuo mensurare non possunt; partim etiam, quia ipse Catelanus urgere saltem videbatur, altitudines esse *proportionales* quadratis, vel *sicut* quadrata celeritatum; tametsi in proxime sequenti calculo quadrata ista pro ipsis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo post, & perlecto Hugenii libro, animadvertebam, Propositionem controversam ex priore Hypothesium, quas Auctor initio stabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi possit, quin simul evertatur altera; quocirca judicabam, si Catelano falsa fuisset visa propositio, eum potius ipsam adoriri debuisse Hypothesin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero cum hujus principii veritatem nullo jure in dubium revocare possem, atque simul etiam seriem ratiocinii a Catelano satis confuse propositi evolvere cœpissem, errorem ejus detexi illico, falsamque cognovi esse, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compositi æqualem esse summæ celeritatum partium ejus separatarum.* Atque ut ostendam, animadversum mihi fuisse errorem, priusquam Hugenii epistola de 8. Jun. lucem aspexisset, afferam hic causam physicam, omissam ab Hugenio, qua fit, ut penduli compositi celeritas perpetuo minor sit celeritate partium ejus separatarum: Ponamus majoris eviden-

* Vide supra pag. 232.

TAB. XXVIII Fig. 5. dentiæ ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili D B libere hinc inde moveri posse, sic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis secum rapiat pondera, non tamen impediat descensum illorum in linea recta centrum Terræ versus. Quo posito, constat, utrumlibet pondus sigillatim dimissum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur absque virga D B, utpote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; id est si pondus A absque virga certo tempore conficit spatium A H, & pondus B spatium æquale B N, utrumque etiam cum virga, sed sigillatim, dimissum eodem tempore idem spatium A H & B N conficiet. Constat insuper, quod si gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivis ab axe distantiis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum, propterea quoniam exacto certo tempore unum eorum reperiretur in H & alterum in I, vel prius in L, posterius in N, sive absque virga, sive cum virga, sive sigillatim sive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia A H & B N transigere annitantur, & tamen interea pondus A junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere nisi ad L, dum pondus B jam est in N, hinc sequitur, gravitatis vim in pondere A non esse exhaustam; adeoque residuum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipsum axem D, eundemque premendo aliquam sui partem ibidem insumere & deperdere; siquidem virga hocce casu instar vectis considerari possit, prout extra dubium est; quod si corpus B infinite tarde moveri, id est, firmum & stabile esse intelligatur sicut axis D, corpus A partem sui ponderis æque in axem D atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive est, si quis examinare vellet, quantam partem celeritatis suæ pondus A in premendo axe D consumere debeat, eum exinde, imitando Dn. Catelani ratiocinium, veritatem aut falsitatem Hugenianæ Hypotheseos, inque hac fundatæ Propositionis, detegere posse.

Ro-

Rogantur hac occaſione eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum obſervent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, ſed tardius moto: ſi namque celeritatis exceſſus, qui hinc inde communicandus eſt, in eadem ratione diſtribueretur, in qua diſtribuitur onus aliquod, quod vecti duobus ſuſtento fulcris impoſitum eſt, nimirum in ratione reciproca diſtantiarum mobilis a fulcris, tum imitando ratiocinium Dn. Catelani, deprehenderemus, ſummam altitudinum, ad quas aſcendunt ſeparata penduli pondera, viciſſim nunc minorem eſſe ſumma altitudinum, e quibus antea conjunctim deſcenderant, quod iterum Hugenianam Propoſitionem everteret.

En calculum: Eſto altitudo A L $= 1$ ped.
Altitudo B N $= 4$ ped.

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, ubi deſcendit ſeparatim $= 1$

Celeritas ponderis B acquiſita in puncto N, quando cadit ſeparatim $= 2$

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, quando deſcendit conjunctim $= x$

Igitur Exceſſus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat $= 1 - x$

Et pars hujus exceſſus, quæ ſoli ponderi B communicatur $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim cadit $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Atqui vero $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x, x :: 4, 1$. Igitur $x = \frac{9}{17}$ & $4x = \frac{36}{17}$ eorumque quadrata $\frac{81}{289}$ & $\frac{1296}{289}$ quorum ſumma $4\frac{13}{17}$ minor eſt $1 + 4 = 5$.

Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc monebo, quod etiamſi commune gravitatis centrum juxta illum altius aſcendere deberet, quam deſcendit, nondum tamen ſequatur, repertum fore motum perpetuum, ut ſibi perſuadet Ill. Hugenius; quoniam in iſtis abſtrahi ſolet ab aëris reſiſtentia, a diminutione celeritatis, quæ neceſſario ſequitur diſruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorum-

que obstaculorum; prout ipsa quoque hæc aëris resistentia in causa est, cur simplex pendulum motum suum non continuet, ut maxime in Hypothesi Hugeniana ad eandem ascendere debeat altitudinem, a qua descendit.

XI.

Litteræ Dni Marchionis de l'Hôpital ad Dum Hugenium, in quibus contendit, se regulam hujus Auctoris de Centro Oscillationis penduli compositi demonstrare per causam Physicam, & respondere simul Dno Bernoulli.

Ante aliquot annos, cum admiratione legi eruditum tuum de centris Oscillationis tractatum, & plenissime mihi persuasum est veras esse demonstrationes tuas. Interea cum Acta Lipsiensia nuper mihi ad manus venerint, inveni in actis mensis Julii anni 1686. relationem tuæ hac de re cum Dno Abbate Cateleno controversiæ, à Dno Bernoulli factam, qui tuam sententiam amplectitur, uti certe debent, quicunque aliquem inter Geometras locum se tenere contendunt. Sed attonitus vidi, finem ratiocinii quo utitur, contrarium esse tuis demonstrationibus: unde ad illud sedulo examinandum perductus fui, & cognovi, quod utatur principio verissimo, licet in eodem applicando fallatur; illud enim principium, uti demonstrabo, ducit ad eandem veritatem, quam probasti in 5a tua propositione.

TAB.XXVIII. Fig. 6. Sit D A B virga inflexilis & sine gravitate, mobilis circa punctum fixum D, ad quam annexa sint 2 pondera æqualia A & B; & sit distantia B D a puncto fixo quadrupla distantiæ A D, quæritur longitudo D G penduli simplicis isochroni, id est, quod movetur cum eâdem celeritate ac pendulum compositum.

Ad solvendum hoc problema, considero velocitates, cum quibus corpora A & B incipiunt descendere in primo instanti

ti casus sui, vel potius, spatia, quæ percurrunt eodem tempore, utut parvo; hoc sensu sumo 1 pro velocitate, quacum omne corpus grave sive magnum sive parvum incipit descendere super planis æqualiter inclinatis; nam, ut satis notum est, illa velocitas est æqualis in omnibus corporibus.

Concipio etiam, quantitatem motus corporis initio descensus sui oriri ex massâ multiplicatâ per illam primam velocitatem; His suppositis, constat, quod corpus A conetur descendere cum eâdem celeritate, quâ corpus B; quod cum non possit, quoniam virgæ junctum est in puncto A, cujus velocitas tantum est 4ta pars velocitatis B, debet accelerare motum corporis B in pendulo composito. Tota ergo difficultas consistit in rite determinandâ motûs augmentatione; quod hoc pacto facio.

Sit x quantitas motus corporis A in pendulo composito, residuus excessus quantitatis ejus motus erit ergo $A - x$, vis hæc applicata in A exerit actionem in punctum fixum D & corpus B, quod considerari debet ut immobile ipsius respectu (quoniam clarum est, corpus B debere censeri immobile respectu illius excessus) & consequenter virga B D debet considerari ut vectis cujus extremitates sustinentur in B & D. habebimus ergo B D, 4. ad A D, 1. ut $A - x$ ad $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ portionem excessus quantitatis motus corporis A, quæ communicatur corpori B; ita ut quantitas motus corporis B in pendulo composito sit $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ id est $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$; Jam vero propter virgam inflexilem D B velocitas corporis B in pendulo composito debet necessario esse quadrupla velocitatis corporis A, & consequenter etiam quantitas ejus motus, quoniam corpora sunt æqualia; unde sequitur æqualia esse $4 x$ & $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$ unde deducitur valor ipsius x, $\frac{5}{17} A$, qui exprimit quantitatem motus corporis A in pendulo composito; Jam si fiat, ut $\frac{5}{17}$, velocitas corporis A in pendulo composito, est ad 1, velocitatem, omnium corporum gravium in extremitate pendulorum simplicium, ita D A, 1; est ad D G; $\frac{17}{5}$, erit hæc longitudo penduli simplicis isochroni; si enim spatia sunt inter se ut velocitates, tempora æqualia sunt.

 Si

TAB. XXVIII. Fig. 7. Si addamus ad pendulum compositum D A B novum pondus C æquale cuivis ponderi A & B, ita ut D C duplum sit D A, considerari debent pondera A & B tanquam appensa ad G commune suum Oscillationis centrum, in extremitate penduli simplicis D G; & tunc ponendo x, quantitatem motus corporis C in pendulo composito D C G, habebimus C-x pro residuo excessu quantitatis motus corporis C. Quantitas hæc residua applicata in C exercet vim in punctum fixum D, & punctum G, quod considero ut fixum ipsius respectu; habebimus ergo D G, $\frac{17}{5}$, est ad D C, 2, ut C-x est ad $\frac{10C-10x}{17}$, portionem ejus excessus, quæ distribuitur in G; unde sequitur, quantitatem motus corporum A & B in pendulo composito D A C B futuram $\frac{5}{17}$ A + $\frac{20}{17}$ B + $\frac{10C-10x}{17}$ id est $\frac{35C-10x}{17}$; Ob virgam autem inflexilem D B, velocitas corporis A in pendulo composito erit necessario dimidia velocitatis corporis C, & velocitas corporis B erit dupla velocitatis corporis C, & eædem quoque inter motus quantitates rationes dantur, cum tria corpora sint æqualia inter se; datur ergo æqualitas inter $2x + \frac{1}{2}x$ & $\frac{35C-10x}{17}$, unde deducitur quantitas $\frac{2}{3}x = C$, exprimens quantitatem motus corporis C in pendulo composito D A C B. Jam si fiat, ut $\frac{2}{3}$, velocitas corporis C in pendulo composito, est ad 1, velocitatem cujusvis corporis gravis in extremitate penduli simplicis; ita D C, 2. est ad D E, 3, erit hæc longitudo penduli simplicis isochroni.

Si pondera A, B, C essent inæqualia, inveniretur semper, sequendo hoc ratiocinium, centrum Oscillationis. ita ut hæc methodus sit generalis, quicunque sit ponderum numerus, & quæcunque eorundem inæqualitas. Ostendendum nunc, methodum hanc etiam usu venire, si pondera sint ad puncti fixi partem utramque disposita.

Sit pendulum compositum A D B mobile circa punctum fixum D, & oneratum ponderibus æqualibus A & B, sitque D B quadrupla ipsius D A, patet quod corpus A debeat retardare motum corporis B in pendulo composito; & ut præ-

præcise inveniatur quantum retardet, voco x quantitatem motus corporis B in pendulo composito A D B, & consequenter excessus residuus quantitatis ejus motus erit B - x; sed ob virgam B A, velocitas corporis A debet necessario esse quarta pars velocitatis corporis B: quantitas ergo ejus motûs in pendulo composito erit $\frac{1}{4}$ x (cum enim corpora A & B sint æqualia quantitates motus sunt proportionales velocitatibus. Illa autem motus quantitas produci non potuit, nisi per residuum excessum quantitatis motus corporis B. Patet ergo, quod ille excessus B - x debeat superare quantitatem motus corporis A inferiora versùs, & eidem præterea imprimere quantitatem motus $\frac{1}{4}$ x superiora versus; id est quod debeat agere in corpus A ac si vis A + $\frac{1}{4}$ x immediate applicita in A, illud sursum propelleret. Sed vis B - x ob punctum fixum D agit in A acsi vis 4 B - 4 x immediate applicita in A, illud sursum propelleret; dabitur ergo æqualitas inter 4 B - 4 x & A + $\frac{1}{4}$ x: unde deducitur quantitas x = $\frac{12}{17}$ B, quæ præcise exprimit quantitatem motus corporis B in pendulo composito A D B. Porro si fiat, ut $\frac{12}{17}$, velocitas corporis B in pendulo composito, est ad 1, velocitatem corporis omnis gravis in extremitate penduli simplicis, ita D B, 4, est ad D G, $\frac{17}{3}$, erit hæc longitudo penduli simplicis Isochroni.

Facile concluditur ex his omnibus, principium D^ni Bernoulli esse verum; sed eundem falli in conclusione quam inde deducit; quoniam considerat velocitates acquisitas corporum A & B, cum considerare deberet, uti nos fecimus illorum velocitates incipientes & præterea motus quantitates. Alias enim nunquam posset applicari hoc principium, quod non differt à principio, quod obtinet circa vectem, quum corpora sunt inæqualia; Adeo ut credam me plane petitioni ejus satis fecisse, *Rogantur hac occasione eruditi* &c.

Vides, quo pacto diversæ viæ ducant ad cognitionem ejusdem veritatis; nolim tamen meam tuæ æquiparare, quæ ultra omnem comparationem eruditior est & magis Geometrica; Interim si existimes, non inutile fore demonstrare rationes Physicas, quas hic affero, perfecte convenire cum

tuis demonstrationibus, idque inservire posse tollendo D.ni Bernoulli dubio, per me licet publici juris fieri has litteras, sed simul peto, ut iisdem observationes tuas subjungere digneris, & persuasum habeas me a judicio tuo non provocaturum, quod procul dubio doctum simul clarissimum & æquissimum futurum est: sum ex animo &c.

X I I.

Observationes D.ni Hugenii in literas præcedentes & in relationem D.ni Bernoulli, cujus in iis fit mentio.

Semper credidi difficile esse inventu centrum Oscillationis aliâ methodo, quam quâ ipse usus sum; neminem quoque vidi, qui id prospero successu tentârit, sive respectu solutionis generalis, sive in casu pendulorum compositorum, quorum pondera sunt in lineâ recta cum puncto suspensionis. Hunc casum D.nus Marchio de l'Hôpital sibi post plures alias proposuit, & primus, quod vere possum dicere, speratum sortitus est eventum; nam D.i Wallisius, Mariotte, & Pater Deschales quæsiverunt tantum centrum Percussionis, nec potuerunt demonstrare idem esse cum Centro Oscillationis, licet id revera ita se habeat.

Cæterum licet demonstratio Domini Marchionis valida sit & legitima, & naturæ rei congrua videatur, multa tamen continet quæ Lectorem aliquantum detinere queant; ut, quando considerat quantitatem motus corporis in primo initio casus, & quum distinguit & dividit, residuum motum corporis A, scilicet quem haberet cum separatim caderet, præ illo quem haberet, si descenderet veluti pars penduli compositi, & tandem, quum in pendulo trium ponderum vult A & B tanquam fixa considerari in G, centro Oscillationis illorum. cum hæc omnia non sint prorsus evidentia, patet viam, quam ingressus est Marchio, satis esse difficilem, & accuratum valde ratiocinium fuisse requisitum, ne hic deviaretur; D.us Bernoulli in sua relatione controversiarum me inter & Abbatem Catelanum, de qua in sequentibus aliquid

quid observabo, eandem viam fuerat secutus, sed cum nec illam ad finem usque sequi potuerit, novo inde ratiocinio ejusdem difficultas colligitur.

Obstrictus sum D^o^ Bernoulli, quod semper in hac controversiâ a meis partibus steterit adversus D^um^ Abbatem Catelanum. Interea non potui concipere, quo pacto, postquam dixit propositionem meam fundamentalem de centro Oscillationis pendere a magno illo principio, scilicet *quod commune centrum gravitatis plurium ponderum non possit ascendere altius per gravitatis eorum effectum, quam unde descendit*, in sequentibus vertat contra me quoddam ratiocinium, quemadmodum ipse confitetur, incertum, ac si posset in dubium vocare veritatem hujus ipsius propositionis; cum potius deberet concludere, se errasse in suo ratiocinio.

Ad id vero, quod mihi imputat, me in prima responsione non refutasse falsum D^ni^ Abbatis principium, idque in ultima non refellisse per causam ejus Physicam, respondeo me in prima responsione credidisse, sufficere, si evidens vitium ostenderem in ratiocinio, quod mihi opponitur, licet ulterius hanc materiam non examinarem; In exceptione autem 8. Junii 1684. pari jure cum D^no^ Bernoulli possem pertendere me id principium refutasse per suam causam Physicam, quoniam ostendi, repugnare illud magno principio naturali *quod corpora gravia sponte non possint ascendere.*

Credo enim, in hoc æque consistere causam Physicam hujus phænomeni, scilicet quod in pendulo composito pondera A & B, cum descenderint junctim ad partem infimam vibrationum suarum, non acquirant simul tantam velocitatem, quantam acquisivissent separatim ex iisdem altitudinibus cadentia, quam in eo, quod pondus A consumat partem sui motus agendo in punctum fixum F, juxta demonstrationem D^ni^ Bernoulli & D^ni^ Marchionis de l'Hospital; Et ad hoc credendum ex eo adducor, quod sæpe pereat pars motus, licet hunc in aliquo affectu edendo consumi, affirmare non possumus, ut in multis casibus percussionis duorum corporum durorum, juxta id quod ob-

ser-

ſervavi, quum in lucem ederem leges ejusmodi motuum in diariò Pariſienſi 1669 menſis Februarii, ita ut minime pro lege naturæ habendum ſit, eandem motus quantitatem ſemper conſervari, niſi alicui impendatur & conſumatur, ſed hæc conſtans lex eſt, corpora ſervare vim *ſuam adſcendentem*, & idcirco ſummam quadratorum velocitatum illorum ſemper manere eandem; Hoc autem non ſolum obtinet in ponderibus pendulorum, & percuſſione corporum durorum, ut ibidem obſervavi, ſed in multis quoque aliis mechanicis experimentis.

Demonſtraveram admittendo principium Abbatis Catelani, *vim aſcendentem* ponderum penduli augeri, & ita commune eorum gravitatis centrum altius poſſe reverti quam unde deſcenderat, unde inferebam, hoc poſito inventum fore perpetuum mobile. D^us Bernoulli non concedit hanc conſequentiam ob aëris obſtaculum, & quædam alia, quæ effectum impedirent: ſed conſiderare debuiſſet, cum altitudo illa major, quam acquirit centrum gravitatis, ſemper determinata ſit quantitas, & effectus obſtaculorum non ſit determinatus, imo minui magis magisque poſſit, facile conſtrui poſſe machinam, in qua commodum ex elevatione centri gravitatis derivatum, præponderaret impedimento obſtaculorum; ſed revera id experiri neceſſe erit nunquam.

F I N I S.



TAB. XXVIII.

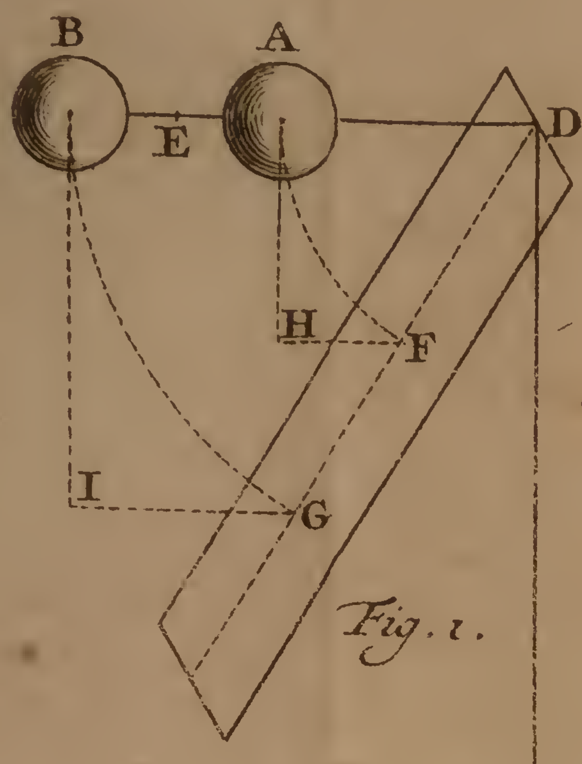


Fig. 1.

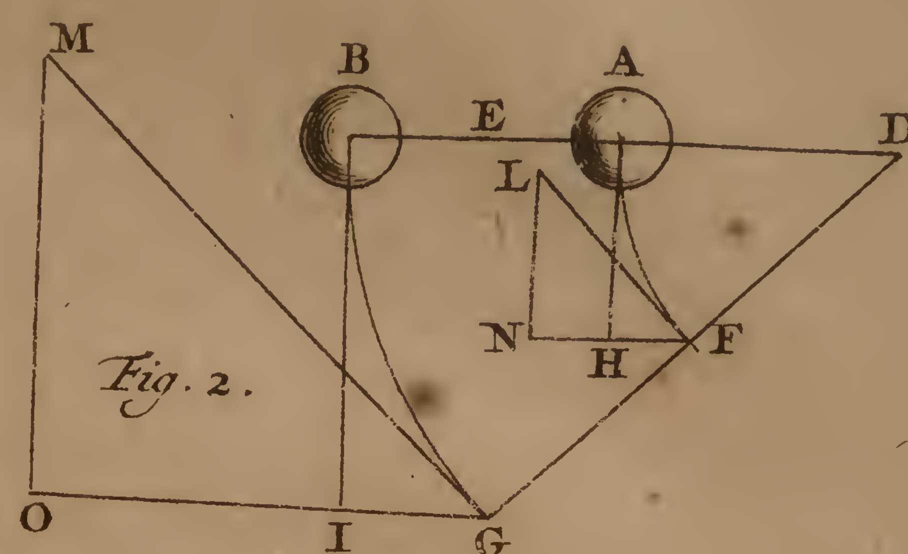


Fig. 2.

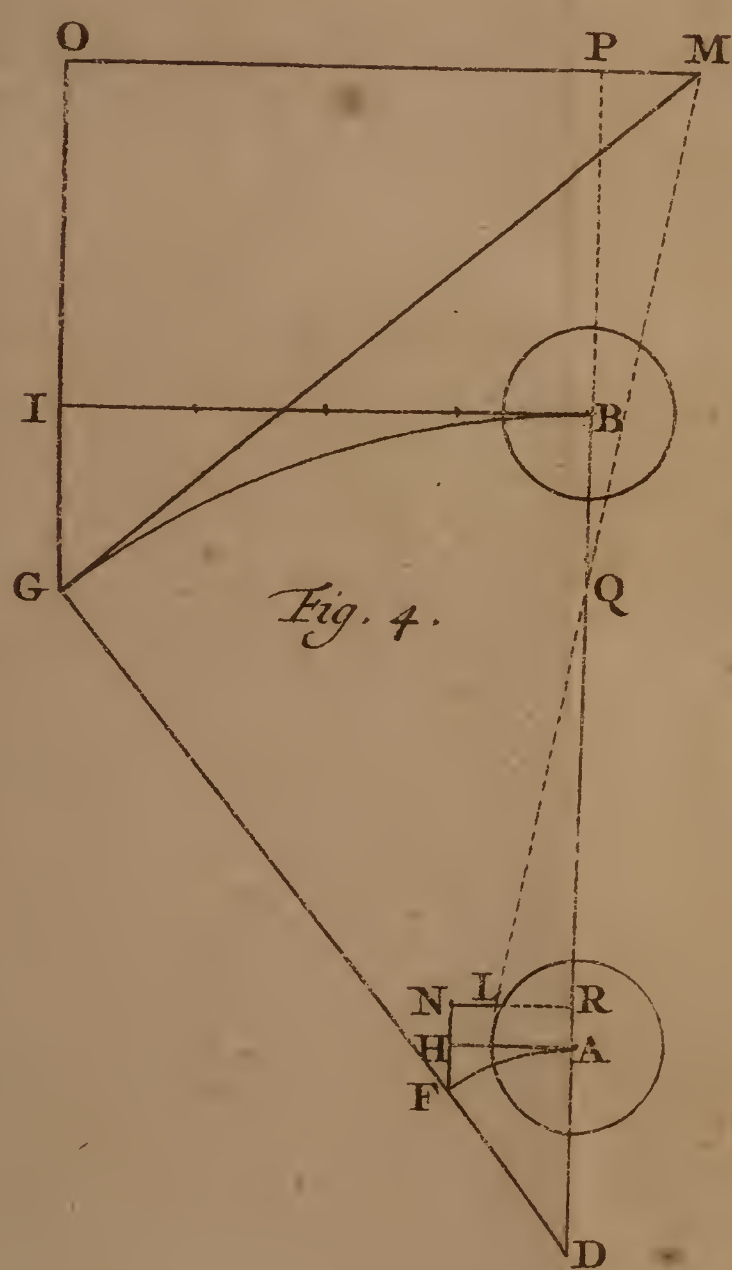


Fig. 4.

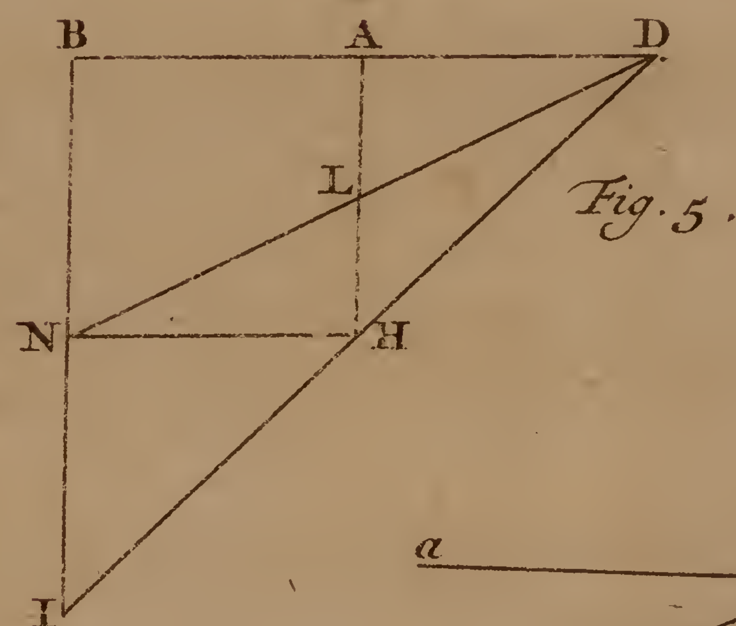


Fig. 5.

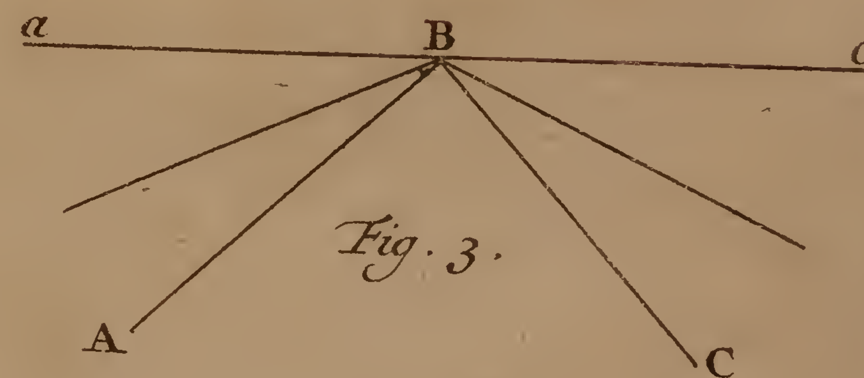


Fig. 3.

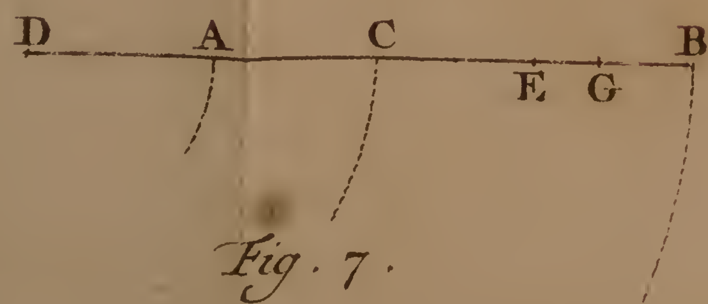


Fig. 7.

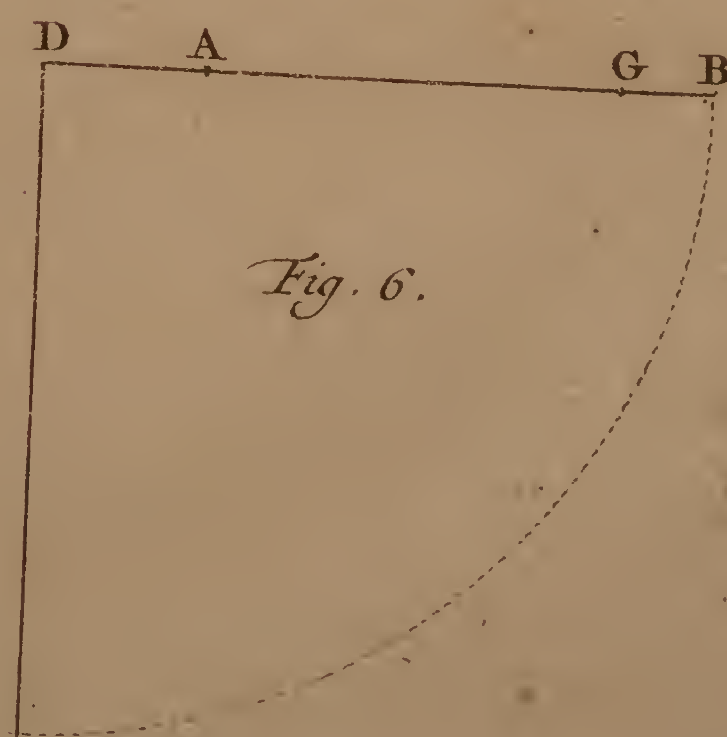


Fig. 6.

MACHINÆ QUÆDAM,

ET

VARIA CIRCA MECHANICAM.

MACHINÆ
QUÆDAM,
ET
VARIA
CIRCA
MECHANICAM.

I.

Excerpta ex Literis Domini Hugenii, novam quandam Inventionem Horologiorum exactissimorum ac portatilium concernentibus.

CUm invenerim artificium diu desideratum quo fiant Horologia & exactissima simul & portatilia, credo rem gratam me facturum publico, si id communicem. Quamobrem mitto Tibi & descriptionem & picturam formæ, continentem id quod in hoc invento habetur singulare, ut inter cæteras novitates scientiarum, hanc quoque possis inserere, siquidem ita collubuerit, Ephemeridibus Tuis.

Horologia formâ modicâ ad hunc modum constructa, erunt horarum indices portatiles quam exactissimi, sub majori forma autem ubique utiliter adhibebuntur, ac speciatim in longitudinibus terrâ marique inveniendis, siquidem ipsorum motus regitur à principio quodam æquabilitatis, non aliter ac aliorum cum pendulis, per cycloidem quippe ita correctorum ut nullum vecturæ genus illa possit sistere aut sufflaminare.

Arcanum inventionis consistit in pinna quadam spirali quæ altera sui extremitate interiore affixa est hastæ animulæ seu rastri æquilibris, sed majoris ac ponderosioris quam pro solito, ac supra suos cardines ultro citroque mobilis; alterâ vero extremitate cohæret particulæ cuidam supra Horologii superius tegmen eminenti: quæque vibrato semel Horologii libramento, spiras suas alternis comprimit ac relaxat, ac accedente sibi parvulo adjumento ab Horologii rotis veniente, rastri, seu æquilibrii, motum conservat, ita quidem, ut, licet majores aut minores faciat excursus, ejus reciprocationes tamen una alteri sint tempore prorsus æquales. In figura, superius Horologii planum est A B, circulus æquilibrii vel libramentum circulare C D, hujusque axis seu hasta E F: Pinna seu elaterium in spiram contortum G H M, ferruminatum ad hastam æquilibrii in M, & lamellam supra planum Horologii supremum in G, ita quidem ut spiræ omnes elaterii è duobus istis sustentaculis in aëre suspensæ hæreant, infernè nihil attingentes: N O P Q est quædam coronis aut fultura in qua vertitur alter cardo æquilibrii seu libramenti: R S est una ex rotis dentatis Horologii, habens motum quendam libratorium ab occurrente rota proxima sibi impressum. Et hæc rota R S implicatur tympano T, ad axem seu hastam libramenti firmato, cujus adeo motus hoc medio conservatur quantum opus est.

TAB. XXIX. Fig. 1.

II.

Nova Libella, Telescopio instructa, propriam secum ferens probationem, & quæ in unica statione verificatur, & rectificatur.

TAB. XXIX. Fig. 2.

Hujus instrumenti præcipua pars est Telescopium A B, unius, duorum, aut plurium pedum longitudinis, prout ab eo plures exspectantur effectus: ex duobus, quatuorve con-

convexis vitris modo ordinario, ſat ſuperque cognito, perficitur; duo ad inverſa objecta videnda, quatuor ad ea erigenda inſerviunt. Tubus ex Bractea, aut alio metallo ad Cylindri formam componitur, tranſitque in annulum aut Cylindrum minorem Cupreum C, qui ipſum in medio includit & illi conferuminatur. Cum annulo duo plana & ſimilia cohærent brachia D & E, unum in ſuperiori parte, alterum in inferiori, utriusque longitudo eſt fere quartæ partis longitudinis Teleſcopii, adeo ut tota Machina Crucem imitetur. In brachiorum extremitatibus duplicia fila, per parvulos annulos transeuntia, & inter laminas inſerta cum brachiis cohærent. Harum laminarum altera brachio affixa eſt, dum altera ſeparari poteſt ut fila inter illas inſerantur. Annulo crux ſuſpenditur ex hamo F, dum ope alterius annuli cruci, uti poſtmodum notabitur, annectitur pondus ejusdem circiter gravitatis cum illa, & in pyxide G incluſum. Ex hac pyxide ſolus egreditur ponderis uncus. Spatium in pyxide vacuum oleo nucum, lini, aut alio quocunque quod frigore non coaleſcit repletur, quo motus ponderis & Teleſcopii illico reprimuntur.

In interiori Teleſcopii parte filum ſericum horizontaliter ad vitri objectivi focum expanſum eſt, ſive unum, duo, aut tria adſint ocularia; hoc filum ope cochleæ, quæ circumvertitur in foramine H in Teleſcopii tubo, elevatur, & deprimitur. Methodus diſponendi filum poſtea explicabitur. I levis admodum ex Cupro annulus eſt, non majoris ponderis, quam $\frac{1}{80}$ aut $\frac{1}{100}$ partis ponderis ipſius crucis, & qui juxta Teleſcopii tubum movetur, & ubi libuerit hæret; inſuper ſi Crux non in æquilibrio eſt, alter annulus in interiori Teleſcopii parte ſufficientis ponderis apponitur, ut æquilibrium detur, id eſt, ut Teleſcopii tubus Horizonti parallelus fiat, in quo tamen ſumma cura haud requiritur.

Plana Crux ex ligno Machinæ ſuſpenſioni inſervit, ad hoc ſuperne uncus F habetur, & in brachiorum altero furca K majorem Teleſcopii motum lateralem reprimens, ita ut per ſpatium ſemilineæ, id eſt $\frac{1}{24}$ pollicis, tantum agitari poſſit.

Pyxis plumbum, & oleum continens eidem Cruci annectitur, ad latera, & fundum inclusa; ut autem ventus a Libella arceatur, cava crux L planæ ligneæ cruci cum duobus aut tribus hamis annectitur, adeo ut integra tum conficiatur pyxis.

Ut usui libella accommodetur, ac rectificetur, ut dictum suspenditur, plumbo non infernè annexo, & in quoddam distans objectum collineatur, attendendo ad punctum quod Horizontale filum obtegit, filum enim distincte, ut objectum ipsum observari potest. Deinde plumbum addatur, id est annulo inferiori jungatur, si tum Horizontale filum eidem objecti puncto respondeat, constabit crucis centrum gravitatis exacte dari in recta linea quæ duo suspensionis puncta conjungit, id est quæ transit per puncta quibus fila brachiis annectuntur. Hæc est primaria requisita præparatio: verum si hoc minime reperitur, res facilè perficitur ope annuli I, observando, annulum vitrum objectivum versus promoveri debere, si Telescopium declinat, dum pondus annexum est; contra retrahi debere, si Telescopium post annexum pondus elevetur.

Ubi ergo ita constituta est Machina, ut ad idem punctum appenso & sublato pondere visum dirigamus, invertenda est, suspendendo eam ex annulo inferiori, & plumbum brachio alteri annectendo; quia citius motum sistere jubet, & quia hoc ad reliqua quæ supersunt perficienda plurimum conducit.

Quod si tunc filum in Telescopio, uti antea collineando, punctum idem ac in præcedenti observatione obtegat, punctum hoc in eodem plano Horizontali cum centro tubi Telescopii existere certissimum est, quemadmodum demonstrabitur.

Verum si filum punctum idem collimando non obtegat, elevando & declinando filum, ope cochleæ huic usui adaptatæ, eo poterit reduci, elevando nempe filum si ad punctum magis elevatum visus dirigatur, & contra, Telescopium post singulas fili mutationes invertendo.

His peractis Instrumentum perfecte erit rectificatum, nec obstat

obſtat (quod notabile eſt) ſi lentium axes non per harum centra transeant, aut ſi ipſæ non exacte in recta linea collocentur; & conſequenter ſecure Machinâ utemur, dummodo nulla ſuperveniat mutatio; filum namque Horizontale cujuſcunque objecti, ad quem fiet collimatio, indicabit locum qui eſt in eodem plano Horizontali cum centro Teleſcopii; ſi autem mutatio quædam detur, in ſingulis obſervationibus detegi poteſt, primo cum plumbo annexo, deinde ſine plumbo collineando, & tandem Teleſcopium invertendo. Et hoc utique præcipuum eſt, quo Libella præ cæteris gaudet commodum, quod in uſu erroris periculum nullum detur.

Pes, quo Machina innitatur, eſt rotunda ferri, aut bracteæ lamella modice concava, cui annectuntur tres baculi longitudinis circiter trium pedum cum ſemiſſe, pyxis huic lamellæ impoſita hanc in tribus punctis, tangit, quare facile movetur, & ita conſtituitur, juvante cavitate lamellæ, ut plumbum in pyxide ſua libero fruatur motu, quod videtur trans aperturam M in operculo ligneo.

Gravitas plumbi, ut pyxis firmiter pedi inhæreat, inſervit, verum ſi firmius eam ſuſtentari velimus in lamellæ cavæ medio foramen fiat.

Si totum pondus in pyxide G recludi nolumus, tertia vel quarta tantum pars huic includatur & reliquum eidem ferreæ caudæ annectatur, ſed extra pyxidem; primo tunc obſervabitur cum minori pondere ſolo, pyxide contento, tum cum altero deſuper addito, in conſtituendo filo Horizontali ambobus utentum.

Hac methodo Teleſcopii agitationes promptiſſime, in omnibus obſervationibus quæ ad rectificandam Machinam inſtituuntur, ceſſant; ſi autem nullum in quibusdam obſervationibus imponatur pondus, hæ motiones difficilius ſiſtuntur.

Uncus F, cui Libella appenditur, ſimpliciter ligneæ planæ cruci annecti poteſt, licet hic annexus apparet annulo, qui ope cochleæ adhærentis annulo, quo Machina defertur, elevari & deprimi poteſt.

Quan-

Quantum hoc prosit, experitur in ipsius translatione, nam tum crucis fila laxari queunt curando, ut supra furcam K, & brachium exiguum curvatum R, descendat Telescopium, ne quidem thecam ligneam aperiendo.

Ne oleum pyxide G contentum ex hac defluat, dum Libella in itineribus confertur, pyxidis hujus foramen ipso pondere incluso claudi potest; curabitur ad hoc, ut pondus illud desuper planum admodum sit, & detineatur juxta pyxidis operculum ope annuli cochleati S.

TAB. XXIX. Fig. 5. Tubus N, illum in magno repræsentat, cui in interiori Telescopii parte Horizontale filum cohæret, continet elastrum O P furcæ Q annexum, cui sericum filum cera affigitur; hoc elastrum furcam ad frustum bracteæ T trahit, quod ingreditur cochlea, quæ respondet foramini H in tubo Telescopii, quo dato foramine etiam modice tubus N verti potest, ut filum exacte fiat Horizontale, de quo judicatur per Telescopium videndo.

Rectificationis Libellæ Demonstratio.

Rectificationis requisitum primum fuit hoc; ut centrum gravitatis suspensæ crucis in recta linea per puncta, quibus fila brachiis annectuntur, transeunte daretur. Ut hujus præparationis necessitas concipiatur, sciri oportet, non sufficere si Telescopium ex utroque annulo successive suspensum ad idem objecti punctum dirigatur, hoc enim fieri potest, licet objecti punctum multum infra, aut supra Horizontale planum inveniatur. TAB. XXIX. Fig. 4. Sit A B Cylindri Telescopiani axis; sit C I suspensionis, aut nexuum filorum linea, quarum linearum longitudinum hic non habetur ratio, quoniam, cujuscunque magnitudinis Telescopium sit, nihil hoc ad suspensi corporis situm conferre, notum est: ponimus A B, C I se mutuo ad angulos perfectè rectos secare in puncto H. Desuper centrum gravitatis crucis in E, ponatur in axe A B, magis tamen versus B, quam punctum H; Cruce itaque suspensa in C, linea quæ a C ad centrum terræ tendit erit C E,

ita

ita ut axis A B declinaturus sit infra Horizontale planum, cui C E perpendicularis est, & cum quo efficiet angulum æqualem angulo H C E; si vero visus radius A B filum Horizontale, & vitri objectivi B centrum pertransiens continuetur in recta linea ad objecti punctum usque; istud punctum infra Horizontale planum tunc esse futurum, evidens est; Invertendo interim Telescopium, & hoc per I suspendendo, ita tamen, ut extremitas B ad eandem partem remaneat, facile patet eundem situm, quem suspensum per C habebat, eum acquirere; quia directionis linea denuo per punctum E transibit: igitur juxta filum Horizontale, uti antea collineabimus ad idem objecti punctum; licet minime æqua sit Libella.

Per primariam rectificationis partem, defectus hic detegitur, & corrigitur: nam primo si gravitatis Crucis centrum existit in H, directionis linea erit C I, & constat, pondere in I annectendo, crucis situm non mutari; & idcirco per Telescopium ad idem punctum, collineabimus; sed si centrum gravitatis crucis sit in E, & pondus in I appendatur, extremitas B elevabitur, & ideo visus per Telescopium ad punctum magis elevatum, quam ante, dirigitur. Quod aperte videtur ducendo lineam I E, eamque dividendo in K, ita ut pars I K sit ad K E, uti crucis pondus est ad pondus in I annexum; nam commune centrum gravitatis erit K, & C K directionis linea: & angulus K C E æqualis erit illi, quo elevabitur Axis A B. Quia linea C E supra C K tali angulo elevatur, & quia A B cum C E eundem quem ante efficit angulum.

Ut vero clare pateat, appendendo pondus in I sufficienter detegi, an centrum gravitatis crucis detur extra suspensionis lineam; dico, angulum K C E, posito pondere appenso æquale ponderi ipsius crucis, sensibiliter æquari $\frac{1}{2}$ anguli I C E, qui æqualis est angulo quo Axis A B, & ideo quoque Visus Radius, magis deprimitur versus partem B, quam fecisset, si centrum gravitatis crucis in H fuisset; nam ducendo K L parallelam ad E H, in duas partes æquales dividet H I, &

H N valebit $\frac{2}{3}$ lineæ L K, aſt L K eſt dimidium H E; ergo H N eſt $\frac{1}{3}$ ex H E, & N E ideo $\frac{2}{3}$ ex H E, ſed uti E N eſt ad E H, ita ſenſibiliter angulus E C N eſt ad angulum E C H quia exigui ſunt, id eſt E C K ad E C I.

Cum autem angulus E C K illi æqualis eſt, quo Teleſcopium elevatur addendo pondus in I, ſequitur exiguum pondus P verſus H retro trahendum eſſe ut magis elevetur Teleſcopium, ita tamen ut prima elevatio dupla ſit ſecundæ, quia angulus K C E duplus eſt K C I; & tunc directionis linea erit C I, in qua neceſſario gravitatis centrum crucis exiſtet, quandoquidem centrum gravitatis ponderis in I appenſi, in hac datur, uti & centrum gravitatis commune ejusdem ponderis & crucis, cujus pars eſt exiguum pondus P. Si annectendo pondus in I Teleſcopii extremitas B deprimatur, dimidia ſua parte augenda erit depreſſio, quod eodem modo demonſtratur. Hæc angulorum cognitio, ad primam Libellæ præparationem faciliorem reddendam uſu venit.

Quod aliam verificationis partem ſpectat, ubi centrum gravitatis crucis eſt in C I, ſuſpenſionum linea, ex ante explicatis ſequitur, hanc lineam eſſe perpendicularem ad Horizontem, ſive crux per C, ſive per I ſuſpendatur, & ſive illi ad infra pondus annectatur, ſive crux ſola ſuſpendatur.

TAB. XXIX. Fig. 5. Tandem, poſitâ brachiorum ut & filorum æqualitate, certiſſimum eſt, centrum Cylindri Teleſcopii, quod ſit H, ad eandem in utraque ſuſpenſione altitudinem dari: ſint itaque D H M, E H P, axis Cylindri in una, & altera ſuſpenſione, ponendo primo, quod differentibus gaudeat poſitionibus, ſit O objecti punctum, ad quod juxta filum Horizontale collineamus, & O M, O P, Radii luminis, qui a puncto O tendunt ad centrum aperturæ vitri objectivi, & inde æque ac omnes alii radii, qui a puncto O ad vitrum objectivum perveniunt, Horizontali filo obviam proficiſcuntur, ſive filum iſtud Teleſcopii axem pertranſeat, ſive non; hoc namque per Dioptricæ leges ſequitur, cum filum punctum O tegere videatur, & utrumque diſtincte appareat. Ductis lineis rectis H O, M P, ultima parallela erit C I, quia H M,

H P

H P sunt æquales, ac æqualiter inclinatæ ad C I. Ergo anguli M, P, trianguli M H P sunt æquales; ast angulos H M O, H P O etiam esse æquales certum est, nullo habito respectu ad id, quod radiis O M, O P intra Telescopium accidit, nec si vitri objectivi axis per hujus centrum transeat, id est, an maximam suam in centro habeat crassitudinem. Anguli igitur M, P, trianguli M O P similiter æquales sunt; & triangulum hoc est Isosceles, uti M P H; recta idcirco H O secabit M P ad angulos rectos; sed M P parallela erat C I; O H ergo perpendicularis est C I, & idcirco punctum O in eodem plano Horizontali cum centro H Telescopii, quod probandum erat.

Si nunc centrum vitri objectivi M, P, in utroque casu detur in eodem puncto ut S, recta H S perpendicularis erit C I, quandoquidem anguli C H S, I H S tum æquales sint, propter Telescopii inversionem, verum quia S O tendit ad idem punctum O in ambabus suspensionibus, necessario erit in eadem recta linea cum H S, si enim lineæ hæ angulum conficerent, angulus iste superne in una suspensione esset dum in altera situm contrarium haberet, sicque juxta filum ad duo distincta puncta collinearemus, cum ad unicum punctum id fieri posuimus; sed integra igitur linea O S H est perpendicularis ad C I, ideoque punctum O in eodem datur plano Horizontali cum puncto H.

III.

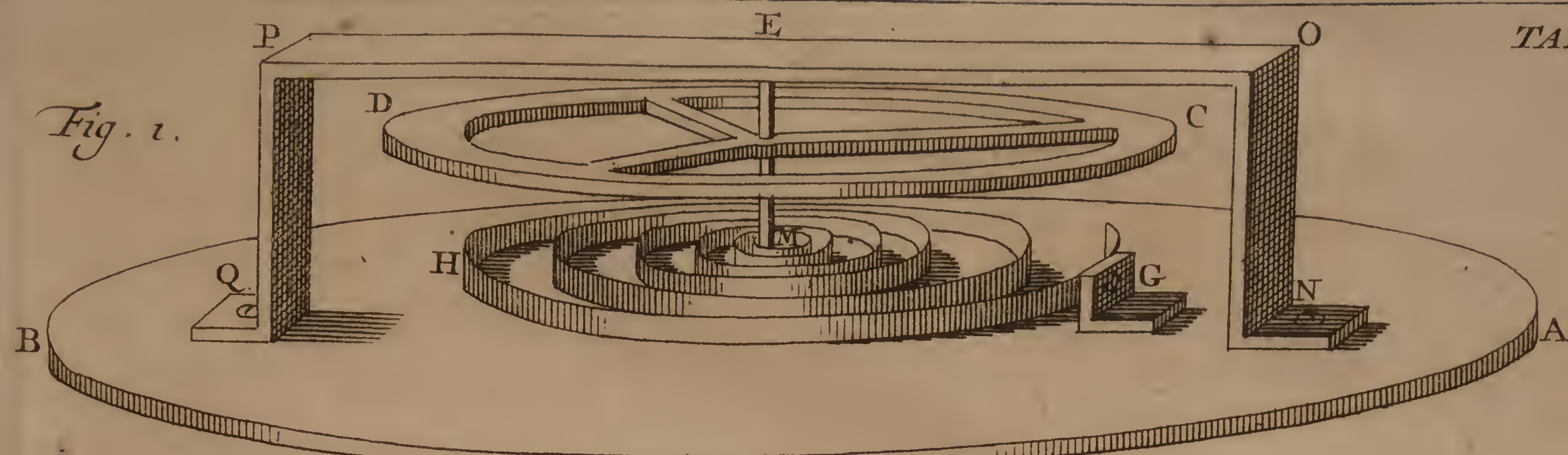
Astroscopia Compendiaria, Tubi Optici molimine liberata.

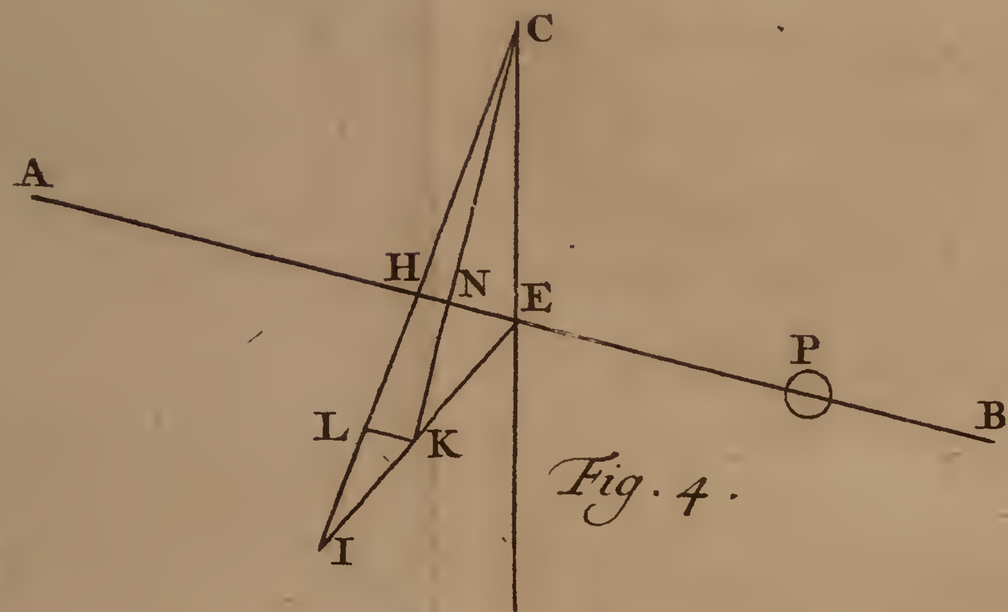
QUod plerisque omnibus accidit novis inventis, ut, à parvis orta initiis, cura & tractatione hominum auctiora fiant ac perfectiora, id vel præcipuè, in admirando illo proferendi visûs artificio, usu venisse animadvertimus. Notum est enim quàm fuerit à prima origine tenue ac pene nihili, cum rudimenta ejus quædam, in Portæ Neapolitani libris,

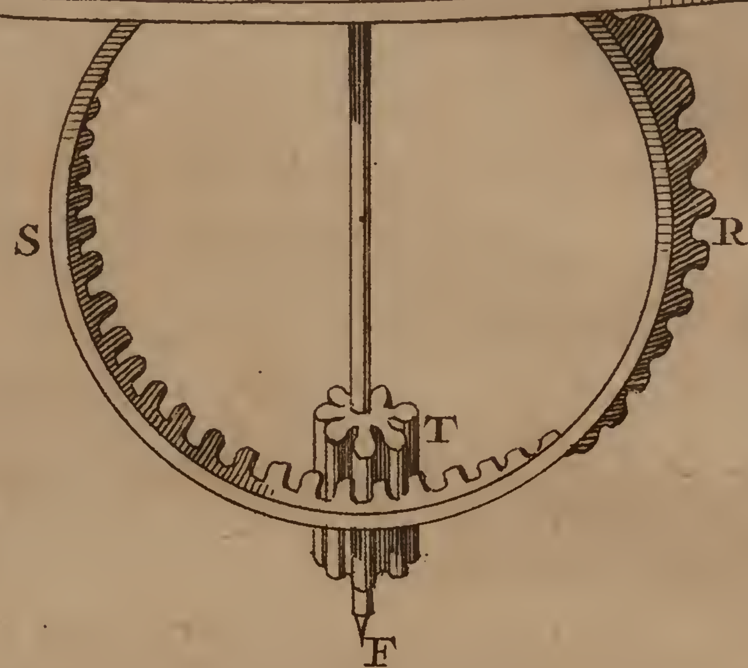
obſcure expoſita conſpicerentur; quibus tantum præcelluere noſtratium hominum conatus, ut non ſane immerito primi ejus inventores haberentur. Hos vero rurſus longiſſime prævertit Galilæus, tot tantiſque rebus, tubi ſui opera, in cælo deprehenſis, quarum nihil quidquam ante ipſum fuerat perceptum. Videbatur nihil præſtantius iis, quæ ſibi paraverat, organis repertum iri. At, ſi nunc in vitam redeat, quis dubitet quin ſuis ipſe multo præpoſiturus ſit ea quæ deinde exſtiterunt; tum noſtra, quibus Saturni planetæ veras figuras annulumque primi conſpeximus; tum magis etiam, quæ his ſucceſſerunt Italica, ab egregiis artificibus elaborata. Quibus uſus Vir Clariſſimus Dominicus Caſſinus, alia inſuper nova phænomena cœlo deduxit; planetariorum globorum in ſeſe revolutiones, comiteſque Saturni duos, præter eum quem nos repereramus, reliquis manifeſtiorem.

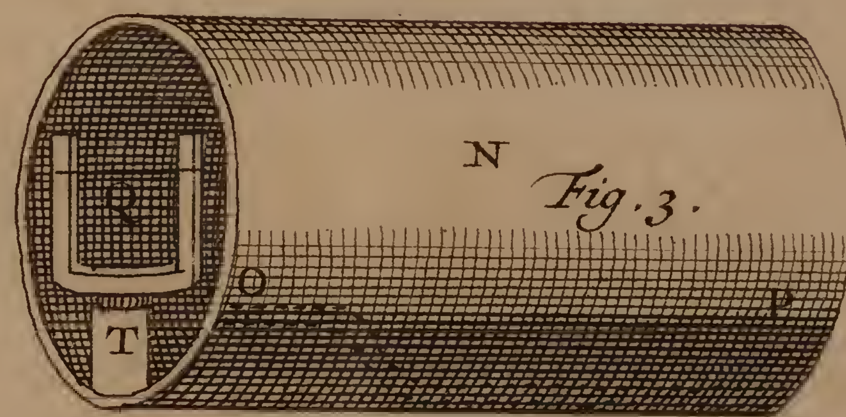
Quod ſi attendamus quibus acceſſionibus in tantum hæc ars continue creverit, nihil aliud reperiemus niſi auctam tuborum longitudinem, lenteſque, quas vocant, vitreas in ſphæræ majoris convexitatem diligentius conformatas. Etſi enim modos quoſdam alios, compendiaque inveſtigaverint viri ſubtiliſſimi; jam conicarum ſectionum præſcriptis figuris, quæ vitro inducerentur; jam ſpeculorum reflexionibus radios lucis colligendo; certum eſt hæc omnia vel fruſtra fuiſſe, vel votis & expectatione longe minora, ob cauſas quas exponere non eſt hujus loci; unamque adeo rationem, qua proficeretur, hactenus eſſe relictam, tuborum productionem. Et ſane, quanto magis rei ipſius naturam intueor, tanto propius eſt ut exiſtimem, nihil alia via ne impoſterum quidem eſſe ſperandum.

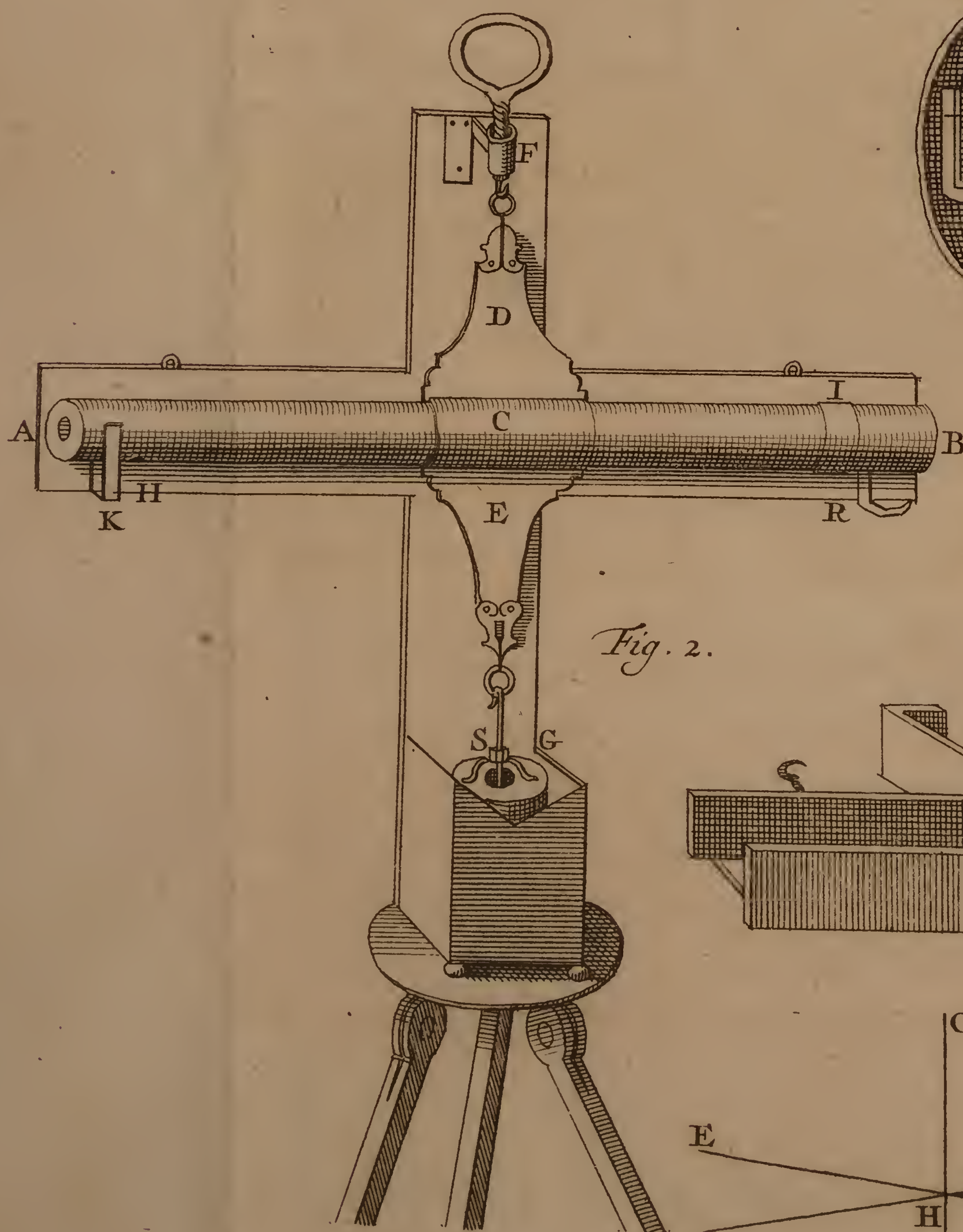
Optime igitur operam ſuam ij collocaſſe videntur, qui parandis tubi majoris lentibus incubuerunt. Quorum diligentiæ ſucceſſus hac in parte non defuit. Sed aliunde non exiguum oblatum fuit incommodum, nimia tuborum longiorum gravitas ac moles; quibus movendis neceſſario machinæ in auxilium advocandæ fuerunt. Hæ vero & in iis quæ nunc extant, pedum triginta aut quadraginta, longitudinibus difficile conſtruun-

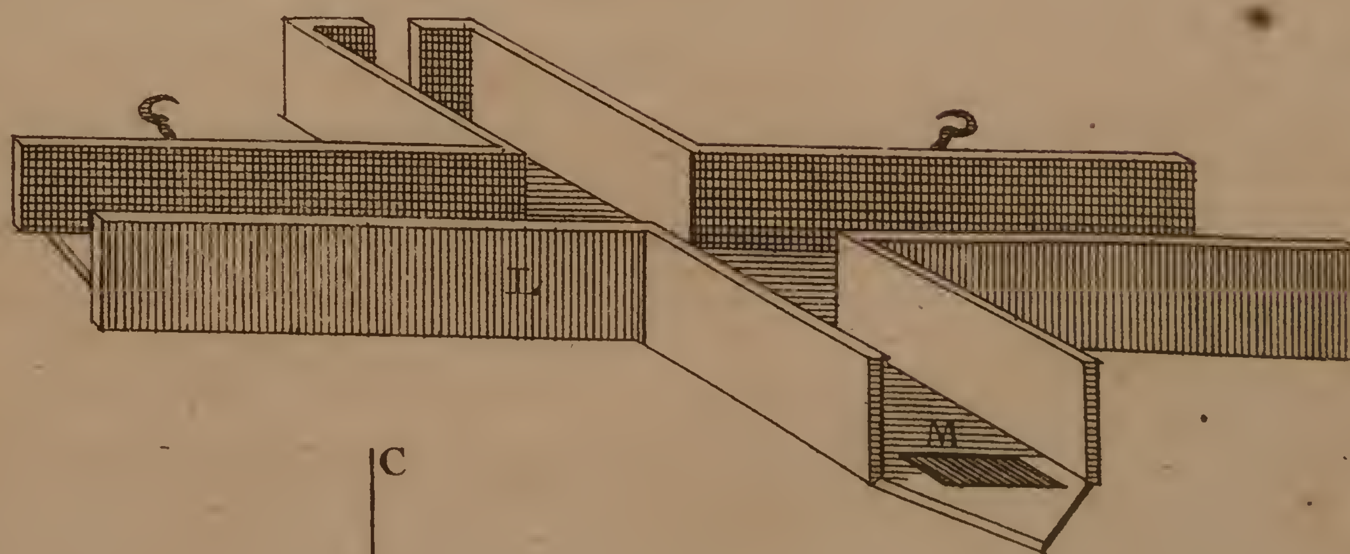

Fig. 1.
P
E
O
D
C
H
G
Q
N
B
A

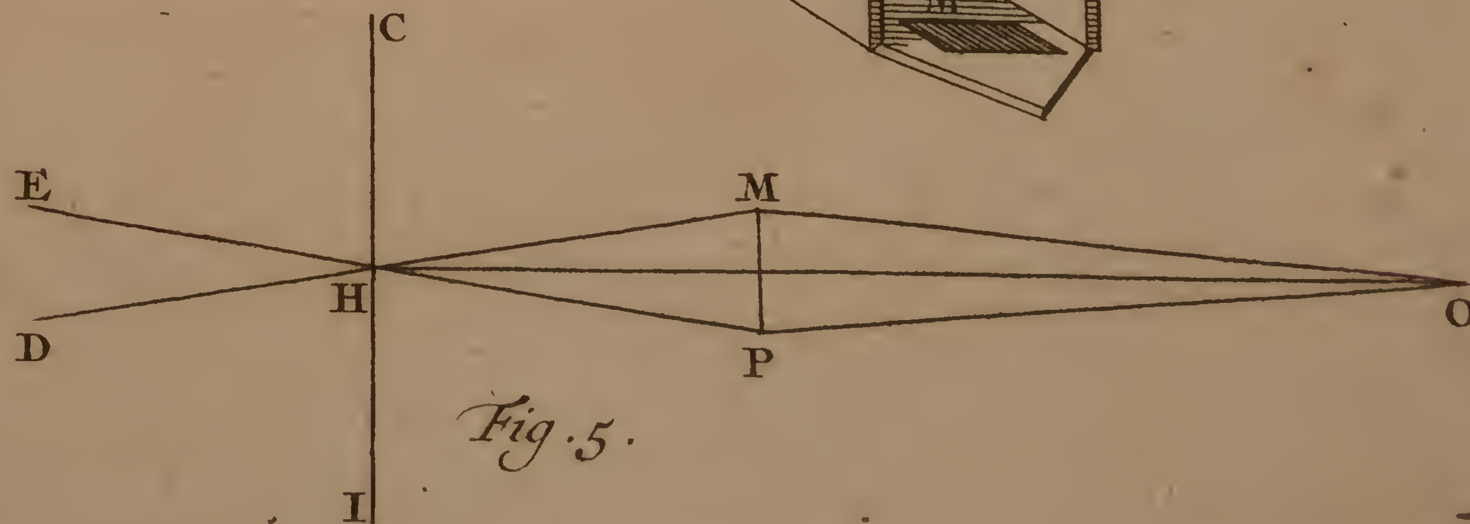

C
A
H
N
E
P
B
L
K
I
Fig. 4.


S
R
T
F


N
Fig. 3.
O
T


F
D
I
A
C
B
H
K
E
R
Fig. 2.
S
G


L
M


C
E
M
H
D
P
O
Fig. 5.
I

ſtruuntur tractanturque; &, ſi ulterius progrediendum ſit, multo plus exhibituræ ſint negotii. Adeo ut hic velut obex quidam fixus fuiſſe videatur ad majora tendentibus. Quare rem inprimis gratam me facturum arbitror hæc ſtudia colentibus, ſyderumque obſervationi intentis, ſi, quod nuper inveni, oſtendero qua ratione impedimentum illud omne ac tædium tollatur; magnoque temporis, operæ & ſumptuum compendio, maxima quæque teleſcopia ad hæc ſpectacula adhibeantur. Scio inter cætera quæ in hunc finem propoſita fuere, hoc quoque, quod hic adferimus, aliis in mentem jam à multis annis veniſſe, ut ſine tubo lentes diſponerentur; ſed quod volebant efficere eos nequiiſſe, niſi machinatione quadam difficili nimium, quæque propterea adhuc exitum non habuerit. Nos autem quæ docebimus, reipſa utilia eſſe invenimus, idque magno commodo noſtro quotidie experimur. Ea vero ſic ſe habent.

Loco patente & undique aperto, malus in terram defigitur, ad perpendiculum erectus. Noſter, quo primum uſi ſumus, pedum quinquaginta altitudinem habebat, teleſcopiis nempe pedum 70 & amplius ſuffecturus, quanquam non in omni ſyderum ſupra horizontem aſcenſu. Deberet enim non multo infra totam teleſcopii longitudinem produci. Hujus, priuſquam erigatur, latus unum dolabra complanatur; atque ibi regulæ binæ affiguntur inter ſe parallelæ, ac ſeſquipollice diſtantes, itaque canalem efficientes, interius paulo latiorem; qui à ſummo malo ad imum fere pertingat, reliquis tantum pedibus tribus vacuis. Præterea in ipſo mali cacumine, orbiculus imponitur, circum axem mobilis, inque eum funis ducitur dupla mali longitudine, craſſitudine minimi digiti dimidia. Utque eo, ſi forte opus ſit, aſcendi poſſit, triangula lignea æqualibus ſpatiis defiguntur, quibus ſcandentis pedes inſiſtant. Ita demum paratus malus erigitur, parte ea, qua terra tegendus, illita pice, circumdataque arena, quo minus putredine corrumpatur. Uſus mali eſt, ut lens major ejus opera in altum tollatur quouſque opus eſt; quod fit hoc modo.

Afferculus bipedalis uno latere ita inciditur, ut intra canalem, quem diximus, liberrime moveri queat. Hujus medio affigitur brachium itidem ligneum, pedem unum à malo extans, cujus in extremo aliud sesquipedale, media item sui parte, conjungitur rectis angulis. Utrumque vero Horizonti parallelum extenditur. Huic transverso brachio lens imponitur ea qua dicemus ratione, atque omnia sursum adducuntur, adnexis afferculi extremis ad funem ante demonstratum; qui ab imo malo ad summum ascendens, ac super orbiculum transiens, inde descendit rursus ac, priusquam terram attingat, in sui ipsius caput alterum innectitur. Habet autem funis is adjectum plumbum, pondere æquali quantum est brachii mobilis cum lente imposita; eoque loco deligatum, ut ad summum malum pertingat, cum lens in imo consistit. Ita hæc facillime ad eam quæ requiritur altitudinem erigitur &, omisso fune, sponte ibi suspensa manet. Forma plumbi parte utraque in coni apicem definit, ne obhæreat ad triangula quæ per malum defixa diximus.

Cæterum lens hæc telescopii major collocatur aptaturque hoc modo. Primum in annulum seu cylindrum cavum, è ferri bractea fabricatum, ipsa includitur, longum digitos quaternos. Huic cylindro, sive alteri potius in quem hic inseritur, bacillus pedalis, digiti crassitudine, extrinsecus secundum latus affigitur, totus in partem unam prominens. Hæc omnia globulo æneo insistunt, avellanæ nucis magnitudine, qui bacillo cohæret, inque subjecto sui moduli cavo liberrime volvitur; ita tamen ut excidere nequeat. Cavum partibus duabus constat, quæ, super pediculo tereti, cochlea junguntur adstringunturque, sed ita ut globulum nihil prorsus premant. Lens igitur, cum bacillo sibi adfixo, hoc modo mobilis efficitur. Quæ porro ut æqualiter librata consistat, pondus unius libræ circiter infra bacillum appenditur, filo æneo crassiore semipedali conjunctum atque infixum. Cujus flexu facile ita pondus temperatur, ut centrum commune, suæ lentisque gravitatis, cum centro Sphærulæ conveniat, atque hoc pacto quocunque positu lens suspensa

maneat,

maneat, attactuque leviſſimo moveatur. Qua in re potiſſima verſatur inventi pars. Pede enim globuli in foramen transverſi brachii, quod ſupra deſignavimus, immiſſo, (duo autem vel plura ejusmodi foramina fiunt, ut in omnem cæli partem commode lens obverti poſſit) filum vel funiculus tenuiſſimus bacillo, ſive caudæ extremæ, illigatur; juncturus nempe lentem majorem cum ea quæ oculo proxima ponitur, ac proinde futuri teleſcopii longitudinem æquans, vel potius paulo excedens. Hinc, ubi ſublata ad malum fuerit lens, quocunque id filum, manu leviter tractum, circumferetur, lentem una movebit, eamque hoc modo ad aſtrum quodcunque recta opponet. Quod certe absque hoc libramento fieri non poſſet. Cæterum ut extento filo cauda ſeu bacillus, quem lenti adpoſuimus, parallelus fiat, quod omnino neceſſe eſt, infigitur parti ejus extremæ ſtylus æreus digiti longitudine, cui deorſum flexo, donec cuſpide ſua tantundem ac centrum globuli infra bacillum deſcendat, ita demum filum, quod diximus, adnectitur. Cur autem ſtylo flexili hic utamur poſtea dicetur.

Jam vero & de oculari lente explicandum, quomodo cum priore componatur; quod multis verbis non indiget, ſiquidem eadem fere omnia, quæ in majori lente, obſervanda ſunt. Similiter enim tubo, ſeu cylindro brevi, hæc quoque includitur, item bacillo ſeu caudæ conjungitur; quæ porro globulum ſuum cui innitatur habet. Sed hujus loco axiculus transverſus adhiberi poteſt. Infra bacillum vero pondus exiguum rurſus appenditur, quanto opus eſt ad faciendum libramentum. Porro capulus, globulum vel axiculum ferens, manu obſervatoris apprehenditur; bacillus lentem majorem ſublime poſitam verſus, directus eſt, filo eidem, quod inde deſcendit, illigatus. Adducta vero manu, contentoque leviter filo, parallelas inter ſe fieri lentes perſpicuum eſt. At non eodem modo, bacilli hujus extrema parte, filum adnectitur, ac ſuperiori illi, qui lentem majorem dirigit, ſed per foramen trajectum, inde verticillo involvitur, cujusmodi ſunt quibus teſtudinum chordas intendunt; qui verticillus

medio

medio bacillo à latere infixus eſt. Hujus converſione, inter obſervandum, fili longitudo producitur contrahiturve, donec intervallum inter lentem utramque, oculo ſpectatoris exacte conveniat, poſtquam antea prope verum fuerit repertum, quod eſt facillimum.

Vide Auctarium. pag. 274.

Cæterum, quo poſſit obſervator immotam detinere lentem ſibi proximam, quod apprime neceſſe eſt, fulcrum quoddam præſto eſt è levi materia compactum, duobus pedibus inſiſtens, ac ſuperiori parte transverſum habens baculum, cui brachia utraque, ſive ſtantis ſive ſedentis, innitantur; dum altera manus, quomodo diximus, lentem ſuſtinet. Multoque expeditior eſt hæc ratio, atque ad uſum accommodatior, quam ſi tertius pes fulcro accedat, inque ipſum lens ocularis imponatur.

Ut vero noctu, atque in tenebris, ſtellæ quævis teleſcopio noſtro facile reperiantur, lumine utimur laternæ incluſo, quales jam vulgo notæ ſunt, vitri convexi vel ſpeculi opera longe lucem projicientes. Hujus radiis ad malum lentemque in eo hærentem directis, ubi circulus ipſam continens conſpectus fuerit, facile eo transfertur viſus, ut ſtella ipſi media lente tegatur, ſimulque admota lente minori, per utramque ſe ſpectandam præbeat. Ac ſane multo citius hoc peragitur, quam factum ſit hactenus teleſcopiis tubo inſtructis. Adeo ut hoc quoque nomine longe præſtet nova hæc obſervandi ratio. Lunam vero contemplari volentibus, lucerna nihil opus eſt, quod ipſius aſtri luce lens conſpici poſſit. Sed hic ob diſci lunaris amplitudinem; ne partem quampiam intuenti, ab alia parte lux, aliaque via quam per majorem lentem, ad oculum accidat; circulus papyraceus lenti huic circumponitur, paulo majore quam dupla diametro ad eum quo tota Luna tegeretur. Quod niſi fiat, dilutiores apparent umbræ tractuſque ii qui, cæteris obſcuriores, in ejus globo conſpici ſolent. Atque ita jam teleſcopii noſtri aërii rationem omnem & apparatum explicuimus, non ſane operoſum; filoque illo, velut Ariadnæo, unde hactenus inventus non erat, exitum reperimus.

Cæ-

Cæterum quo clarius ea, quæ diximus, intelligantur, delineationem hic subjicimus, in qua

Malus est, *a b*. TAB. XXX.
Asserculus in canali mobilis, *c d*.
Brachium ipsi ad angulos rectos infixum, *e*.
Baculus transversus in quem lens imponitur, *f f*.
Funis in se rediens, *g g*.
Plumbum funi innexum, *h*.
Orbiculus in summo malo, *a*.
Cylindrus cavus lentem primariam continens, *i*.
Bacillus cylindro affixus, *k l*.
Globulus æneus bacillo hærens & in subjecto cavo volubilis, *m*.
Plumbum filo æneo junctum, *n*.
Stylus brevis ac flexilis, extremo bacillo insertus, *l*.
Tubulus minorem seu ocularem lentem ferens, *o*.
Bacillus tubulo affixus, *p*.
Axiculus mobilis, *q*.
Capulus manu tenendus, *r*.
Glans plumbea, *s*.
Verticillus cui filum involvitur, *t*.
Pinnulæ decussatim positæ, atque ita foramen efficientes quo filum trajicitur, *u*.
Filum tenue bombycinum, *l u*.
Fulcrum cui spectator innititur, *x*.
Laterna, *y*.

Triangula per malum disposita, quibus conscendi possit, omissa sunt, ne figuram obscuriorem redderent.

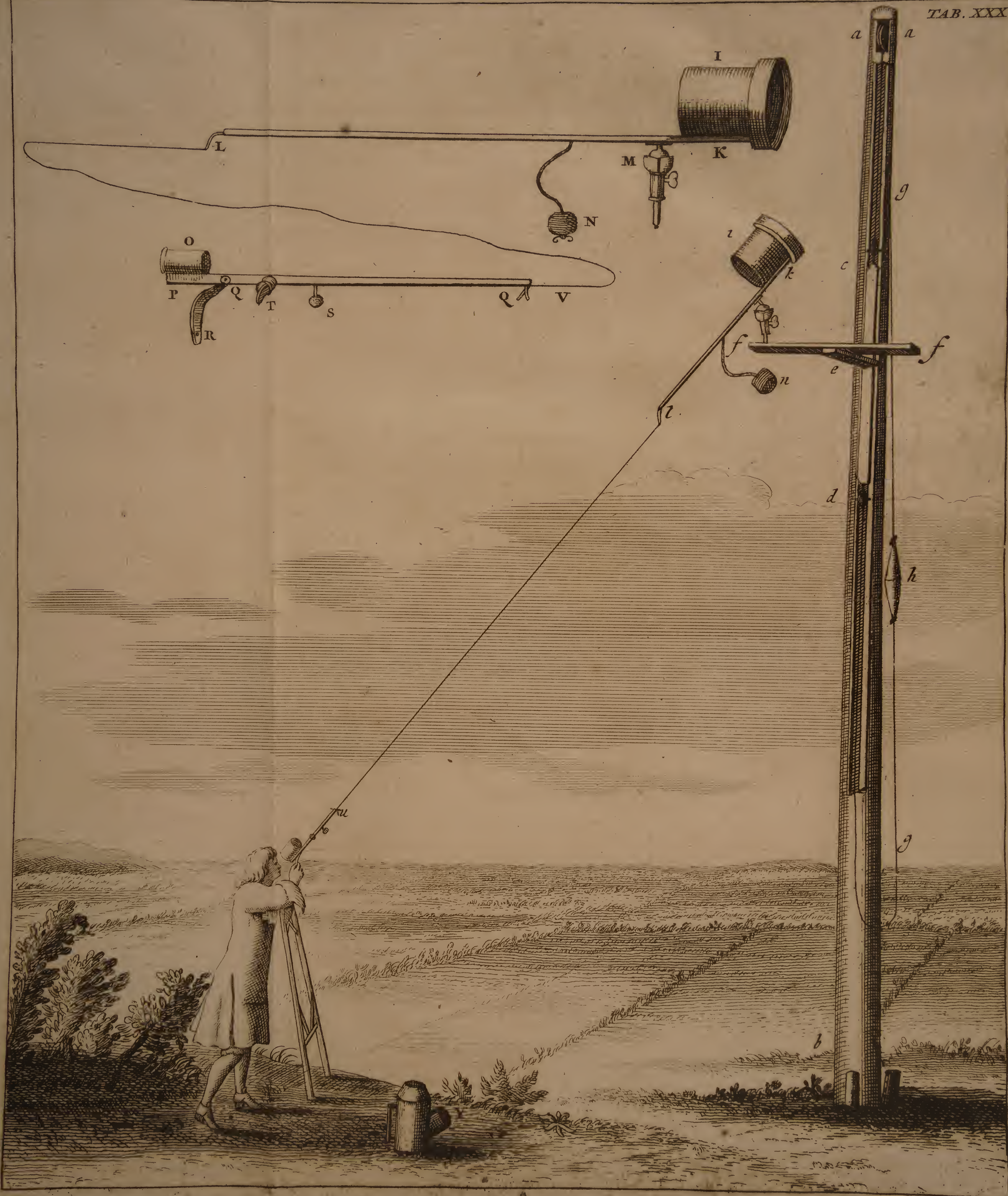
Supereft ut nonnulla, quæ fortasse nondum expertis scrupulum injicere possent, paulo accuratius examinemus. Verebuntur primum ne, subsidente filo quod ad utramque lentem pertingit, flexus ejus, quanquam exiguus, in magnis tamen illis, pedum centum aut ducentorum, longitudinibus impediat positum earum parallelum. Et profecto, si fune graviore opus foret, non parum noceret curvatura ejus, nullaque fere tendendi vehementia superari posset hoc incommodum. Nunc verò, suspensa librataque lente majori ut à no-

bis factum est; levissimi tantum fili bombycini tractu eam dirigimus; cujus pondus in pedes quinquaginta semidrachmam non superat; quodque idem appensas libras septem sustinet priusquam rumpatur. Quare flexus ejus neque in hac, neque in multo majori lentium distantia quidquam officit, etsi non nisi modica vi trahatur, duabus tribusve æquipollente libris; utique cum geometrica perfectio nequaquam hic requiratur, ut cuilibet experto notum.

Etenim certum est eadem ratione, qua funis fune levior est, vim tensionis diminui, qua utrumque ad rectam lineam æqualiter accedat. Ut proinde funiculus quinquaginta pedes longus, atque unciam pendens, vi librarum quadraginta octo opus habeat, ubi filum nostrum, longitudine pari, non nisi tribus libris indigebit. Atque hoc per se clarius est quam ut demonstratione comprobetur. Idem enim est prorsus cum sexdecim funiculi semidrachmales trahuntur singuli trium librarum pondere, atque cum uncialem funiculum simul componentes, is à conjunctis itidem sexdecies ternis libris contenditur.

Sed ulterius quoque hæc, quæ ad fili flexum attinent, geometriæ rationibus, experimentisque expendi possunt. Nempe contentum filum, flexu illo exiguo, parabolicam lineam tam prope exprimit, ut pro vera absque errore habeatur. Cujus parabolæ profunditatem, in longitudine pedum centum quinquaginta, invenimus pedis unius circiter quartam partem; cum filum horizonti parallelum tenderetur, nec nisi vi librarum duarum & semis. Sit fili parabola *a b c*, profunditas ejus *d b*, ducta nimirum recta *a d c*. Porro tangant parabolam rectæ *a e*, *c f*: quibus occurrant *c e*, *a f*, parallelæ *d b*. Intuenti igitur ex *a* puncto, secundum rectam *a e*, notatum fuit spatium *c e* fieri pedis unius; unde fit *d b* pedis quarta pars. Ipsi vero *c e* æquale est *a f*. Itaque lentem in *c* positam ita trahit filum *c b a*, ut non ad oculum, qui est in *a*, sed ad *f* punctum directe opposita sit. Ut proinde pedis unius intervallo à vero loco oculus absit: quod in illa pedum 150 distantia nihil obesse potest. Fit enim angulus defle-

TAB. XXXI. Fig. 1.


TAB. XXX.
I
L
M
K
N
O
P
Q
T
S
Q
V
R
a
a
g
i
k
c
f
f
e
n
l
d
h
u
g
b

deflexionis *c a e* vel *a c f* tantum duarum quintarum unius gradus; adeo ut remedio, quod tamen dabimus, non ſit opus. Sumpta autem *g h* diſtantia prioris dupla, ſeu pedum trecentorum, ut filum incurvum ſit *g b h*, erit cavitatis menſura *k b*, prioris *d b* quadrupla quidem, ſed angulus deflexionis tantummodo duplus, hoc eſt, $\frac{4}{5}$ unius gradus; ut facile perſpicitur, ducta tangente *g l*, quæ cum perpendiculari *h l* conveniat. Ipſa enim *h l* quadrupla erit ad *k b* ſive *c e*; diſtantia vero *g h* ad *a c* erat dupla. Quare angulus deflexionis *h g l*, antea inventi *c a e*, duplus cenſeri poteſt.

Hæc verò, ſcrupulorum 48, aberratio nullius adhuc momenti eſt, neque neglecta nocebit. Attamen, quo minus cauſandi locus hic ſuperſit, oſtendam jam quænam adhiberi poſſit correctio, atque ejusmodi quidem ut, una opera, omnem aliam lentis declinationem reſtituat.

Igitur ſemel ab initio, ad ſuperiorem lentis magnæ præparationem, hoc quod dicemus, adjungatur. Nempe lente quemadmodum præcepimus librata, atque ad oculi altitudinem defixa, filum caudæ adnexum manu altera capiatur, eaque oculo admoveatur; altera lucernam juxta teneat. Tum paulatim recedendo, extentumque filum producendo, obſervetur an duplex flammæ imago circa mediam lentem appareat, ab utraque nimirum ſuperficie ejus reflexa. Id ſi contingat ubi jam tota fili longitudo exierit, quanta nimirum futuro teleſcopio debetur, indicio eſt rectiſſime lentem ad oculum converti. Quod ſi altera tantum flammæ reflexio conſpiciatur, male collocata erit, ſin neutra, pejus. Hic vero jam remedium adhibebitur, ubi cognitum fuerit in quam partem lens declinet. Stylus enim æneus extremæ caudæ adjectus, filumque innexum habens, in partem eandem parumper flectendus eſt; ac rurſus, ut ante, lucernæ reflexio tentanda; idque ita repetitis vicibus faciendum, quoad utraque flammulæ imago in unum convenire conſpiciatur. Tenſione autem fili utendum mediocri, qualem ſupra definivimus, duarum aut trium librarum vim referente, eique

quatenus licet adsuescendum. Hoc modo correcta semel lentis positio ad omnes observationes valebit. Neque hic subtiliter nimium objiciat quisquam quod obliquo fili ascensu, cum ad astra dirigitur, paulo minor efficitur flexus ejus à gravitate ortus, quam cum filum idem horizonti parallelum extenditur. Est enim differentia hæc perexigua, præsertim in tanta fili levitate; & lentium parallelismus, ut jam diximus, ad geometriæ leges exactus non requiritur.

Multo magis ventus obesse dicendus foret, filum sinuans, atque in latus impellens., præsertim in magnis, quas diximus, longitudinibus; nisi quod tubis quoque idem ventus adversus est, qui concussu ejus tremunt ac vacillant, magno spectantis incommodo; ut propterea sæpe observationibus supersedendum fuerit. Sed quo æquiore animo hæc dispendia feramus, sciendum est, flantibus ventis, semper fere aëris pelluciditatem adeo turbari, etiamsi serenus videatur, ut hoc uno omnis telescopiorum prospectus impediatur; quod exercitatis ignotum esse nequit. Imo & tranquillo interdum ac prorsus sereno cœlo, scintillantibus cum maxime sideribus, frustra tamen telescopia adhibentur; humido vapore quodam aërem obsidente, quo fit ut ad Planetarum corpora respicienti, undatio quædam tremula & fluctuans omnem visus aciem intercipiat. Possetque, ubi hoc accidit, ipsa lentium bonitas suspecta esse, nisi alio tempore ac puriore cœlo fuisset cognita. Idem vapor, ut hoc quoque obiter admoneam, non raro, lenti majori adhærescens, radiorum lucis partem avertit: cui malo, calefacto modice ad ignem vitro, occurritur.

Videamus nunc & illud quod de illustranda lente eadem diximus ad malum subrecta. Quæ si valde procul distet, puta ad ducentorum & amplius pedum intervallum, vix videtur tantum luminis, ut ab observatore cerni possit, acceptura, etiamsi lucerna convexo vitreo juvetur, uti præcepimus. Sed hic intendere amplius lumen licebit, vel aucto lucernæ ipsius ellychnio, vel latiori lente adhibita leniusque convexa, quæ lucem transmissam, etiamsi pari quantitate

acci-

accipiat, minus tamen diffundet, longiusque proinde ejaculabitur.

Quantum igitur ad hæc attinet, nihil admodum referre liquet quænam fuerit telescopii longitudo, sed æque facile qualiacunque in usum deduci. Aliquod tantum discrimen in varia mali altitudine positum esse. Cujus quidem parandæ plures modi suppetunt. Possumus enim, uno statuto malo, alium ejus opera duplo altiorem juxta attollere, ac simul firmiorem reddere, transversis fibulis utrumque conserendo. Ac firmissima quidem fuerit compages hujusmodi, si duo mali humiliores, cum tertio duplæ altitudinis, binis ternisve pedibus inter se distent, in triangulum dispositi, atque uti diximus religati. Qua ratione facile ad centum pedum altitudinem perveniemus. Ad multo majores vero, vel validiori malorum ac trabium substructione utendo, vel ad turrim aut ædificii altioris angulum inferiora ligna applicando; ita ut nihil tamen obstet, quo minus, ab imo ad summum, lens primaria adducatur, per continuum canaliculum, uti diximus, ascendens. Sed & super turri aut domus culmine erigi malus potest, ut ibi adstet is cui funis cura demandata est, ad evehendam demittendamve lentem.

Nec vero præpropera aut supervacua cura hæc à nobis agitari quis putet, quod verisimile non sit his altitudinibus opus fore. Ecce enim, dum hæc scribo, Cassini literis certior fio, lentes quatuor, quarum maxima telescopio pedum centum quadraginta destinata sit, à Josepho Campano, easque præstantissimas Romæ esse perfectas, & ad magnum Galliæ Regem missas. Etsi enim ad cœlestium observationem nondum fuere admotæ, non dubitandum tamen interdiu institutum fuisse earum examen, in atriis porticibusve prælongis unde lux exclusa esset. Nunc vero, hoc nostro invento, utilitas sua tum his lentibus, tum si quæ has longitudine excedentes prodeant, constabit.

Quod si cogitemus quibus modis telescopiorum efficaciam alii augere studuerint; quæ frustra illi quæsiverunt, ea nos levi hac opera consecutos esse videri possit. Sive enim figu-

ris lentium hyperbolicis ellipticisve, ut Cartesius, sive speculis cavis, ut Neutonus, sive alia quavis ratione id aggressi sint, huc omnia redibant ut brevioribus telescopiis, ac minori molimine usurpandis, multum amplificarentur res visæ. Nam neque accurata illa ac scrupulosa superficierum formatio devitari poterat, neque etiam lentium speculorumve magnitudo. quoniam obscuritate nimia, quicquid machinati fuerimus, inutile reddi necesse est, nisi pro ratione percepti augmenti crescant aperturæ quibus primum lux subintrat. Nos vero longitudines quidem non imminuimus, sed ne obessent effecimus, quod fere eodem redit.

Si quis vero jam requirat quousque & quo operæ pretio extendi porro telescopia posse existimem, & num productis longe ultra modum eorum quæ paulo ante diximus, sperandum sit adhuc decuplo propius ad lunam cæteraque astra nos accessuros, quam quo triginta pedes habentibus processimus; quibus tanti itineris partes centum quadraginta novem, una duntaxat reliqua, confectæ sunt: respondebo me certos quidem arti terminos præfinire non posse; huc tamen, quo dixi, nec maximo hominum conatu perventum iri. multoque minus futurum, quod aliqui videntur non desperasse, ut lunam ac Planetas cæteros velut è propinquo inspiciamus, & utrum animalibus habitentur, an præter vastas solitudines nihil habeant, visu penetremus. Primum enim, in parandis lentibus, scio quantopere crescat cum magnitudine formandi difficultas; ipsiusque inveniendi vitri quod vitiis iis careat, quæ maxime huic operi infesta sunt. Quanto enim ulterius radii colligentur, tanto magis hæc vitia se prodant necesse est. Constat præterea, ut jam ista nihil obstent, non amplificari res visas, nisi pro ratione diametrorum aperturæ lentis exterioris. Quæ diametri nequaquam crescunt cum telescopiorum longitudine; sed, quantum video, rationem longitudinum subduplam sequuntur. Adeo ut data apertura pollicum trium, in telescopio triginta pedes longo; quantam circiter experientia concedi sinit; alia, ad trecentos pedes, non nisi novem unciarum & semis sit futura,

futura, ac propterea tantum triplo majora fere omnia ſint apparitura, prægrandi hoc teleſcopio, quam illo pedum tricenum. At ſi decuplo exceſſu idem ſuperandum ſit, jam ter mille pedum longitudine opus erit, quo quidem nulla humana ope perveniri poſſe, vel ſolius altitudinis cauſa, manifeſtum eſt.

Sane majores multo forent, & majori proportione creſcerent, eæ, quas diximus, aperturæ, ſi nihil aliud obſtaret quam figuræ ſphæricæ parum idonea, in colligendis radiis, curvatura. Nunc vero alia quædam, ex ipſa refractionis natura, oritur radiorum aberratio, quam ante annos aliquot Neutonus egregiis quibusdam experimentis & priſmatum vitreorum coloribus comprobavit. Hæc vero & ipſa leges ſuas habet, quibus, ſi recte eas perſpicio, ſubdupla illa, quam dixi, aperturarum ad longitudines ratio colligitur.

AUCTARIUM.

Videbatur jam perfecta abſolutaque omnibas numeris nova Aſtroſcopia noſtra; typisque excuſa, nondum tamen edita erat; cum ſecundis cogitationibus, ut fit, alia quædam nobis in mentem venere, quibus ea melior commodiorque fieret Quæ cum auctarii vice hic adponere viſum ſit, ſimul hoc monemus, ut, ſicut poſterius reperta fuere, ita ultimo loco, poſtquam reliqua deſcriptio ac delineatio percepta fuerit, legantur.

Cum primum ſpectatores invento noſtro, ac Planetis nacti ſumus, teleſcopicis obſervationibus minus aſſuetos, docuit experientia, eos quidem per ſe difficilius ſtellæ conſpectum conſequi; ſicut antehac quoque, ubi in grandiores tubos inciderant, eveniebat. Quod autem hic fieri ſolitum, ut, reperto prius ſidere, ac manente tubo, tantummodo oculum ei ſpectator juſſus admoveret, id non perinde nobis nunc imitari licebat; cum lens oculo proxima, ubi defigeretur, non haberet. Itaque hic quoque ratio fuit excogitanda, qua poſitum ſuum ſervaret ocularis lens. Quod quidem præſtiti-

mus

mus machinæ exiguæ opera, quæ fulcro bipedi, in descriptione designato affigitur; ut in figura adjecta videre est.

Transversarii namque in summo fulcro pars est *a a*. Rhombus plicatilis ex ære *b b*, binis lateribus ad duplam longitudinem productis. Longitudo laterum pollices $5\frac{1}{2}$, latitudo paulo major pollice dimidio; crassitudo parte ejus decima. Hunc rhombum transversarii medio applicitum tenet cochlea ferrea *f*, supposità æris vel ferri particulâ *g*, ac præterea orbiculo ex ære tenui, leniter convexo, cujus pressu lentus æquabilisque efficitur motus rhombi ac diductio. Porro ex angulo ejus superiore, axis seu columella prominet *c*, perpendiculariter insistens, longitudine sesqui pollicis. Cujus capite altero lamella mobilis adhæret, 4. pollices longa, dimidium lata; quæ hic conspici nequit, quippe tecta capulo ligneo *d*, paris longitudinis, cui conserta est. Huic demum capulo, plano ac parte anteriori leviter inciso, inseritur lamella altera ænea *e*, quæ super axiculo mobili bacillum sustinet, cum affixa oculari lente, tubulo suo inclusa. Ut autem rhombus cum imposito onere æqualiter libretur super axe *f*, adjiciuntur in productis lateribus extremis pondera paria *h h*, quantis ad hoc opus est.

TAB. XXXI. Fig. 2.

Quibus ita se habentibus, quocumque perducta fuerit observantis manu lens ocularis, capulo *d* semper deorsum converso, ibi sponte sua consistit; atque ita, invento sidere, facile imperitior spectator in prioris locum succedit, eodemque fruitur spectaculo. Facit enim funiculus utramque lentem conjungens, ut positum suum fulcrum servet, spectatorem versus reclinans, etsi duobus tantum pedibus insistat; simulque fulcri pondere, eorumque quæ ipsi imposita docuimus, idem funiculus intenditur; adeo ut nihil aptius commodiusve hac in re optari queat.

Altitudo fulcri est pedum 4. poll. 9. Gravitas ejus librarum $2\frac{1}{4}$. Lentis ocularis, cum tubulo & bacillo, gravitas libra dimidia. Rhombi cum ponderibus *h h*, libræ $2\frac{1}{4}$. Quæ propterea adscribo, ut constructionem nostram, experientia comprobatam, eo facilius cuivis imitari liceat.

Nunc

Nunc vero aliud præterea addemus, quo perfectior evadat hæc nostra observandi ratio. quod licet, omissum, nihil plerumque noceret, curioso tamen syderum inspectori nequaquam est negligendum. Nempe cum Saturni comites illos Cassinianos diligentius requirerem, eosque difficulter adsequerer, præsertim noctibus non admodum obscuris, intellexi in causa esse lucem tenuem quandam, ab aëre ad oculum manantem; non eam quæ per lentem majorem advenit, sed quæ extrinsecus circum latera præterlabitur. Huic importunæ luculæ excludendæ, nonnihil quidem conducere sciebam, si circulum illum papyraceum, quo in luna observanda utebar, etiam hic lenti majori circumponerem. Sed aliud efficacius remedium, circa hæc occupato incidit, priori illi jungendum; ut nempe, perforatæ laminæ oppositu, oculi pupilla arctaretur, quæ alioqui per tenebras late patere solet. Cujus simul ac experimentum feci, jam clare tres Saturni Lunulas conspexi; cum amoto exiguo foramine media illa nostra tantum cerneretur. Quia vero, ita reductâ pupillâ, minus facile propositum sydus investigatur, quam cum tota patet, idcirco orbiculum illum perforatum, ac semipollicem latum, brachiolo quodam mobili, ac Græco Λ hærentem simili, cui in figura hac adscriptum est *k*, ita conjunximus tubuli fundo per quem lens ocularis inspicitur, quique latiori foramine pervius est, ut non ante quam hoc foramine sydus inventum fuerit, superinducatur alterum illud angustius.

Credidisset fortasse aliquis hac oculi contractione non parum visum obscurari. cum tamen certum sit, si diameter exigui foraminis, ad diametrum aperturæ lentis majoris eam rationem habeat, quam habent inter se focorum utriusque distantiæ, nihilo obscurius telescopio ejusmodi omnia cerni, quam si apertus ac liber oculus relinquatur. Sed præstat duplicare tantillam hanc latitudinem, vel paulo etiam augere amplius, quo minus difficilis sit rei videndæ inquisitio, nec nimium cito inventa stella elabatur, ob mundi conversionem diurnam. Nobis in telescopio 34 pedes longo, foraminuli dia-

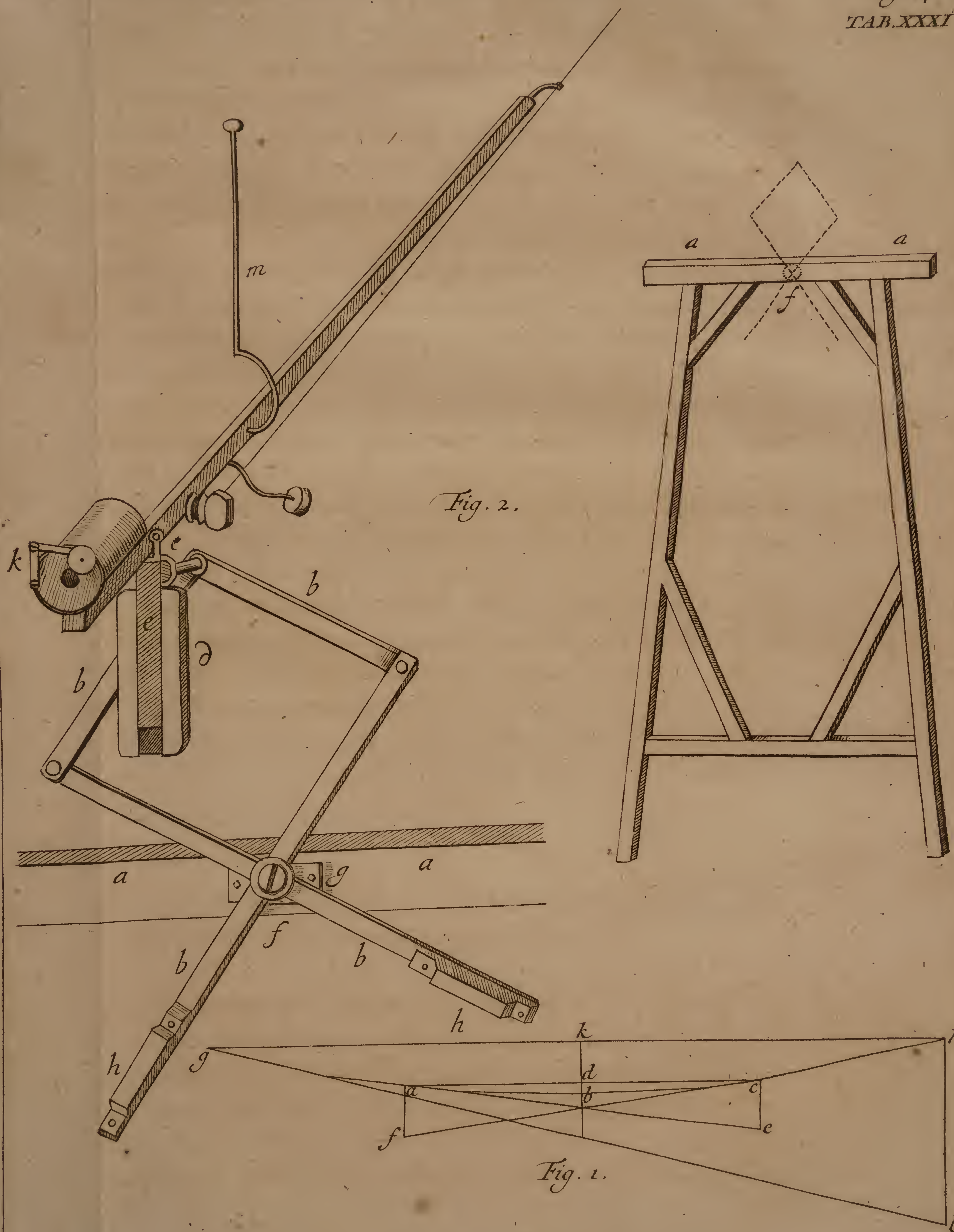
meter decimam sextam circiter pollicis partem habet. Ipsum vero duos pollices cum dimidio ab oculari lente abest, quanta est præcise in hac lente foci distantia. Quod diligenter curandum, quia alias non poterit amplum spatium, ut solet, uno obtutu comprehendi. Facile autem deltoidis brachii flexu, qui quidem in schemate nostro conspici nequit, quantum opus est, lamella perforata removetur, quæ nobis semipollice à tubuli fundo extat.

Porro circulus lenti magnæ circumdatus, telescopii partem longitudinis quadragesimam quintam circiter diametro æquet. Cujus circuli objectu quia paulo impeditiorem reddi necesse erat astri investigationem, visum fuit imponere bacillo, seu caudæ lentis ocularis, stylum *m*, perpendiculariter erectum; cujus apex tantundem supra axem lentium attollitur quantus est circuli illius semidiameter. Hinc enim fit, ut si oculum prius ibi collocemus, unde cum summo margine circuli in eandem rectam lineam stella conveniat; tumque, apprehenso capulo *d*, moveamus lentem ocularem cum adjuncto bacillo, donec in eandem quoque rectam quadret extremum styli *m*; fit inquam ut, ad tubulum ocularem visum referenti, stella eadem per telescopium sese conspiciendam det, vel certe parum absit. Usu vero & exercitatione tum hæc, tum cætera quæ ad hanc observandi rationem pertinent, facilia fiunt.

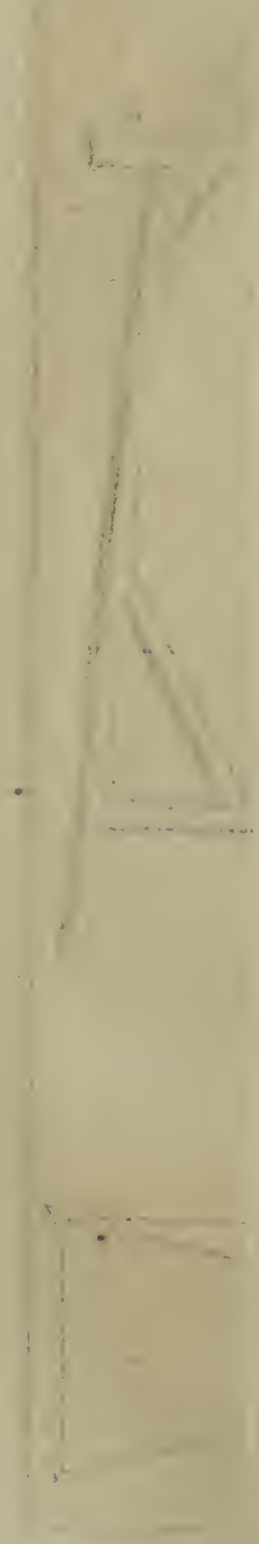
IV.

Excerpta ex literis Dni Hugenii de novâ methodo construendi Barometrum.

Quod novam meam methodum Barometri spectat, nosti, diversas aëris atmosphæræ pressiones multo magis fore visibiles, & faciliores distinctu, si in tubo 30 pedes alto fiat barometrum ope aquæ quam sunt in barometris vulgaribus, quæ cum Hydrargyro construuntur. Cum enim maxima diversitas sit circiter duorum pollicum in barometris vulgari-



Pag. 276.
TAB. XXXI.
Fig. 2.
Fig. 1.
a
a
b
b
b
b
c
d
e
f
g
h
h
k
m
k
h
g
d
a
b
c
f
e
l



garibus, in novo hoc barometro erit viginti octo pollicum id est decies & quater major erit, aliæque variationes augebuntur eadem ratione, quæ ipsa datur inter Mercurii & aquæ gravitates specificas.

Sed uti difficile est bene disponere hæc barometra ob magnam tubi altitudinem, quæ impedit etiam, quo minus commodè locari possint; aut de loco in locum transferri. Cogitavi, quo pacto construi posset barometrum mediocris magnitudinis & portatile, cujus effectus quam proxime idem esset ac aliorum illorum magnorum barometrorum, & duas diversas constructiones inveni.

Prima est, ut fiat tubus vitreus A B quatuor pedum cum semisse, qui clausus sit in extremitate A, & cujus cavitas sit circiter duarum linearum; requiritur ut latior sit in loco medio, ubi detur quasi pyxis cylindrica C D, cujus altitudo sit circiter unius pollicis, & Diameter E E 14 vel 15 linearum, id est septies vel octies major diametro tubi; infunditur in apertam extremitatem tantum aquæ, quantum requiritur ad replendum dimidium receptaculi C D cum partis superioris tubi dimidio C F; Porro repletur quidquid superest Mercurio; qui etiam infunditur in vas G ad altitudinem semipollicis, deinde immergitur in hunc extremitas tubi B; tum pro parte exit Mercurius, & qui super est manet ad altitudinem E E; aqua, quæ supernatat, descendit usque in F, relinquens reliquum tubi F A aëre vacuum, & superficies aquæ, adscendendo & descendendo denotat diversum atmosphæræ pondus, gradibus fere æqualibus iis quibus aqua illud denotat in barometro 32 pedum. TAB. XXXII. Fig. 1.

Altera constructio partim similis est priori, sed multo melior est; detur tubus in medio incurvatus H M N, duæ in hoc tubo requiruntur pixides cylindricæ æquales K & M, quarum una, sc. K, quæ est ad tubi extremitatem, hermetice sit clausa superius, & M, quæ est paululum supra curvaturam, sit utrinque aperta in locis in quibus cum tubo jungitur; longitudo crurum determinata est per distantiam pyxi- TAB. XXXII. Fig. 2.

dum K, M, quæ sit circiter $27\frac{1}{2}$ pollicum *, mensurando distantiam inter harum media. Altitudo cujusvis pyxidis est præterpropter unius pollicis cum semisse; diameter interior unius pollicis vel 15 linearum; diameter cavitatis reliqui tubi $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{12}$ ejusdem magnitudinis. Primo infunditur solus Mercurius in tubum per aperturam N; ut fiat barometrum vulgare ex iis, quæ inferius recurvata sunt. Infundendum vel tollendum est Hydrargyrum donec superficies dentur circiter in medio pyxidum K & M, si tempore quo fit hæc operatio aër mediæ sit gravitatis, id est in barometris vulgaribus Mercurius sit ad altitudinem $27\frac{1}{2}$ pollicum; alioquin enim si pressio aëris sit major vel minor ordinariâ, ad hoc attendendum, computando pro uno pollice variationis, in vulgari barometro, lineam unam cum semisse variationis in quavis pyxide: Postquam Mercurius bene aëre depurgatus erit, ita ut nullus detur in pyxide K infundetur per aperturam N quidam liquor, qui hieme non congelatur, & qui nequit dissolvere Mercurium; E. G. aqua communis mixta cum $\frac{1}{6}$ aquæ fortis: spiritus vini quidem possidet has duas qualitates, sed non conveniret barometro, quia per calorem dilatatur. Hoc etiam referri debet ad primam formam Barometri.

Quod attinet ad liquoris quantitatem, debet illa adscendere ad pedem unum circiter in tubum B C positâ mediâ aëris pressione.

Disposito ita hoc Barometro videbimus, maximam differentiam pressionis aëris, quæ notabitur per superficiem liquoris in tubo M N, fore propemodum 22 pollicum, si diametri pyxidum cylindricarum, sint decies majores diametro tubi. Et ut inveniamus quantum differentiæ quas indicat barometrum hoc nostrum excedant illas, quas potest indicare barometrum vulgare, generalis est regula, differentias nostri novi Barometri esse ad differentias Barometri vulgaris, ut decies & quater quadratum diametri pyxidum ad idem quadratum plus vicies octies quadratum diametri tubi, qui aquam continet; & hinc sequitur, cujuscunque magnitudinis sint pyxides, maximas differentias non posse excedere 28 pollices, quandoquidem differentiæ Barometrorum ordinariorum non excedunt duos pollices.

Ut

* *Pollices hi sunt partes duodecimæ pedis Regii Gallici.*

Ut transferatur commode hoc Barometrum, asseri adjungendum est: vel Thecâ includendum; & notari debent in ligno divisiones æquales ad indicandas altitudinum differentias, quæ augebuntur eadem ratione, in quâ minuetur atmosphæræ pondus.

Sic parvæ mutationes, in pondere atmosphæræ, & quæ non percipiuntur in Barometris ordinariis, in his sensibiles fiunt.

Exempli gratiâ si ferantur in Turrim *de Nostre Dame* vel *Montmartre* videbimus superficiem aquæ descendere in primo Barometro quosdam pollices, & tantum in altero adscendere; si ferantur in domum elevatam tantum 50 pedes, & porro inde descendamus, habebimus notabilem mutationem ½ propemodum pollicis, ita ut possimus ope hujus instrumenti satis bene mensurare diversam altitudinem montium a se invicem dissitorum, & regionum, quarum situs non sinit, ut has metiamur aliter. Si mutationes temporum ope Barometrorum prævideri possint uti sperandum videtur, certum est, quod illa, quæ hoc modo constructa sunt, magnam utilitatem habebunt præ aliis, quæ adhibita sunt huc usque.

Verum est quod quædam novorum horum Barometrorum sensibiliter quodammodo mutentur ex calore vel frigore aëris exterioris, quamcunque etiam adhibeamus operam ad illa interiori aëre purganda; sed Barometra ordinaria sunt etiam eidem varietati obnoxia, & si in nostris magis conspicua sit, hoc inde venit, quod multo majores differentias indicent, quam Barometra vulgaria: sed ut occurramus huic malo, quod plane nobis impedimento esset, si vellemus metiri altitudines, possumus Thermoscopium includere in parte Barometri aëre vacuâ, & efficere calefaciendo aërem, qui utrumque cingit, ut Thermometrum redeat ad eandem notam in utraque operatione; & hac viâ certi erimus, quod aër externus nullam inducat mutationem Barometro, & quod omnis varietas, quæ ibi apparebit, oriatur ex diversâ atmosphæræ gravitate.

Dixi posteriorem constructionem alterâ meliorem esse, non

ſolum, quia ultimum Barometrum multo minoris voluminis eſt, ſed &, quia obſervavi, quod in priori parum aëris, quem aqua exhalat in vacuo, pedetentim augeatur temporis diuturnitate; cui vitio certum eſt Barometrum 32 pedum, de quo ſupra dixi, pariter obnoxium eſſe; Et, ut huic malo occurratur, quærendus eſt liquor, qui non producit aërem, ut faciunt aqua & ſpiritus vini. Sed patet, quod poſterius noſtrum Barometrum hoc vitio non laboret, quoniam aqua in vacuo non eſt incluſa: Quod ſi percipiamus aquam, quæ eſt in poſteriore Barometro, vapores emittere, tantum ſuperius infundenda eſt gutta olei, quod frigore non inſpiſſatur, quodque calore non emittit vapores, ut oleum amygdali dulcis.

V.

Nova vis movens mediante pulvere nitrato & aëre.

Deſideratum a longo tempore eſt artificium quo vis pulveris pyrii aliis, quam quibus huc uſque inſerviit, uſibus applicari poſſet, in quibus omnibus vis admodum ſubita requiritur, qualem obſervamus in exploſione bombardæ & ſclopeti & disruptione cuniculorum: ſi impetus ille promtus poſſet moderari & reduci ad vim magis placidam, maximam in mechanicis utilitatem haberet, & in multis occaſionibus, in quibus vim hominum, equorum, venti, aliarumque potentiarum adhibemus, inſerviret. Ad hunc effectum excogitavi machinam, hic delineatam. Hanc non propono, acſi in omnibus partibus perfecta foret, ſed tanquam inventum, quod cum pro parte ſucceſſit, poterit ad majorem proferri perfectionem.

TAB. XXXII. Fig. 3. A A cylindrus cavus eſt, intus bene politus, & ubique æqualis magnitudinis; B eſt embolus in ſuperiori parte Cylyndri, & qui in hoc poteſt moveri; in C C cylindrus eſt perforatus duobus foraminibus, quorum diametri circiter ſunt $\frac{1}{4}$ diametri cylindri; tubi D, D, corii madidi & mollis, firmiter

miter alligati sunt duobus cylindris minoribus, qui cum majori cohærent, & circumdant foramina; tubus unus exhibetur pendens, alter extensus. In fundo cylindri cum hoc conjungitur ope cochleæ interposito annulo coriaceo pyxis H; ita ut exacte claudat apperturam cylindri; E E sunt retinacula, quæ cylindrum in inferiori parte conjungunt cum theca, qua includitur, sed quæ hic non est exhibita, ne turbetur figura: E F est funis annexus embolo B, circumponitur trochlea G, & inservit ad movendum id, quod ei applicatur.

Obtecto parvâ aquæ quantitate embolo, qui superius firmiter debet consistere, ne possit exire ex cylindro, immittitur in cistam H parum pulveris tormentarii cum parva quantitate igniarii Germanici accensi, & clauditur bene cista mediante sua cochleâ.

Pulvis ille paulo post accensus implet cylindrum flammâ & fugat aërem per tubos coriaceos C D, C D, qui extenduntur, quique statim clauduntur iterum ab aëre exteriore; ita ut cylindrus maneat aëre vacuus, saltem maximâ parte; porro embolus B est adactus per pressionem aëris, qui supra gravitat ad descendendum, & sic trahit funem F F pariter illud quod ei appenditur.

Quantitas ejus pressionis cognita est, & determinata, per gravitatem aëris, & per magnitudinem diametri emboli, qui, si sit unius pedis, ita premitur, ut sustineat pondus 1800 circiter librarum; posito, quod cylindrus totus fiat aëre vacuus, quod huc usque efficere non potui; etiam experimenta eo respectu in magnis & parvis cylindris non eodem modo processere.

Cylindrus diametri $2\frac{1}{2}$ pollicum, & 20 poll. longus, pondere 6 granorum pulveris aëre, evacuatus fuit $\frac{5}{6}$ partibus; in cylindro ejusdem latitudinis, sed longitudinis 44 poll., requiruntur 36 grana pulveris ut ejiciantur $\frac{4}{6}$ aëris; Et in cylindro diametri unius pedis, & $3\frac{1}{2}$ altitudinis, $1\frac{1}{2}$ drachma pulveris ad fugandum $\frac{1}{2}$ aëris; & duplicata pulveris quantitate vix magis evacuatus fuit cylindrus.

Aër

Aër vero ille qui superest in cylindro, impedit magnam partem effectus, quem exereret machina, si omnis aër prorsus exhauriretur; ut satis videre est, & simul determinari computatione potest. Ideo deberet examinari, quæ ratio inter altitudinem & diametrum cylindri sit optima in hâc machina ad hanc maxime evacuandam adhibitâ minima quantum posset pulveris quantitate, nam licet totus cylindrus non evacuetur, vis hujus pressionis nihilominus magnum ederet effectum.

Poterit hæc inservire non tantum elevationi magnorum ponderum quorumcunque & aquarum. Sed etiam ad projicienda globos & sagittas magna vi, juxta methodum balistarum veterum.

Ulterius, cum propter cylindri convexitatem, non sit necesse, ut sit valde solidus ad resistendum pressioni aëris externi, certum est totam machinam exigui ponderis esse posse, quæ levitas conjuncta cum magna vi, quam habet, poterit forte usui esse ad effectus edendos quos huc usque impossibiles duximus.

VI.

Demonstratio Æquilibrii bilancis.

TAB. XXXII. Fig. 4. In demonstratione, quam Archimedes dedit de propositione fundamentali Mechanices, tacite ponit quid, de quo jure aliquo possumus dubitare; est autem hoc, si plura pondera æqualia annexa sint libræ ad distantias æquales a se invicem; sive omnia sint ad eandem partem puncti suspensionis, sive quædam transferantur ad patrem oppositam, ut in hac figura, ubi punctum suspensionis est A, pondera habere eandem vim ad deflectendam libram quam si forent omnia suspensa in puncto, ubi est commune eorum centrum gravitatis, ut hic est punctum B. adeo ut si separatim suspensa in æquilibrio forent cum contrario pondere C, hoc etiam obtineret suspensis omnibus ponderibus in puncto B, vel eorum loco pondus D, quod æquat omnium gravitatem.

Qui-

Quidam Geometræ parumper mutando hanc demonstrationem tentarunt defectum minus sensibilem reddere, sed in totum fuisse sublatum mihi non videtur. Igitur conatus sum alio modo eandem propositionem demonstrare uti sequitur.

1°. Postulatur cum Archimede, duo pondera æqualia appensa extremitatibus brachiorum æqualium libræ fore in æquilibrio.

2°. Positis ponderibus æqualibus, & brachiis libræ, cui appensa sunt, inæqualibus, illam inclinari ad latus brachii longioris.

3°. Postulatur posse concipi, lineas & plana, de quibus loquimur in hac demonstratione, inflexilia & sine gravitate esse.

PROP. I. *Si super planum Horizontale quod imponitur lineæ rectæ, quæ id dividit in duas partes, applicetur pondus, vis, quam illud pondus habebit ad deflectendum planum partem versus ad quam applicatur erit major, quam si positum sit prope dictam lineam.*

Sit planum Horizontale A B impositum lineæ rectæ C D, & cui applicetur pondus E, cujus distantia a C D lineâ perpendiculari E H mensuratur; & cui porro applicetur idem pondus in F, ita ut distantia F H minor sit quam E H, dico, quod habebit plus virium ad planum deflectendum, si sit applicatum in E quam in F. TAB. XXXII. Fig. 5.

Nam producta recta E F H in G & positis H G & H F æqualibus, certum est, pondus æquale illi, de quo locuti sumus, applicatum in G in æquilibrio futurum cum altero in F, propter æqualia brachia F H, H G.

Sed pondus translatum ex F in E deflectet planum, quoniam plano existente sine gravitate effectus idem est ac in bilance brachiorum inæqualium quæ æqualibus ponderibus gravantur, idem ergo pondus positum in E plus virium habet ad planum deflectendum quam si est in F; Q. E. D.

PROP. II. *Si planum Horizontale, oneratum plurimis ponderibus, maneat in æqualibrio, impositum lineæ rectæ, quæ*

id secat in duas partes, centrum gravitatis plani sic onerati erit in ipsa lineâ rectâ.

TAB. XXXII. Fig. 6. Sit planum Horizontale A B oneratum ponderibus C C, D D & quod manet in æquilibrio, impositum rectæ E F; dico centrum ejus gravitatis esse in illa linea E F; nam posito, si fieri potest, centrum gravitatis esse alibi in puncto G, ducatur per id punctum recta H K parallela ipsi E F.

Tunc ergo, quia planum fultum in puncto G, manet in suo situ Horizontali, debent, ducta linea recta quacunque in plano per punctum G, pondera ad utramque partem lineæ esse in æquilibrio.

Idcirco pondera C C facient æquilibrium cum ponderibus D D, quando planum fulcitur a recta H K: id quod fieri nequit, quoniam manet in æquilibrio fultum a recta E F; nam patet, omnes distantias ponderum ad unam partem esse diminutas, scilicet ponderum C C, & consequenter etiam effectus gravitatis eorum; & distantias ponderum oppositorum D D esse auctas, & eodem tempore effectum eorum gravitatis, adeo ut ultima pondera deflexura sint planum ad suam partem, & multo magis si unum vel plura pondera C C sint ad alteram partem lineæ H K; Centrum ergo gravitatis plani onerati erit in linea E F. Q. E. D.

PROP. III. *Duo gravia commensurabilia appensa ad extremitates brachiorum Libræ erunt in æquilibrio, si brachia sint in ratione reciproca gravium.*

TAB. XXXII. Fig. 7. Sint gravia commensurabilia A & B, quorum A sit majus; & libra C D E, cujus brachium D E sit ad D C, ut grave A ad grave B; dico, libram esse in æquilibrio appenso A ad extremum C, & B ad extremum E, si C E sustineatur in D.

Concipiatur planum parallelum ad horizontem transiens per lineam C E, in eo plano sint ductæ per puncta E & C rectæ L E G, K C M perpendiculares ad C E; fiat ulterius E F æquale C D, & ducantur G F K, M D L quæ cum C E angulos semirectos efficiunt & sese mutuò ad angulos rectos secant in N; illæ lineæ necessario occurrunt duabus prioribus, quas duximus per E & C; ponamus puncta

cta occursus esse G, K & M, L; manifestum est, E G æquale esse E F, & C K, C F; uti etiam G K, M L, se mutuo secare in medio in puncto N; & triangula G N L, K N M esse similia & æqualia: sumatur E H æquale E G, & C O æquale C K; tum, quia E D est ad D C ut pondus A ad B, patet quod lineæ E D & D C, sint commensurabiles, ut & H G & K O, cum inter se sint ut E F ad F C, id est ut C D ad D E. Sint ergo K O & H G divisæ in partes æquales per maximam earum communem mensuram, & quantitates A & B pariter divisæ; idcirco habebuntur tot partes ponderis A, quot habentur partes in linea K O, & tot partes ponderis B, quot habentur partes in linea H G, quæ partes ponderum, æquales inter se, sint singulæ appensæ in medio unius ex partibus linearum K O, H G.

Jam demonstrabimus, quod gravibus ita dispositis, planum maneat in æquilibrio, quando fulcitur a puncto D, unde veritas propositionis erit manifesta; quoniam concipere possumus omnes partes plani esse sublatas & solas lineas K O, H G, oneratas ponderibus æqualibus ipsis A & B, sustineri in extremitatibus libræ C & E, nam cum planum sit sine gravitate, partes sublatæ non possunt mutare æquilibrium.

Ad demonstrandum igitur, æquilibrium plani, ut dictum est gravati, dari in puncto D, sint ductæ ex quovis pondere perpendiculares ad lineam L M, quantum necesse est, productam, uti R S, Z I, T V, X Y. Perpendiculares T V & R S, quæ ducuntur a ponderibus maxime vicinis punctis G & K erunt inter se æquales; nam triangula G N L, K N M sunt æqualia & similia, uti dictum est, & latera G L & K M sunt etiam æqualia inter se, ut & intervalla G T & K R, quæ singula æqualia sunt dimidio unius ex partibus æqualibus in quas divisæ sunt lineæ H G, K O; unde patet lineas T V, R S, etiam fore æquales, uti dictum est; Tunc si fulciatur planum in linea L M Q, pondus T in æquilibrio erit cum pondere R.

Pariter, ob æqualitatem perpendicularium X Y & Z I, pondus X erit in æquilibrio cum pondere Z, & sic con-

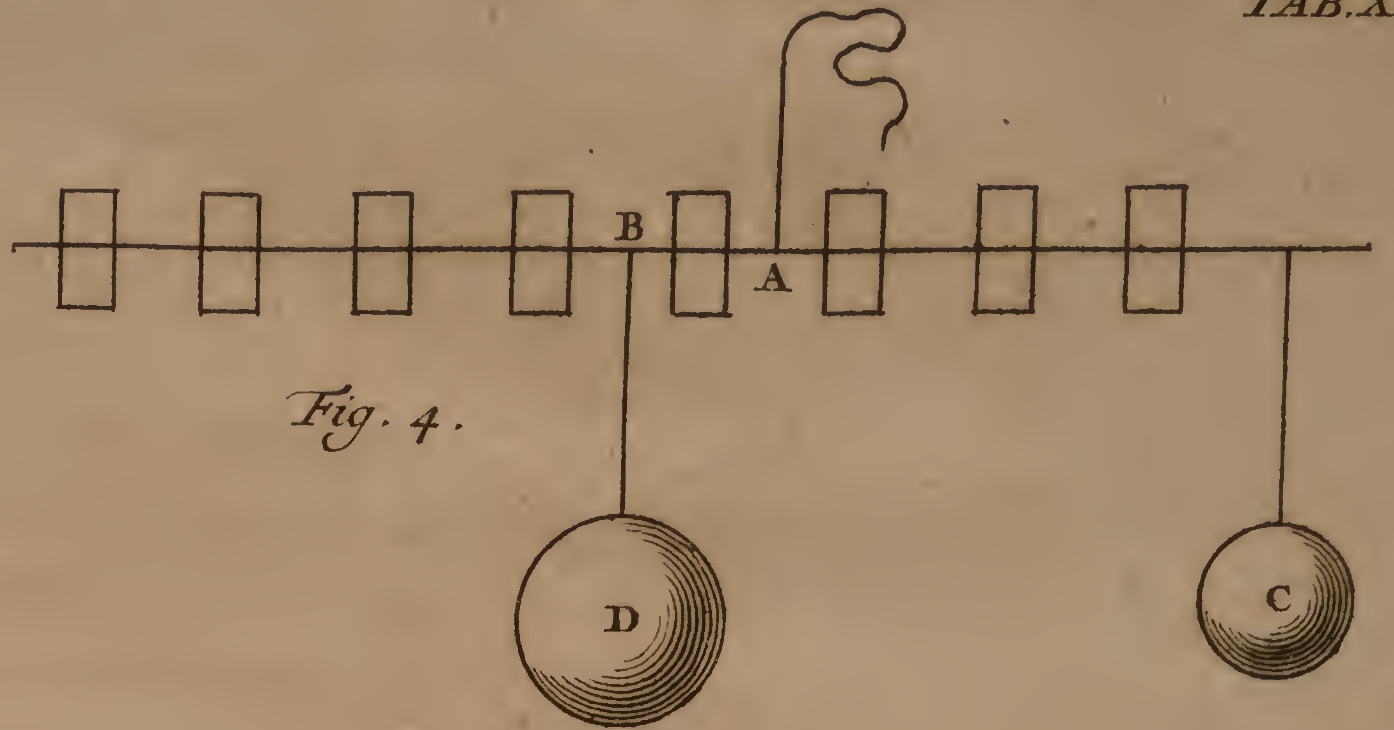
ſequenter omnia pondera lineæ G H cum tot ponderibus ſumtis poſt K in linea K O; id eſt, ſi ſumatur pars K P æqualis lineæ G H, pondera appenſa inter K & P, æquiponderabunt cum omnibus ponderibus lineæ G H.

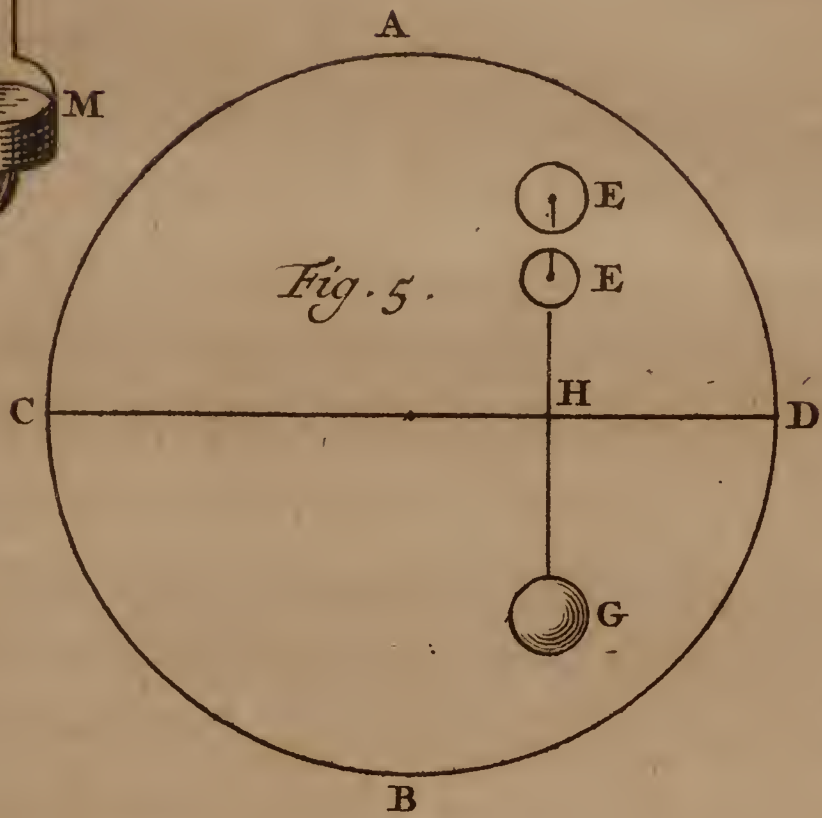
Si ergo pondera reliqua in linea P O etiam faciant æquilibrium unum cum altero in plano fulto a linea L M Q, ſequetur planum oneratum omnibus ponderibus manſurum in æquilibrio ſuper eandam illam lineam.

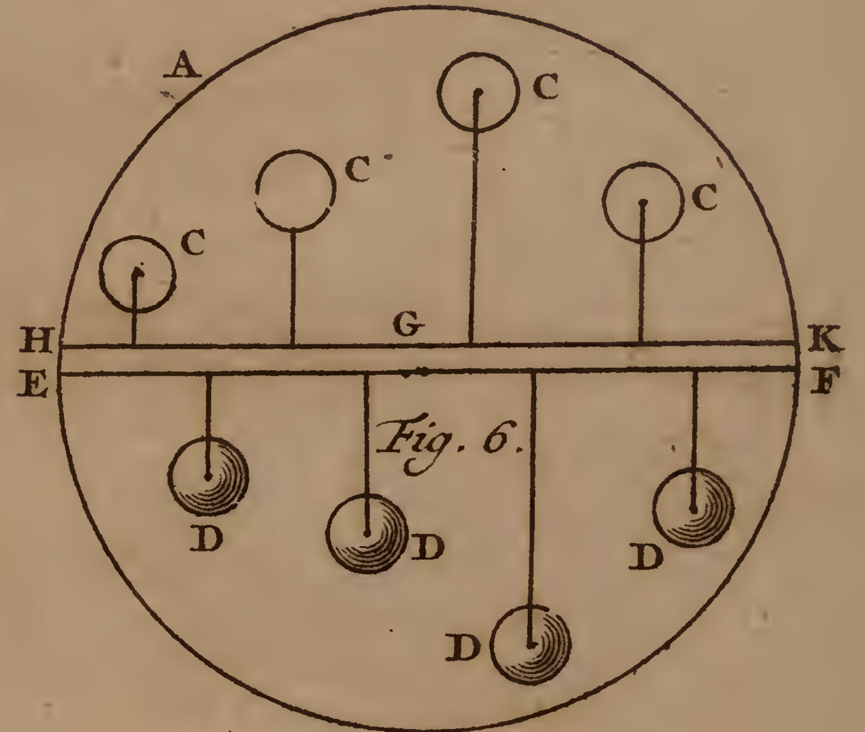
Æquilibrium autem ponderum reliquorum ita invenitur: cum ſit K O = 2 C F; & K P = H G, id eſt 2 C D, erit P O = 2 D F; ſed M O = D F; quoniam C M = C D; ergo M P eſt dimidium P O; Adeo ut lineâ P O, quæ continet numerum partium, quibus K O ſuperat H G, in 2 partes æquales dividatur per rectam L M Q, manifeſtum ergo eſt æqualem numerum ponderum illorum quæ continet illa linea P O dari ad partem utramque puncti M, & ſimiliter diſponi; ideo ſi numerus, illorum ponderum ſit impar, illud quod in medio eſt, erit in puncto M, unde ſequitur, ſingulas perpendiculares quas duximus ab iiſdem ponderibus ad lineam L M Q æquales eſſe ſibi reſpondentibus, & conſequenter pondera eſſe in æquilibrio, quando planum fulcitur a linea L M Q; quod cum ita ſit demonſtratum de aliis ponderibus linearum P K & H G, ſequitur planum cum omnibus ponderibus manſurum in æquilibrio fultum a linea L M Q; Centrum ergo gravitatis plani ſic onerati eſt in illa linea; ſed centrum gravitatis etiam eſt in linea C E, quoniam evidens eſt planum etiam futurum in æquilibrio ſi in hac linea ſuſtineatur, Erit ergo centrum gravitatis punctum commune illis duabus lineis L M Q & C E, ſcilicet punctum D in quo ſi planum ſuſtineatur manet in æquilibrio. patet ergo, veritas Theorematis.

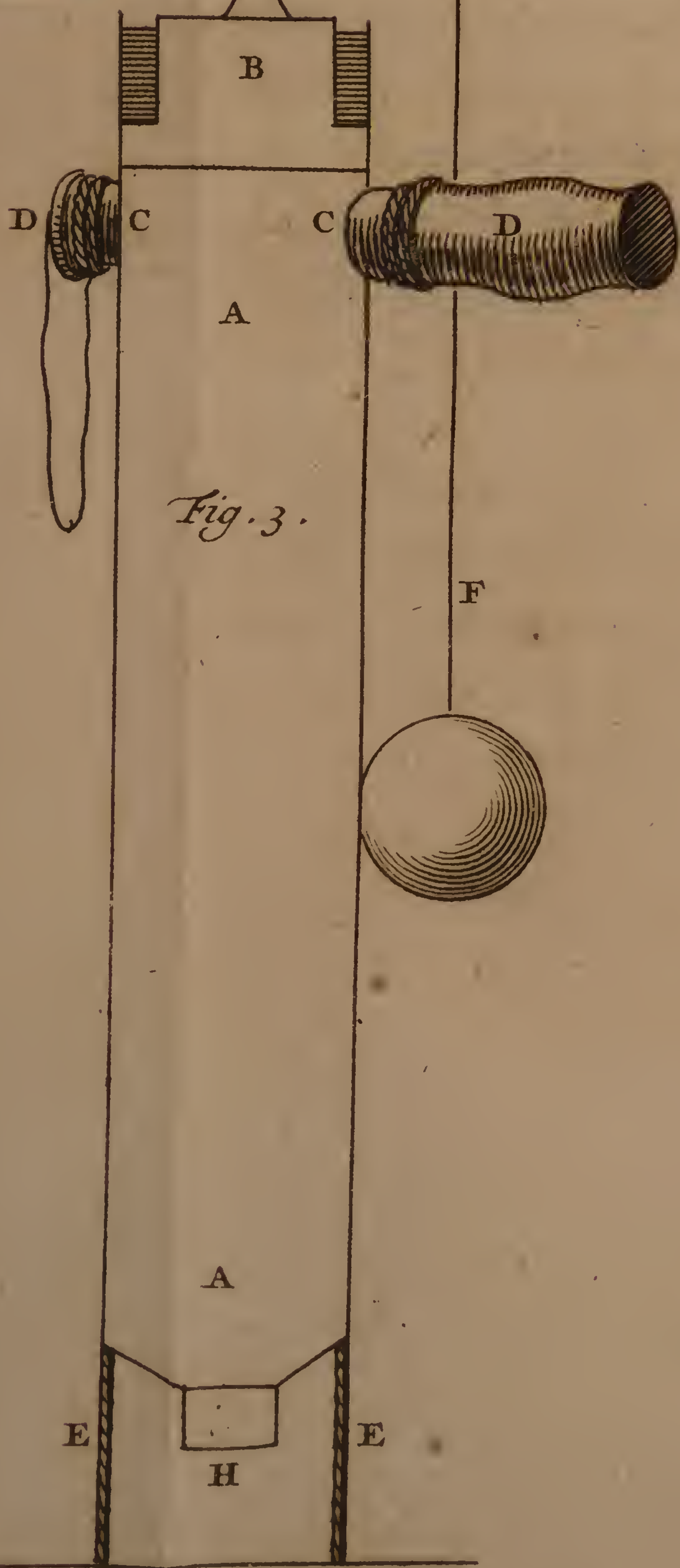

A
E
C
E
E
D
Fig. 1.
B
G

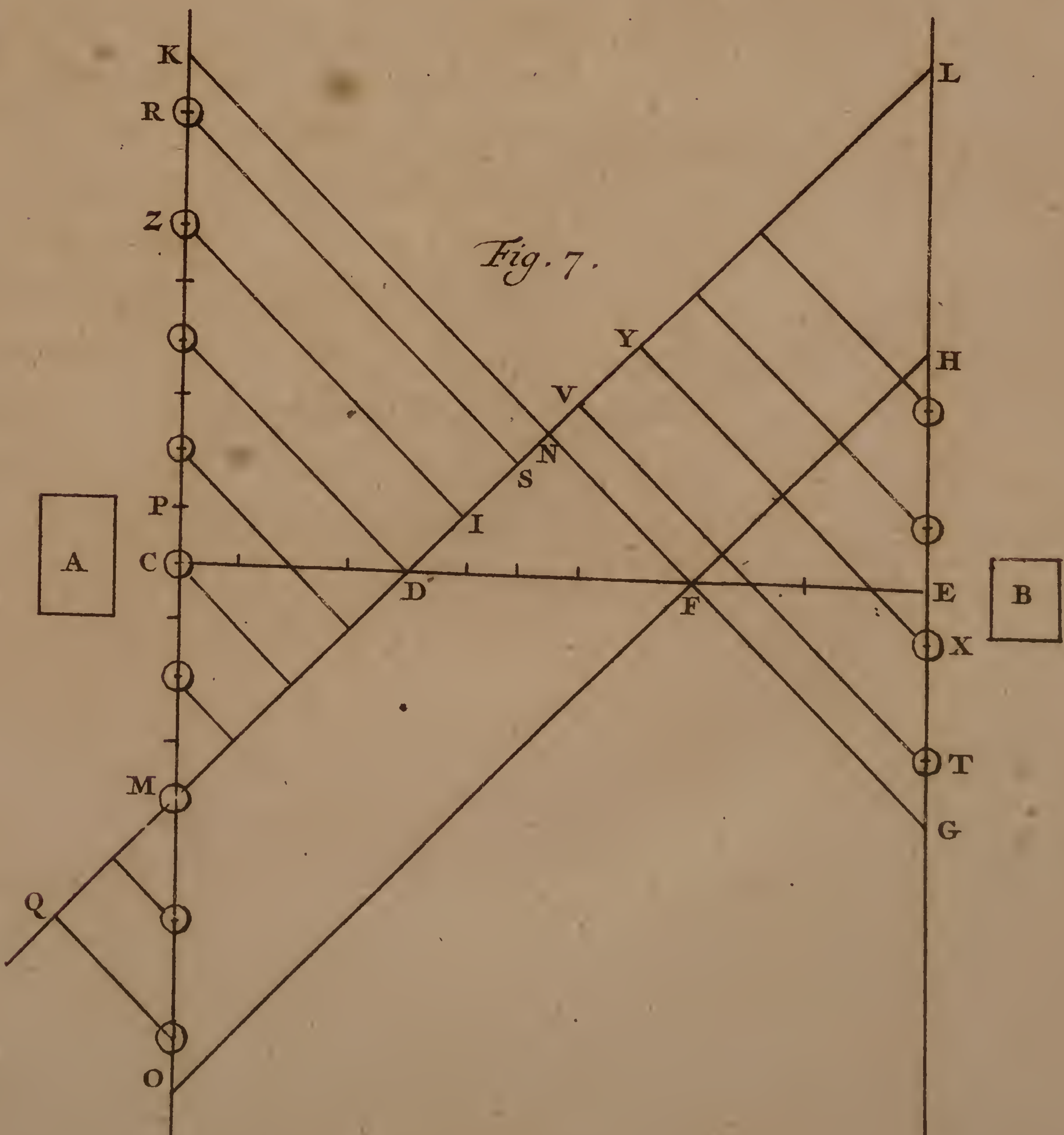

H
N
K
Fig. 2.
M

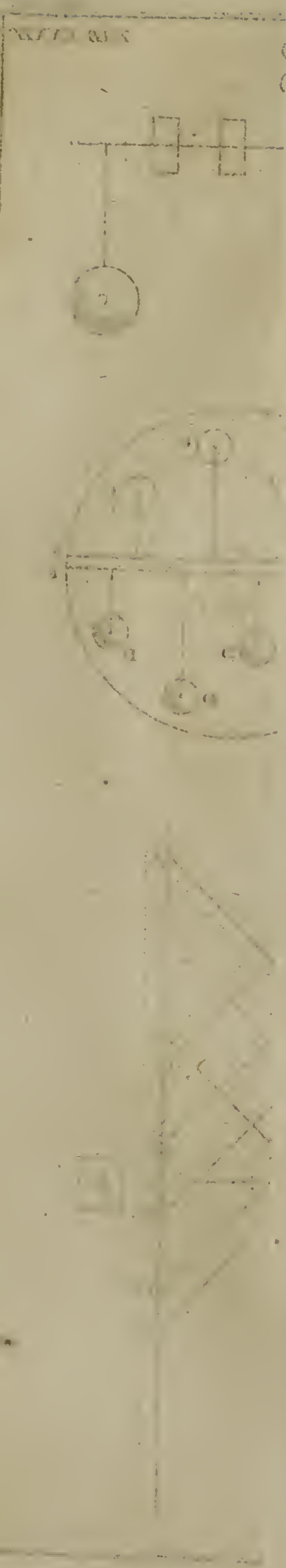

B
A
Fig. 4.
D
C


A
E
Fig. 5.
E
C
H
D
G
B


A
C
C
C
C
H
G
K
E
F
Fig. 6.
D
D
D
D


G
F
F
B
D
C
C
D
A
Fig. 3.
F
A
E
E
H


K
R
L
Z
Fig. 7.
Y
H
V
N
S
P
I
A
C
D
F
E
B
X
T
M
G
Q
O



VII.

De potentiis fila funesve trahentibus.

PROP. I. *Si punctum A trahatur a filis duobus A B, A C angulum B A C facientibus, sintque potentiæ trahentes ut filorum ipsorum A B, A C, longitudines multiplices secundum numeros datos N & O; juncta vero B C dividatur in E, ut sit reciprocè C E ad E B sicut numerus N ad O, & jungatur A E: dico filis A B, A C ita trahentibus, æquipollere filum A E tractum à potentia quæ sit ut longitudo A E multiplex secundum numerum æqualem utrisque N & O.* TAB. XXXIII. Fig. 1.

Producantur enim A B, A C ad F & G, ut sit A F multiplex A B secundùm numerum N, & A G multiplex A C secundùm numerum O; junctæque F G occurrat A E producta in H, & sint B K, C L parallelæ A H. Quia ergo F H ad H K ut F A ad A B, hoc est, ut numerus N ad unitatem; H K vero ad H L ut B E ad E C, hoc est, ut numerus O ad numerum N: erit, in proportione turbata F H ad H L, ut numerus O ad unitatem, hoc est ut G A ad A C, sive ut G H ad H L. Itaque F H ad H L ut G H ad H L, ac proinde F H æqualis H G.

Sit jam A H continuata usque in P, ut sint æquales A H, H P, & jungantur G P, F P: eritque F A G P parallelogrammum, ad cujus diametrum P A ducantur F Q, G R, parallelæ B C. Manifestum igitur est fieri triangula similia & æqualia F P Q, G A R, quorum latera inter se æqualia P Q, R A. Est autem A E ad A R ut A C ad A G, hoc est, ut unitas ad numerum O. Eadem verò A E ad A Q ut A B ad A F, hoc est, ut unitas ad numerum N. Ergo erit A E ad utramque simul A Q, A R, sive A Q, Q P; hoc est, ad A P, ut unitas ad utrumque simul numerum N & O.

Cùm ergo potentiæ fila A B, A C trahentes, sint ut A F, A G, quibus æquipollet attractio per filum A E à potentia quæ sit ut A P, ex theoremate Mechanico satis noto, manifesta est propositi veritas.

PROP. II. *Datis positione quotlibet punctis; sive in eodem plano fuerint, sive non: si à puncto quod eorum commune est gravitatis centrum, ad unum quodque datorum fila extendantur, eaque singula trahantur à potentiis quæ sint inter se ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro.*

TAB. XXXIII. Fig. 2. Sint data puncta A, B, C, D, E, quæ vel in eodem plano vel aliter utcunque collocata intelligantur: attributâ autem singulis æquali gravitate, constat commune eorum gravitatis centrum inveniri hoc modo.

Jungantur nempe duo quælibet datorum punctorum rectâ A B, quâ bifariam sectâ in F, erit hoc centrum gravitatis punctorum A, B. Ducatur deinde ad punctum aliud C recta F C quæ secetur in G, ut sit C G dupla G F; & erit G centrum gravitatis punctorum trium A, B, C. Rursus ducatur ad aliud punctum recta G D, seceturque in H, ut sit D H tripla H G, & fiet H centrum gravitatis punctorum quatuor A, B, C, D.

Similiterque ductâ H E ad punctum quintum E, sectâque in K, ut K E sit quadrupla K H, erit K centrum gravitatis punctorum quinque A, B, C, D, E. Ac simili ratione quotcunque punctorum centrum gravitatis invenire licebit.

Porro extentis filis à puncto K ad A, B, C, D, E, quæ trahantur singula à potentiis quæ sint inter se ut ipsæ longitudines K A, K B, K C, K D, K E: dico fieri æquilibrium manente nodo communi in K. Ducantur enim à centris gravitatis inventis F, G, H, ad centrum gravitatis omnium punctorum K, rectæ F K, G K, H K. Itaque constat filis A K, B K, punctum K trahentibus cum potentiis quæ sint ut longitudines eorum filorum, æquipollere filum F K, tractum à potentia quæ sit ut dupla longitudo F K. Rursus verò duobus his, filo F K trahenti cum potentia quæ sit ut dupla F K, & filo C K trahenti cum potentia quæ sit ut simplex longitudo C K, æquipollet filum G K tractum à potentia quæ sit ut tripla K G per præcedentem: ergo filum G K ita tractum æquipollet filis tribus K A, K B, K G,

K C. Similiter verò duobus his, filo G K tracto à potentia quæ sit ut tripla G K, & filo D K tracto à potentia quæ sit ut simplex longitudo D K, æquipollet filum H K tractum à potentia quæ sit ut quadrupla H K. Ergo hoc æquipollet filis omnibus K A, K B, K C, K D, punctum K uti dictum est trahentibus. Atqui filo K H in directum opponitur filum K E tractum à potentia quæ est ut longitudo K E, id est ut quadrupla K H. Ergo cum filis K E, K H, in partes directè oppositas trahentibus cum potentiis æqualibus, punctum K necessario in locum suum servatum sit, sequitur & filis K A, K B, K C, K D, uti dictum est trahentibus & ex alia parte filo K E nodum restare immotum. Quod erat demonstrandum.

Possunt autem & binorum quorumque punctorum centra gravitatis primò designari, & per hæc deinceps centra gravitatis quaternorum, & per hæc octonorum & sic porro; qua ratione simplicior plerumque efficitur demonstratio, ac præsertim si datorum punctorum numerus fuerit pariter par.

Ut si quatuor data fuerint A, B, C, D; sive in eodem plano, sive non: junctis A B, C D, divisisque bifariam in E & F; ductâque inde F E, quæ rursus bifariam secetur in G; constat G esse centrum gravitatis punctorum A, B, C, D. Quod si jam nodus G trahatur filis G A, G B, G C, G D, à potentiis quæ sint inter se ut hæ ipsæ filorum longitudines; dico fieri æquilibrium. TAB. XXXIII. Fig. 3.

Constat enim filis G A, G B, æquipollere filum G E tractum à potentia quæ sit ut dupla G E; filis verò G C, G D, æquipollere filum G F tractum à potentia quæ sit ut dupla G F. Cum ergo G E, G F æquales sint, unamque lineam rectam efficiant, eodem modo nodus G trahitur, ac si traheretur à potentiis æqualibus per fila G E, G F. Unde immotum manere necesse est.

Constat verò si puncta A, B, C, D non sint in eodem plano, fore G centrum gravitatis pyramidis cujus anguli hæc ipsa quatuor puncta; cum in omni pyramide idem sit centrum

trum gravitatis ipſius ſolidi & quatuor punctorum angularium, uti oſtendere facillimum eſt. Et hinc patet veritas theorematis Robervalliani, *Si à centro gravitatis pyramidis fila tendantur ad quatuor angulos, quæ trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum ipſorum longitudines, fieri æquilibrium manente nodo in dicto gravitatis centro.*

VIII.

Solitio problematis a G G. Leibnitio propoſiti in diario (cui titulus Nouvelles de la Republique des Lettres) *menſis Sept.* 1687.

PROBLEMA.

Detegere lineam juxta quam ſi corpus deſcendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem verſus accedat.

SOLUTIO.

Impoſſibile eſt problema ſi requiratur ut corpus motum in tali linea inchoet a quiete.

TAB. XXXIII. fig. 4. Sed ſi ponamus corpus quandam, quantumvis exiguam, velocitatem habere ex. gr. quam acquirit cadendo ab altitudine A B, quæſito ſatisfacit curva B C, cujus hæc eſt proprietas ut cubus altitudinis B D æqualis ſit quadrato perpendicularis C D ad A B continuatam ducto in $\frac{9}{4}$ A B.

Præter curvam hanc B C, innumeræ aliæ dantur ejuſdem generis, & quæ facile deteguntur, in quibus corpus etiam, temporibus æqualibus, æqualiter, ſed lentius quam per B C, ad Tellurem accedit.

Si B D ſit dupla ipſius B A, tempus deſcenſus per curvæ partem B C aquale erit tempori caſus per. A B.

H. D. Z.

IX.

IX.

Christiani Hugenii, Solutio Problematis de linea in quam flexile se pondere proprio curvat.

Si Catena C V A suspensa sit ex filis F C, E A utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque Angulus inclinationis filorum productorum C G A, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis V B. TAB. XXXIII. Fig. 5.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata L H dividat æqualiter axem B V. Jam si angulus C G A sit 60°, erit inclinanda a puncto A ad axem recta A W, æqualis $\frac{1}{4}$ A B, cui ducta parallela L R, tanget curvam in puncto L. Item si latera G B, B A, A G sint partium 3, 4, 5, erit A W ponenda partium $4\frac{1}{2}$.

2. Invenitur porrò & recta linea catenæ æqualis, vel datæ cuilibet ejus portioni. Semper enim dato angulo C G A, data erit ratio axis B V ad curvam V A. Velut si latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit curva V A tripla axis V B.

3. Item definitur radius curvitatis in vertice V, hoc est, semidiameter circuli maximi, qui per verticem hunc descriptus totus intra curvam cadat. Nam si angulus C G A sit 60°, erit radius curvitatis ipsi axi B V æqualis. Sin vero angulus C G A sit rectus, erit radius curvitatis æqualis curvæ V A.

4. Poterit & circulus æqualis inveniri superficiei conoidis, ex revolutione catenæ circa axem suum. Ita si angulus C G A sit 60°, erit superficies conoidis ex catena C V A genita æqualis circulo, cujus radius possit duplum rectangulum B V G.

5. Inveniuntur etiam puncta quotlibet curvæ K N, cujus evolutione, una cum recta K V, radio curvitatis in verti-

ce, curva V A describitur; atque evolutæ ipsius K N longitudo. Velut si angulus C G A fuerit 60°, erit K N tripla axis B V. Si vero latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit illa $\frac{9}{4}$ axis B V.

6. Præterea spatii N K V A N quadratura datur. Posito enim angulo C G A 60°, erit spatium illud æquale rectangulo ex axe B V, & ea quæ potest triplum quadratum ejusdem B V. Si vero latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit idem spatium æquale septuplo quadrato B V, cum parte octava.

7. Porro puncta quotlibet catenæ inveniri possunt, posita quadratura curvæ alterutrius harum: $xxyy = a^4 - aayy$, vel $xxyy = 4a^4 - x^4$. Vel etiam data distantia centri gravitatis ab axe, in portionibus planis, quas abscindunt rectæ axi parallelæ in curva harum priore. Quadratura autem hujus curvæ pendet a summis secantium arcuum per minima æqualiter crescentium: quæ summæ ex Tabulis sinuum egregio quodam adhibito compendio inveniuntur quamlibet proxime. Hinc ex. gr. inventum, quod si angulus C G A sit rectus, & ponatur axis B V partium 10000; erit B A, 21279, non una minus. Curva autem V A, per superius indicata cognoscitur hic esse partium 24142, non una minus.

In his omnibus non nisi ad casus singulares solutiones problematum dedi, vitandæ prolixitatis studio & quoniam non dubito quin regulas universales Viri docti affatim sint exhibituri. Quod si tamen aliquæ ex nostris requirentur, eas lubenter mittam. Ac jam pridem omnes apud Clarissimum Virum *G. G. Leibnitium* involucro quodam obtectas deposui.

X.

Hugenii Annotationes in librum Parisiis 1689. *editum, de Manuaria Nautica.*

Auctor hujus libri est D. Renaldus (*M. Renau, Ingenieur general de Marine*), summa cura & methodo conscriptus est, &

& auctoris peritia in Geometricis, & analysi in hoc patet; nulla ponuntur principia, quæ vera non fatear, & integra si Theoria inde legitime deducta foret, nihil in opere culpandum esset; hoc tamen deficiente, utile credidi de notabili quem notavi errorem, monere, cum enim spectet ad maximam partem regularum, quæ in hoc libro Nautis præscribuntur posset hos in maximos, & periculosos admodum errores inducere.

Initium faciam memorando quæ in Art. 1. cap. 2. continentur, in quo Auctor navem H B M ponit, in qua linea recta D C Veli positionem repræsentat, quod tanquam plana superficies concipitur, perpendiculariter super istam lineam elevatam; A B est directio venti qui velum propellit; B G est perpendicularis ad D C; G K est perpendicularis ad B K, carinam navis productam; G E A est arcus circuli centro B descripti; B K G est circuli peripheria cujus Diameter est B G. TAB. XXXIII. Fig. 6.

Verissimum est quod Auctor notat, superficiem C D a vento A B propelli juxta lineam B G, ita ut navis per B G ad punctum G tenderet, si nullibi magis quam ad proram aqua resisteret. Addit, navem istam lineam percurrendo directe progredi per B K, & ad latus per K G; sed cum navis majori difficultate aquam lateribus, quam prora secet, non poterit juxta directionem K G per integram hanc lineam progredi, sed deerit pars, quæ sequetur rationem excessus quo difficultas secandi aquam ad latus superat difficultatem qua navis hanc prorâ secat; ex. gr. si difficultas secandi aquam ad latus se habeat ad difficultatem qua prora illam secat ut decem ad unum, si fiat K G ad K L ut 10 ad 1, & ducatur B L, dicit Auctor navem moveri per B L, hancque lineam percurrere eo tempore quo potuisset in G pervenire, si resistentia ab omni parte fuisset æqualis.

Auctorem huc usque nos fuisse secutos sufficiat. Contendo ipsius errorem in eo dari, quod dicat navem pervenire ex B in L *eodem tempore*, quo pervenisset ex B in G. Nam si deviatio nullam esse ponamus, ut ambages removeantur, certissimum est navem, juxta Auctorem, progredi

 ex

ex B in K, eodem tempore, quo pergeret ex B in G, si undequaque aquam eadem facilitate secaret, aut directe per B G, æque ac per B K progrediretur.

In his sic ratiocinatum fuisse auctorem videtur, scilicet, si in motu ex B in G, navis feratur ad latus per K G & directe progrediatur per B K, oportet, ut sublato motu per K G, motus per B K supersit, quo motu linea B K percurrebatur eodem tempore quo B G.

Sed notandum erat, licet motus navis per B G possit concipi tanquam compositus ex motibus per B K, & K G, inde non sequi si in re ipsa tantum supersit motus per B K (sive figura ipsius navis in causa sit, sive hæc cohæreat cum fune infinito B R, perpendiculari ad B M) ventum qui navem ex B in G transtulisset, hanc æquali tempore posse transferre ex B in K. Ut enim determinemus viam juxta B K percursam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad resistentiam quam ex actione aquæ patitur navis.

Constat autem in Mechanicis, vim, qua velum D C, navem pellit per B K, esse ad vim qua idem velum, & in eadem positione respectu venti, illam pelleret per B G, uti B K ad B G: ut Auctor ipse ponit in his, quæ scripsit de impressionibus aquæ in gubernaculum Art. 5. hujus secundi Cap. Sed celeritates quoque essent sicuti B K ad B G; quia ponit Auctor lineas æqualibus temporibus percurri. Vires ergo forent ut celeritates, quod impossibile est, dictisque Auctoris repugnat in 13° Art. primi Cap. ubi dicit, *ut corpus diversis velocitatibus in fluido moveatur, requiri vires in ratione quadratorum celeritatum:* lineæ ergo B K, B G, non percurruntur æquali tempore. Ut autem determinetur, spatium juxta B K percursum continuanda est B K in S, ita ut B S sit media proportionalis inter B K, B G. Tum B S erit spatium, quod eo tempore permeabit navis quo pergeret per B G; si aquam juxta hanc directionem eadem facilitate secaret. nam quadrata celeritatum per

B G,

B G, & B S, & conſequenter etiam aquæ reſiſtentiæ ſunt inter ſe ut B G ad B K; aſt, uti modo oſtendi, virium ratio eſt etiam ut B G ad B K; vires igitur ſunt ut reſiſtentiæ, & etiam ut quadrata velocitatum. Hæ ergo ſunt velocitates, quæ ſunt ut B G ad B S, quas Navis in ambobus motibus acquirere debet ſecundum ipſam Auctoris ſtatim memoratam, nec in dubium revocandam, regulam. Non ergo ut credidit Auctor circumferentia circuli B K G determinat ſpatia a navi permeanda in diverſis carinæ poſitionibus, manente eadem veli C D poſitione reſpectu directionis venti, ſed determinantur hæc ſpatia curvâ B I S G T, cujus puncta eodem modo ac S, facile inveniuntur. Hic autem notandum eſt, ſpatia quæ hac curvâ deteguntur, eo magis ab iis differre, quæ Auctor adhibitâ circumferentiâ B K G determinat, quo angulus quem carina cum venti directione efficit acutior eſt; ita juxta B N navis progredietur per B I, quæ dupla eſt ipſius B N circulo inſcriptæ, ſi B N ſit $\frac{1}{4}$ B G; & tripla ſi B N ſit $\frac{1}{9}$ B G.

Error a me notatus in toto fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur Theoremata quæ de cætero elegantia videntur. Quale eſt inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, carinæ ſitum, quo in adverſum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati; unde Auctor deducit, ponendo quod deviatio nulla ſit, carinæ & veli ſitum in hoc caſu omnium maxime utilem dari, quando angulus quem carina cum vento efficit eſt 60 gr., & angulus venti cum velo 30 gr., quod a vero abeſt; nam per Regulam, quam veram novi detego, quando venti & carinæ angulus eſt graduum 60, navem celerius moveri, ideoque in adverſum venti magis progredi, ſi angulus veli & venti 38 gr. 23′. fiat, quam ſi angulus hicce foret 30 graduum. Regula qua detego veli ſitum, ut navis omnium celerrime moveatur, ubi carinæ cum vento angulus datus eſt, talis eſt $x^4 = aaxx + \frac{1}{3}ppxx - \frac{4}{9}aapp$. ſcilicet, ſi x deſignat ſinum O Q anguli veli cum vento, a radius B A, p ſinus F P anguli carinæ cum vento. Et congruit hæc regula cum illa quam

D. Fatio antea invenit, cum aliis pulcherrimis circa hanc materiam, ut percepi in tabula quadam, in qua quorundam istorum angulorum rationes designarat. Duas veras radices continet æquatio hæc inservientes duobus casibus, in quibus carina cum venti linea eundem angulum efficit, utpote, quando navis vento secundo aut adverso utitur.

Cæterum quin vera sit nostra regula non poterit, D. Renaldus dubitare, cum per eam angulus gubernaculi cum carina, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem determinavit in capite 7°. Quod ipsius inventum certe utilissimum est. Ponendo enim $p = a$, id est ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, nostrâ regulâ habetur $x = \sqrt{\frac{2}{3} a a}$, quem ille detexit sinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod sic necessario sese habere facile patet.

Licet Theoria hæc post a me indicatam correctionem difficilior evadat, quam in tractatu D^ni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi posse, qua & navis & veli situs determinarentur, ut in adversum venti omnium maxime progrediatur, sed computatio nimium longa foret, quare hanc nunc non aggredior. Quibus addendum navis deviationem in hac computatione non considerari, ex qua consideratione maxima daretur difficultas. Quia non modo cum auctore attendendum est ad relationem inter resistentias quas patitur navis proram versus & ad latus, sed etiam ad actionem venti in ipsam navem, præcipue in hujus latus; ita ut ex unica observatione quæ ad deviationem spectant non possent deduci.

X I.

Responsum D^ni Renaldi ad Dominum Hugenium.

D^nus Hugenius hæc ponit, *licet motus navis per B G possit concipi tanquam compositus ex motibus per B K & K G, inde non sequi, si re ipsa tantum supersit motus per B K, ventum, qui navem ex B in G transtulisset, hanc æquali tempore posse trans-*

transferre ex B in K. Et primo in eo mihi videtur falli. Nam ut navis possit ferri ex B in G tempore determinato, necesse est ut reapse celeritatem habeat, quâ eodem tempore secundum determinationem B K, lineam B K, & secundum determinationem K G, lineam K G possit percurrere. Et ne hoc in dubium vocari possit, concipiamus navim pelli secundum determinationem B K, vi quâ certo tempore ex B possit pervenire in K; concipiamus eandem simul pelli secundum K G, vi quâ eodem tempore possit percurrere lineam K G: cum duæ hæ vires nec sibi contrarientur nec etiam concurrant (est enim B K perpendicularis ipsi K G) necesse est ut harum unicuique navis ex toto obsecundet; & per consequens celeritas, quam singulis momentis habebit secundum B K, erit ad celeritatem, quam iisdem momentis habebit, secundum K G, ut B K ad K G; & ita navis utrique vi satisfaciens, movebitur per B G, & tempore determinato perveniet in G; Et ideo si in effectu ipsi relinquatur solus motus per B K, vis quæcunque, quâ pelleretur ex B in G, illam tempore æquali pellet ex B in K. Inutilem enim reddendo illam impressionis partem, quæ requiritur ut eodem tempore navis percurrat K G, neque augetur, ut diximus, neque minuitur celeritas per B K. Fateor, si angulus B K G esset acutus, vim peculiarem quâ pelleretur navis secundum K G, aliquid detracturam celeritati, quam haberet secundum B K utpote sibi contrariæ; & contra, si angulus B K G foret obtusus, eandem celeritatem utpote cum altera concurrentem, esse augendam; sed cum angulus B K G rectus sit, vis illa celeritatem navis secundum B K neque auget, neque minuit.

Addit Dnus Hugenius; *Ut enim determinemus viam juxta B K percursam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad resistentiam quam ex actione aquæ patitur navis.* Statim ostendi relationes celeritatum in variis determinationibus sibi invicem perpendicularibus, sufficere ad detegendam viam, quam navis est secutura; nec per consequens ad id requiri relationem virium, nec resistentiarum; sed cum dictæ celeritates à viribus dependeant, idem ex

rela-

relatione virium facile probabo.

Demonſtravi Articulo 13° Cap. 1. Theoriæ manuariæ nauticæ, de quo Articulo D^{nus} Hugenius mecum conſentit, vires navem propellentes eſſe inter ſe ut quadrata velocitatum; & propterea vis requiſita, ut navis certo tempore ſecundum determinationem B K conficiat B K, eſt ad vim, quâ ſecundum determinationem K G conficiat K G, ut quadratum B K, ad quadratum K G; unde ſequitur, navem, ſi ſecundum duas illas determinationes ſimul pelleretur, habituram vim duabus illis viribus æqualem; cum ſcilicet neutra neutri quicquam vel addat vel detrahat; per conſequens vis illa exprimetur per quadratum ipſius B G, quod æquale eſt quadratis B K & K G; & ita navis habebit celeritatem ex illa vi ortam, id eſt, dicto tempore quantitatem B G peragrabit. Et propterea, ſi navis pelleretur ſecundum B G, vi quæ exprimitur per quadratam B G, perveniret in G eodem tempore, quo perveniret in K, ſi pelleretur ſecundum B K, vi quam exprimit quadratum B K.

Pergit D^{nus} Hugenius hoc modo; *Conſtat autem in mechanicis, vim, quâ velum D C pellit navem per B K, eſſe ad vim, quâ idem velum, & in eadem poſitione reſpectu venti, navem pelleret per B G, ut B K ad B G.* Non ego fateor id ex regulis Mechanices ſequi; è contra certum eſt, virium illarum relationem inter ſe eſſe ut quadratum B K ad quadratum B G, non vero ut B K ad B G; & ut omne hic dubium eximatur, concipiamus aërem ſecundum lineam A B duplo citius moveri uno tempore quam altero. Quando duplo citius movebitur quadruplo fortius in velum impinget, quoniam unaquæque particula duplo fortius impingit propter velocitatem duplam, propter quam etiam duplo plures particulæ eodem tempore impingunt. Quare ſi velocitas ſit dupla, & maſſa itidem dupla, vis ſeu potentia eſt quadrupla. Si tripla foret velocitas, unaquæque particula triplo fortius impingeret, quia tripla eſſet velocitas; & ſimul quia tripla eſſet velocitas, triplo plures par-

particulæ ſimul impingerent; unde triplâ exiſtente velocitate, maſſâ etidem triplâ, potentia aut vis erit noncupla; ex quo patet maſſam augeri in eadem ratione, qua velocitas augetur; & cum unaquæque pars etiam fortius impingat in ratione auctæ velocitatis, potentia aut vis venti in velum, eſt in ratione duplicata celeritatum venti, id eſt, in ratione quadratorum velocitatum venti in velum. Agnoſcit hocce principium Cl. Hugenius; reſtat ergo tantum, ut illud applicemus.

Prima applicatio oſtendet, quare vis venti in velum, cum ventus velo perpendicularis eſt, ſeſe habeat ad vim ejuſdem venti in velum, quando illud inclinatum vento opponitur, ut quadratum radii ad quadratum ſinûs anguli incidentiæ; aut, quod idem eſt, cur vires ejuſdem venti in vela varia inclinatione ipſi obtenſa, ſint inter ſe in ratione quadratorum ſinuum angulorum incidentiæ, quod demonſtravi Articulis 7. 8. & 9. Cap. 1., & quod etiam hoc modo nunc demonſtro. Probatum dedi in Theoria Manuariæ Nauticæ, Artic. 6. Cap. 1. corpus motum ab A in B non occurrere ſuperficiei C D niſi ſecundum determinationem ſuam A V, ponendo ſcilicet A V perpendicularem ipſi D C productæ, & in illam ſuperficiem nullam vim exſerere niſi ſecundum hanc determinationem; quod agnoſcit Dnus Hugenius. Hoc poſito, ventus A B in velum non agit, niſi ſecundum hanc determinationem, id eſt, cùm velocitate A V. Si velum C D vento A B perpendiculare eſſet, ventus in velum ageret velocitate A B; & per conſequens ex principio quod ſtatim adſtruxi, vis cum qua ventus in velum ageret, ſi vento eſſet perpendiculare, eſt ad vim venti in velum D, quod inclinatè vento obtenditur, ut quadratum A B ad quadratum A V, id eſt, ut quadratum radii ad quadratum ſinûs anguli incidentiæ.

Secunda applicatio inſervit ſolvendæ quæſtioni, de qua lis eſt inter Dnum Hugenium & me, id eſt oſtendit, quod, velo conſtituto in ſitu C D, & navi in ſitu B K, vis, qua ventus ope veli, navim ſecundum B G propellit, ſit ad vim, qua idem ventus, ope ejuſdem veli navim propellit ſecun-

dum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K, & non quemadmodum ſuſtinet Hugenius, ut B G ad B K.

Quod ut pateat, concipiamus ventum in velum impingere cum velocitate B G; quoniam in illud impingit ſolummodo per motum, qui dirigitur ſecundum B G ſpectandus eſt ventus, tanquam latus ex B in G velocitate B G: ſed quando illa velocitate fertur ex B in G, fertur velocitate B K ſecundum determinationem B K, & velocitate K G ſecundum determinationem K G; quare ex iis quæ ſuperius a me dicta ſunt, vis qua navis pellitur ſecundum B G eſt ad vim qua pellitur ſecundum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K; & ad vim, qua pellitur ſecundum K G, ut quadratum B G ad quadratum K G. Obſervandum autem eſt, eandem vim venti in velum, id eſt, vim totalem ſecundum B G, quam vim exprimit quadratum B G, diviſam eſſe ſecundum B K, & K G, in duas partes, quarum ſumma vim totalem adæquat; & illa vis, potentia, ſeu motus, quibus tribus una eademque res ſignificatur nominibus, nullum vel augmentum vel imminutionem accipit, ex noſtris motum conſiderandi modis, qui motus non in ſola corporum velocitate conſiſtit, ſed ex eorundem maſſis quoque conſtituitur. Ergo potentia, vis, ſeu motus, eſt productum quadrati celeritatis per maſſam. Quare potentia ex duabus aliis potentiis conflata, iis æqualis eſt, dummodo unius determinatio determinationi alterius ſit perpendicularis, quia eo in caſu duæ illæ potentiæ, nec quicquam addere, nec detrahere quicquam altera alteri, poſſunt, duabus determinationibus, uti diximus, nihil oppoſiti habentibus. Inde fit ut potentia ſecundum B K eadem manere poſſit, idemque per conſequens illius effectus, licet in infinitum augeatur ſeu minuatur potentia ſecundum K G. Eo in caſu ſola potentia totalis B G mutationem patietur, quia ſemper æqualis erit ſummæ potentiarum, ex quibus producta fuerit.

Ex omnibus, quæ a me nunc dicta ſunt, ſequitur, navem H B M, ſi pellatur ſecundum B G ope veli D C, & ſi

ſi velocitas, quâ movetur ad latus, ſit ad velocitatem quâ directè progreditur, ut G K ad L K, ſequitur, inquam, navem juxta B L proceſſuram, & in L perventuram eodem tempore, quo perveniſſet in G, ſi ab omni parte aquas ſecaret eadem facilitate, quâ ſecat has à parte proræ; & ſi, quemadmodum poſuit D^nus Hugenius, navis fune B R infinite longo, & ipſi B K perpendiculari adſtringeretur, ad tollendum omnem motum ſecundum determinationem K G, ſequeretur etiam perventuram navim ad punctum K eodem tempore quo perveniſſet ad punctum G; quod erat in quæſtione, & quod erat demonſtrandum.

Si vera foret mechanices regula, quam memorat D^nus Hugenius, ſcilicet vim cum qua velum D C navim propellit ſecundum B K eſſe ad vim, cum qua idem velum navem ſecundum B G propellit, ut B K ad B G, non ſolum navis non perveniret in K eodem tempore, quo perveniſſet in G, poſitis circumſtantiis, de quibus ſupra, ſed & navis aquam æqualiter ab omni parte ſecans, & a velo D C, ſecundum B G ipſi perpendicularem propulſa, non ferretur juxta lineam B G: nam ex eadem mechanices regula, vis, qua ferretur navis juxta B K ope veli, foret ad vim qua ferretur ſecundum K G, ut B K ad K G, & velocitates navis eſſent inter ſe ut radices virium. Ergo velocitates quæ ex illis viribus orirentur, ſcilicet velocitas quam ſingulis momentis acquiſiviſſet navis in motu juxta B K, eſſet ad velocitatem quam iiſdem momentis haberet ex motu juxta K G, ut radix B K ad radicem K G. Sed ut navis moveatur ſecundum B G, quando inæquales ſunt velocitates inter ſe, quales hic a nobis ponuntur, requiritur, ut ſint inter ſe ſingulis momentis, ut B K ad K G, & non ut eorundem radices. Ergo navis non ferretur juxta B G, quod eſt abſurdum; nam cum vis totalis, quæ navem impellit, ſit juxta B G, ponendo navem ab omni parte æqualiter aquam ſecare, non poteſt non illam lineam ſequi.

Ita pergit Cl. Hugenius, *Error à me notatus in toto*

 fere

fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur theoremata, quæ de cætero elegantia videntur. Quale est inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, Carinæ situm, quo in adversum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati. Unde Auctor deducit &c.

Siquidem, quem errorem credidit Dnus Hugenius, errorem non esse ostenderim, intacta remanent tractatus mei theoremata.

Addit; *Cæterum, quin vera sit nostra regula non poterit dubitare Dnus Renaldus; cum per eam angulus gubernaculi, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem Cap. 7. determinavit. Quod certe ipsius inventum utilissimum est. Ponendo enim p = a, id est ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, nostrâ regula habetur* $x = \sqrt{\frac{2}{3}aa}$, *quem ille detexit sinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod sic necessario sese habere facile patet.*

Et hic à Dno Hugenio dissentire cogor, & ab ipso meo consequenter tractatu, in quo error datur maximus, statim à me, detectâ prius ingenue ejusdem causâ, ostendendus: Composueram primo librum meum, pro vero ponendo principium falsum, à P. Pardies, art. 118. scientiæ virium motricium prolatum; præter quod nil continet de navis motu tractatus illius, & quod nec ipsum ulli rei applicatur; imo nullam auctor viam aperit solvendi vel unam, quæ spectat theoriam Manuariæ Nauticæ, propositionem. Cum jam sub prælo sudarent ultimæ libri I. paginæ; principii memorati falsitatem animadverti, & quoniam per omnes tractatûs propositiones dispersum, falsas reddebat resolutiones omnes, totam editionem suppressi. Solidiori postea fundamento nixus easdem denuo solvi, præloque subjeci, hæ sunt quæ in lucem sunt editæ. Sed aliis distentus negotiis, vocem *vis*, loco *velocitatis*, quæ erat substituenda, in demonstratione Art. 5. Cap. 2. incogitanter reliqui; quod Dnus Hugenius non attendit. Fateor me, in Art. 6. Cap. 1. promiscue vocibus *virium* & *velocitatum* uti, sed unius tantum corporis in vacuo motum ibi

ibi confidero, & in eo cafu velocitas & vis eandem femper relationem habent. Capitis autem 7. errorem, poft alteram tantum libri mei editionem animadverti, neque tunc illum corrigere per negotia mihi licuit. Falfitatem vero ita demonftro.

Centro B defcribatur circulus A D R E C, & repræfentet linea A B carinam navis, B R vero carinam productam. Supra B R, tanquam diametrum defcribatur femicirculus B G R, & fimiliter fupra A B femicirculus A V B. Sit B D certus gubernaculi fitus, & B C gubernaculum productum; B E perpendicularis fupra A B; B G & A V perpendiculares fupra D C; & G H perpendicularis ad B E. Ponendo alium gubernaculi fitum, qualis eft B *d* producta in *c*; ducantur in iisdem circumftantiis lineæ B *g*, A *u*, & *g h*. Si navis antrorfum moveatur fecundum lineam B A, anguli A B C, & A B *c* æquales angulis G B E, & *g* B E, funt anguli incidentiæ aquæ in gubernaculum. Unde fequitur, aquam, pofito gubernaculo in fitu B D, impingi fecundum determinationem & cum velocitate A V, & per confequens cum vi, quam exprimit quadratum ipfius A V. Et quoniam velocitas navis fefe habet tantum ut radix ipfius vis, propter aquæ refiftentiam, propellitur navis fecundum determinationem B G, velocitate quæ exprimitur per B G, quia B G eft æqualis & parallela ipfi A V. Sed quando propellitur navis fecundum B G velocitate B G, propellitur fecundum B E velocitate B H. Si gubernaculum foret in alio fitu B *d*, iisdem ratiociniis probaretur, navem pellendam fore fecundum B E velocitate B *h*. Sed quando majori velocitate navis pellitur fecundum B E, citius etiam convertitur. Quare fi B G, quæ perpendicularis eft ad gubernaculi fitum, fecet femicirculum B G R bifariam, id eft, fi angulus G B E, æqualis angulo incidentiæ A B C, fit 45. graduum, G H perpendicularis ipfi B E, erit tangens femicirculi. Ergo G H quæ exprimit celeritatem, quâ navis pellitur fecundum B E, eft omnium maxima. Nam fi gubernaculum conftituatur in alio fitu, ut in B *d*, tunc B *g* ipfi perpendicularis, fecabit TAB. XXXIII. Fig. 7.

 femi-

ſemicirculum in g, unde ſi ducatur perpendicularis $g\ h$, erit illa propior puncto B, quam ipſa G h, & navis pelletur ſecundum B E velocitate B h, quæ minor erit quam B H. Quare, ut navis citiſſime convertatur, neceſſe eſt ut *vectis* gubernaculi B C cum carinâ navis faciat angulum 45. graduum, non autem, ſicut Cap. VII. Theoriæ dicitur, angulum graduum circiter 55.

Concludit Cl. Hugenius hiſce verbis, *licet theoria hæc poſt indicatam à me correctionem difficilior evadat, quam in tractatu Dni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi poſſe, qua & navis & veli ſitus determinarentur, ut in adverſum venti omnium maxime progrediatur, ſed computatio nimium longa foret quare hanc nunc non aggredior.*

TAB. XXXIII. Fig. 8. In meo certe tractatu facillima foret determinatio ſitûs navis velique, non tantum ſi in adverſum venti omnium maxime ſit progrediendum, ſed & conveniens cuicunque viæ inſtituendæ, ſi deviatio navis à calculo ſecluderetur; quod ut pateat, ſit linea venti A B, & ſit data via B K, cum vento conſtituens angulum quemcunque A B K. Ut inveniatur, quo veli ſitu, navis illa viâ citiſſime poſſit progredi, ſi ſcilicet nulla ſit deviatio; ſumatur B R tanquam diameter, & centro M deſcribatur ſemicirculus B G V; ab eodem puncto M ducatur M G viæ B K parallela; a puncto B ad punctum G ducatur B G, & tandem ducatur D B C perpendicularis ipſi B G. Dico D C repræſentare veli ſitum, quo per viam B K navis omnium citiſſime poſſit progredi. Ad id probandum, ducatur G K perpendicularis ipſi B K. Ex omnibus quæ ſuperius dicta ſunt, patet ventum A B propellere navem ope veli D C, ſecundum B G velocitate B G, eodem tempore quo eandem propelleret ſecundum B K velocitate B K. Et quoniam G K eſt perpendicularis ipſi B K, erit itidem perpendicularis ipſi M G. Ergo G K eſt tangens ſemicirculi. Ergo quotcunque ducantur perpendiculares ex aliis circumferentiæ ſemicirculi punctis, ſupra B K, cadent omnes inter B & K. Ergo navis celeritas in veli ſitu D C erit omnium maxima. Addo, velum D C ſecare bifariam an-

angulum A B K, qui eſt angulus venti cum viâ. Ad quod demonſtrandum ducatur M N perpendicularis ipſi B G. ſecat M N angulum B M G angulo A B K æqualem, bifariam; & quoniam M N eſt parallela ipſi D C, angulus B M N dimidius anguli B M G, qui æqualis eſt angulo A B K, æqualis eſt angulo A B C, qui ipſe per conſequens æqualis eſt dimidio angulo A B K. Unde ſequitur, veli ſitum ſemper bifariam debere ſecare angulum venti & viæ, & cum agitur de progrediendo in adverſum venti, debere illum cum velo conſtituere angulum 30. graduum, proramque itidem cum velo angulum 30. grad.; quia, ut demonſtratum fuit in Theoria Manuariæ Nauticæ, quocunque in ſitu reſpectu venti diſponatur velum, neceſſe eſt ut ejus complementum prora bifariam ſecet. Et exinde apparet, quocunque in ſitu conſtituatur prora, quæ ſemper cum via congruit; quia ponitur navem non deviare, neceſſe eſſe ut angulum quem cum prora, ventus conſtituit, velum bifariam ſecet. Unde ſequitur angulum rectum debere à prora & velo in tres partes æquales ſecari, id eſt, ventum cum velo 30. gradus conſtituere, proram itidem cum velo 30. gradus, & cum vento per conſequens 60.

XII.

Exceptio Dni Hugenii ad Reſponſum Dni Renaldi.

Mihi evidens videbatur illud quod in obſervationibus de errore primario, qui reperitur in tractatu de manuaria nautica Dni Renaldi, propoſueram, & cenſuerunt viri in re Mathematicâ verſatiſſimi, argumentum meum omni exceptione majus eſſe; idcirco neque credideram, velle ipſum quidpiam reſpondere, quo ſuam confirmaret Theoriam; interim ex iis, quæ in lucem edidit, apparet eum minime de ſuo errore mecum ſentire; & quandoquidem rationibus utitur, e quibus haud ita facile ſe expedire poſſent illi, qui non ſatis hæcce omnia excuſſerunt, obſtrictum me credidi ad demonſtrandum ma-

majori evidentiâ, quam antea, ejus Theoriam ſuſtineri non poſſe, niſi principia mechanices, jam dudum ſtabilita, quorumque veritatem negare nec auderet, nec vellet, evertantur.

Ne inutiliter protraham controverſiam noſtram reſpondendo argumentis quæ Dus Renaldus mihi objicit, oſtendam tantum illum, ut jam obſervaram, erraſſe in propoſitione, qua nititur tota ejus Theoria, deinde paucis indicabo, quid huic errori anſam dederit.

TAB. XXXIII. Fig. 9. Ut oſtendam, quinam ſit quæſtionis ſtatus, hic maximam partem eorum, quæ noſtras figuras ſpectant, repeto, ſcil; H M eſt navis carina; C D velum; A B linea venti velum inflantis; B G eſt perpendicularis ad C D; G K perpendicularis ad B K, quæ indicat carinam prolongatam; continuo G B ad Z, & M H ad X.

Dus. Renaldus in Theoria cap. II. Art. 1. dicit, ſi ponatur navem undique eâdem, qua puppis, facilitate aquam findere, illam ita a vento propelli, ut progreſſura ſit per rectam B G, quod eſt verum; ſed ſi juxta ſitum carinæ navis tantum progredi queat in recta B K, vel ſi funis B R perpendicularis ad B K, & cujus longitudo cenſetur infinita, eam cogat inſiſtere in via B K, contendit, velo & vento iiſdem ac antea manentibus, navem percurſuram ſpatium B K, eodem tempore quo percurriſſet B G; ego autem defendo, quod percurreret ſpatium B S, medium proportionale inter B K & B G; Et hic eſt controverſiæ noſtræ ſtatus.

In probatione, quam affert in reſponſione ſuâ, loco venti A B oblique cadentis in velum C D, ſubſtituit ventum Z B, qui in id perpendiculariter agit; quod poteſt, & minime controverſiam mutat, quum certum ſit, quod quocunque ſenſu ventus in velum C D cadat, conetur navem propellere per viam B G perpendicularem ad C D; neque ullius uſus ſunt, quas habet D. Renaldus, diverſas conſiderationes de motu venti. Ratiocinando dein invenit, quod vis, quâ navis pellitur a vento ſecundum B G ope veli, ſit ad vim, qua pellitur ab eodem vento ope ejuſdem veli ſecundum B K, ut

ut quadratum B G ad quadratum B K, non vero ut B G ad B K, quod ego contendo, & inde tota res pendet.

Ut determinemus cujus ſententia vera ſit, concipiamus planum, in quo noſtra figura exiſtit, ita ad Horizontem erectum, ut linea B G ad eundem ſit perpendicularis, & ſit R B X funis affixus in R, ad quem in B alligatum & ſuſpenſum ſit pondus Q: Ponamus ulterius portionem B X perpendicularem ad R B a manu retineri in X; clarum eſt, id exacte repræſentare caſum navis, de quo eſt quæſtio; nam loco venti, qui impingendo in velum C D propellat navim ſecundum B G, hic habemus pondus Q, quod trahit punctum B juxta B G; & funis B R, qui cenſetur infinitæ longitudinis, & impedit, quò minus navis aliam plagam versùs, quam B K poſſit progredi, hic eundem edit effectum reſpectu nodi B.

Ut ergo vis, qua ventus propellit navem ſecundum B G, eſt ad vim, qua hanc propellit ſecundum B K, ita eſt pondus Q ad gravitatem, quæ agit in manum quæ in X cohibet, quò minus nodus B moveatur verſus B K; illa enim gravitas æquipollet vi, qua nodus ſecundum B K trahitur. Cum autem G K parallela ſit ipſi B R, certum eſt ex notiſſimis Mechanicæ regulis, quod pondus Q ſit ad id quod retinet chordam B X, vel ad gravitatem quæ in X agit in manum ut B G ad B K. Vis ergo, qua navim propellit ventus ſecundum B G, eſt ad vim, qua propulſa eſt verſus B K, ut B G ad B K non vero, ut illarum linearum quadrata, ut Dnus Renaldus contendit.

Ponamus porro, navem H M, quæ undas eàdem undique facilitate ſecat, propelli per ventum Z B vel A B (perinde enim eſt) quo naviget certo tempore per B G, velo exiſtente in C D, & determinandum eſſe, quantum progreſſura ſit ſecundum B K æquali tempore eodem vento, eodemque veli ſitu. Cum celeritates navis in duabus illis viis tales debeant eſſe, ut reſiſtentiæ, quas infert ipſi aqua, ſint ut vires, quibus propellitur (nam in eo caſu ſolo motu æquabili progreditur), & cum reſiſtentiæ

ſint ut quadrata celeritatum, ideo requiritur ut quadrata celeritatum ſint ut vires, id eſt ut G B ad B K; & conſequenter ut velocitates ſint ut G B ad B S; quandoquidem quadrata G B & B S ſunt ut lineæ G B, B K per conſtructionem. Probavi ergo ex ordinariis Mechanices principiis, id, quod in obſervatione mea propoſueram.

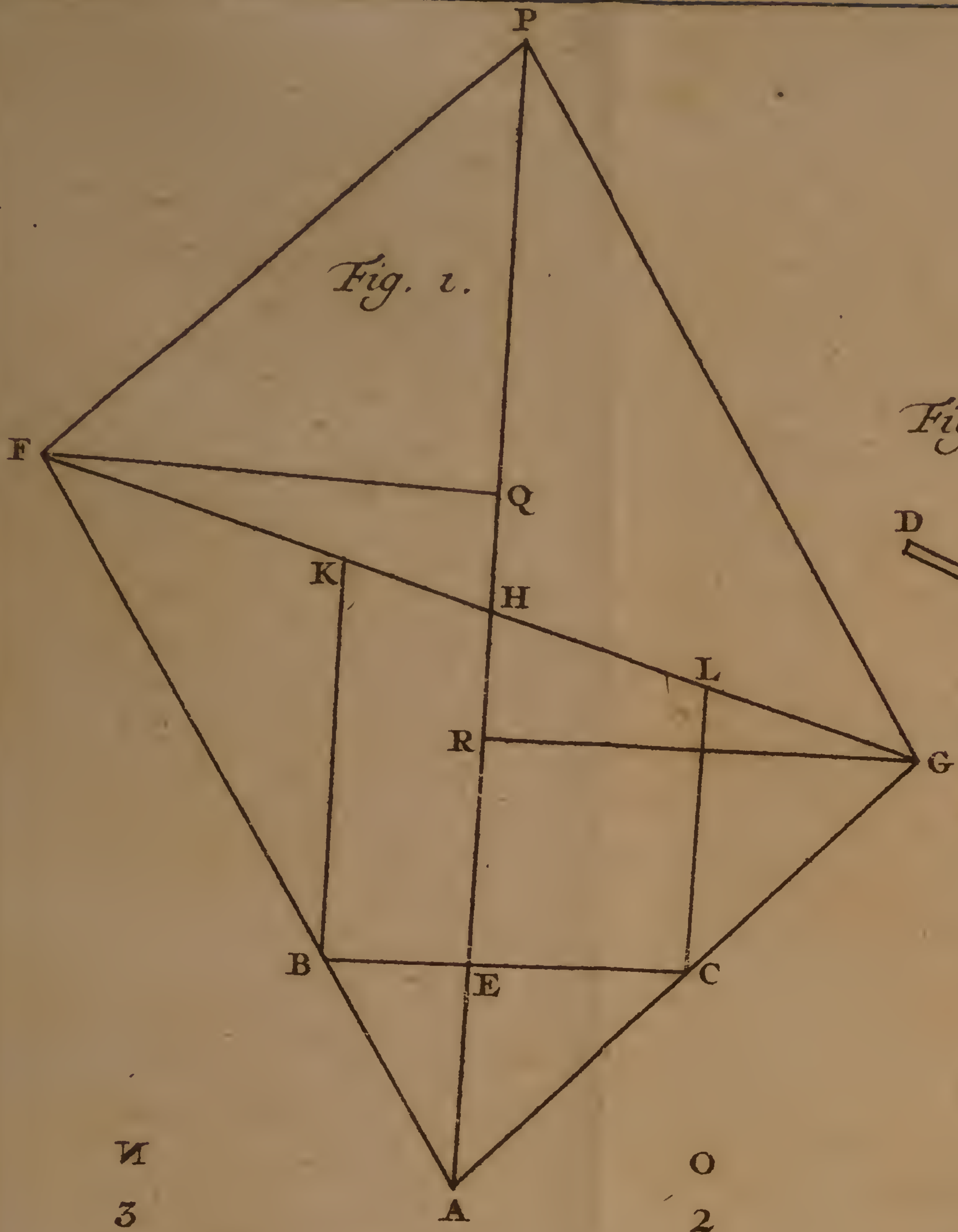
Superfluum foret alia argumenta D^ni Renaldi examinare, quibus vult hanc eandem, quam refutavi propoſitionem, confirmare; ſolummodo indicabo originem erroris, qui in iis occurrit, præſertim naſci ex eo, quod in Articulo 7. Cap. 1. Theoriæ ſuæ concludat, *vires relativas materiæ fluidæ ad ſuperficies diverſimode inclinatas eſſe inter ſe, ut quadrata ſinuum angulorum incidentiæ;* debuiſſet addere *ad ſuperficies æquales diverſimode inclinatas;* cujus vocis *æquales* paulo ante in eodem Articulo pag. 7. quoque non meminerat; quod ſi ſuppleatur, tum demonſtratio optime congruit cum concluſione cumque veris principiis P: Pardies in Art. 118. Tractatus de *Viribus moventibus.* Pater hic tantum in eodem illo Articulo deceptus fuit, quod ignorarit vel ſaltem non recordatus fuerit, reſiſtentias aquæ in corpus eſſe ut quadrata velocitatum ejus corporis; ideo enim p. 225. facit *a f ad a u in duplicatâ ratione b o ad m p* cum ſimpliciter facere debuerit *a f ad a u, ut b o ad m p.*

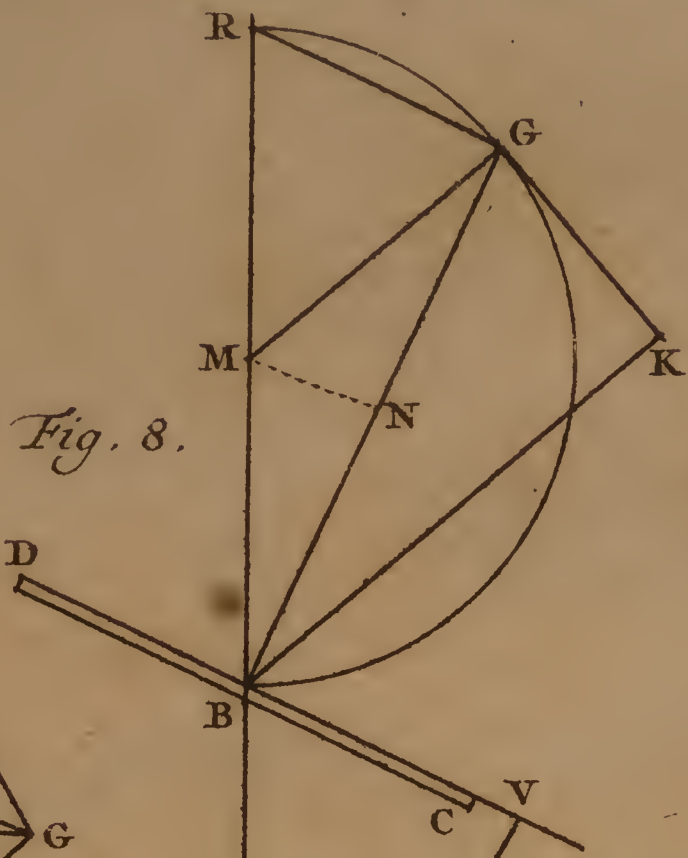
Quod attinet ad utiliſſimum Gubernaculi ſitum, D^nus Renaldus ſe ipſum nullo jure culpat, & dum quæ primo determinaverat corrigere conatur, male ratiocinatur; in reſponſione p. 303, nam tantum determinandum eſt, in quonam Gubernaculi ſitu aqua id propulſura ſit maximâ vi, juxta perpendicularem ad carinam; unde neceſſario ſequetur maxima puppis velocitas juxta illam perpendicularem. Errat etiam, quum vult, p. 25 Theoriæ ſuæ de Manuaria Nautica, legi *velocitas* loco *vis.*

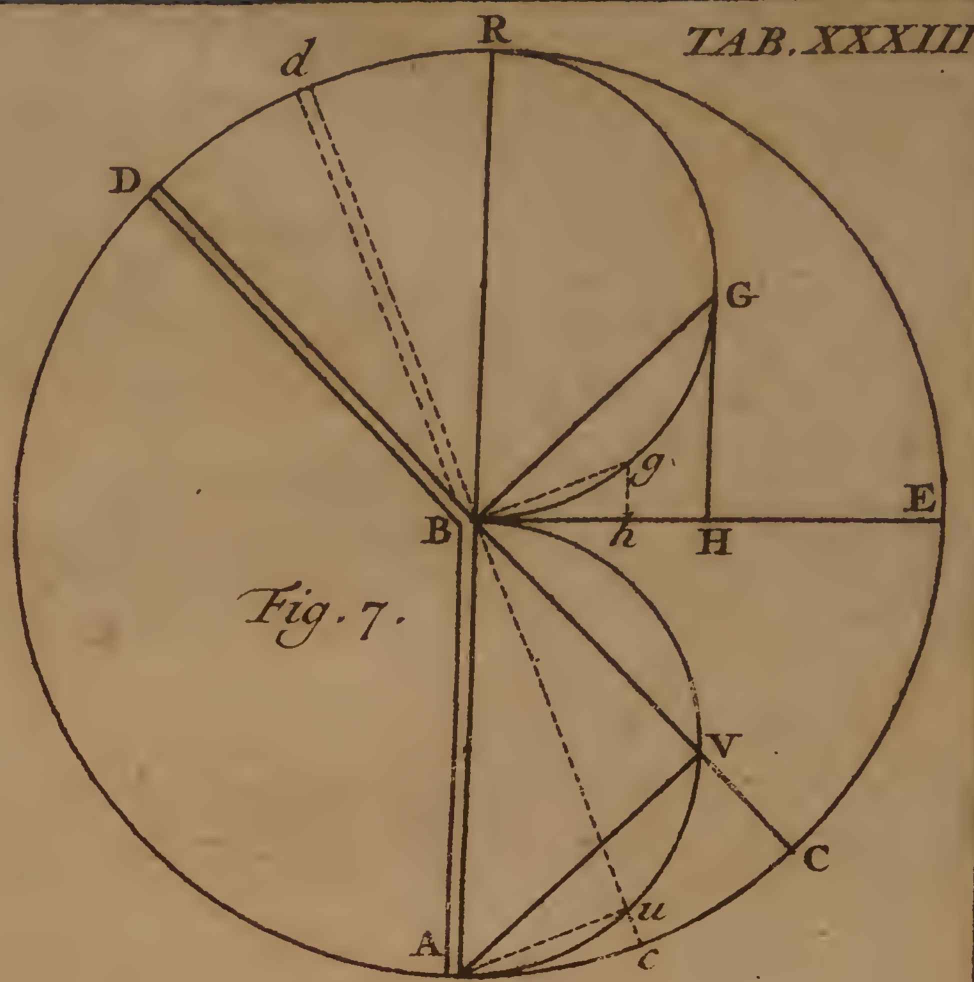
Quod ſupereſt, obſervo, totam hanc Theoriam, ut ediderat, veram fore ſi reſiſtentiæ aquæ eſſent ut velocitates navis, ſunt autem ut quadrata illarum velocitatum.

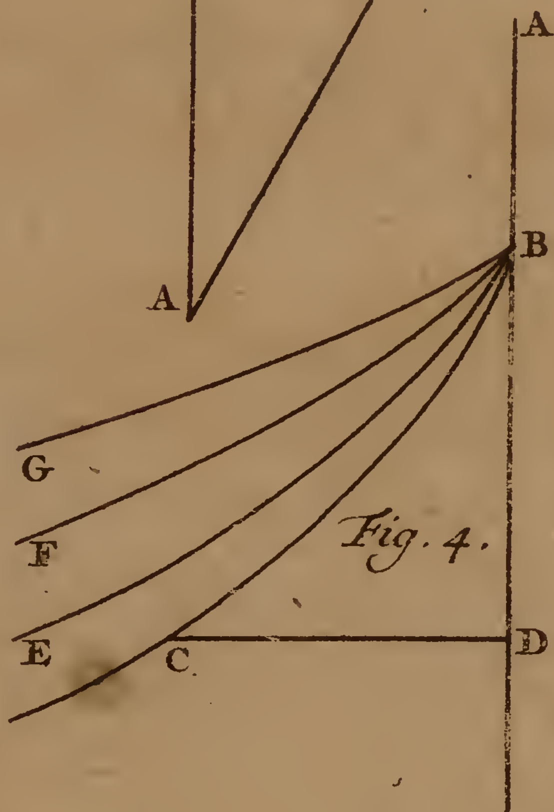
F I N I S.

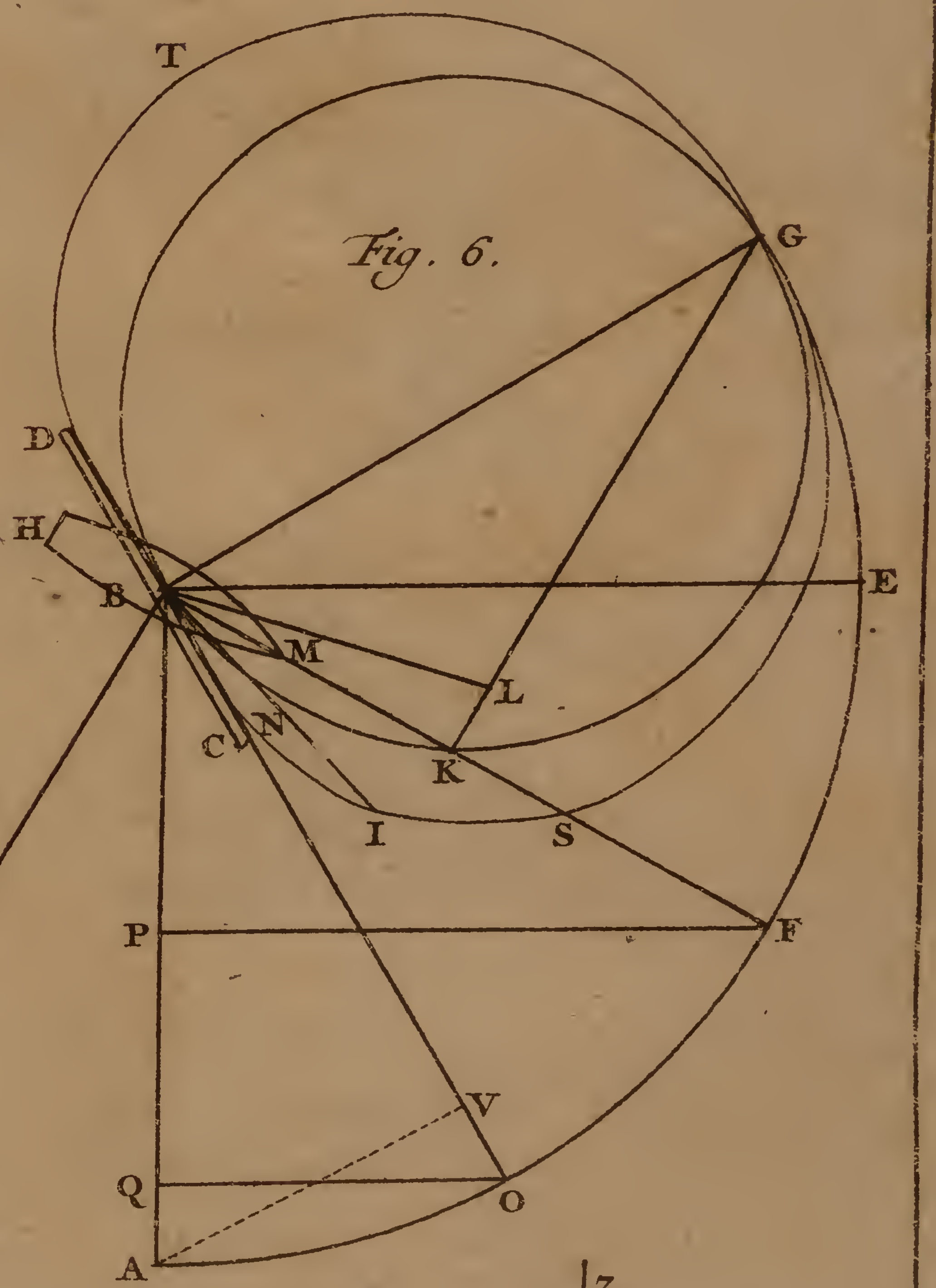
TAB. XXXIII.

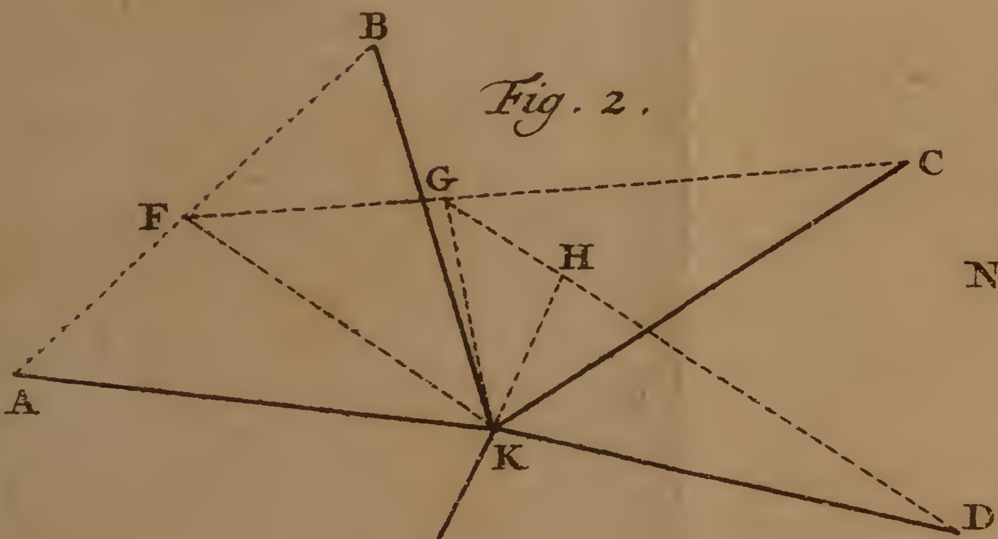

Fig. 1.
P
F
Q
K
H
L
R
G
B
E
C
A
3
2

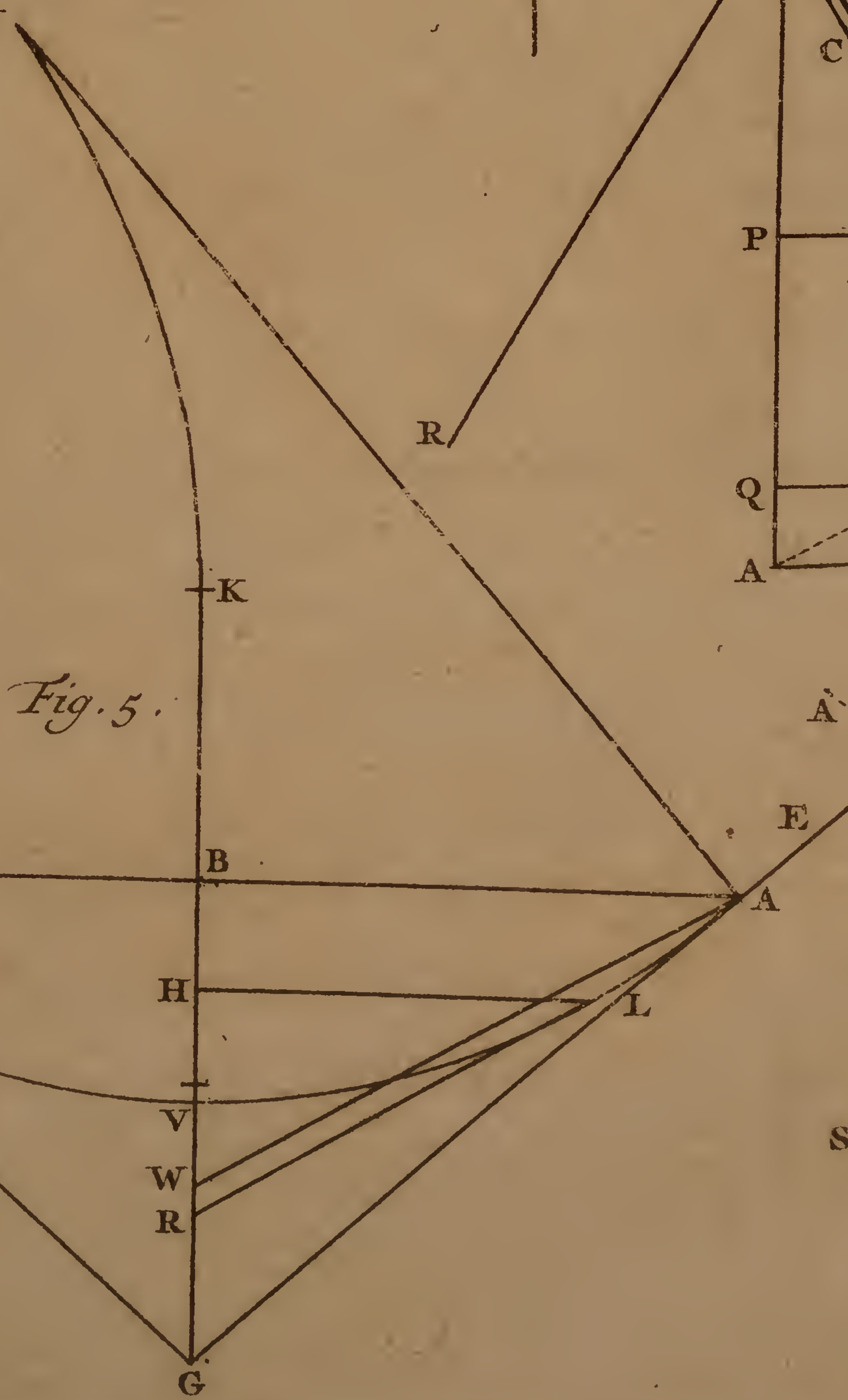

Fig. 8.
R
G
M
N
K
D
B
C
V
A

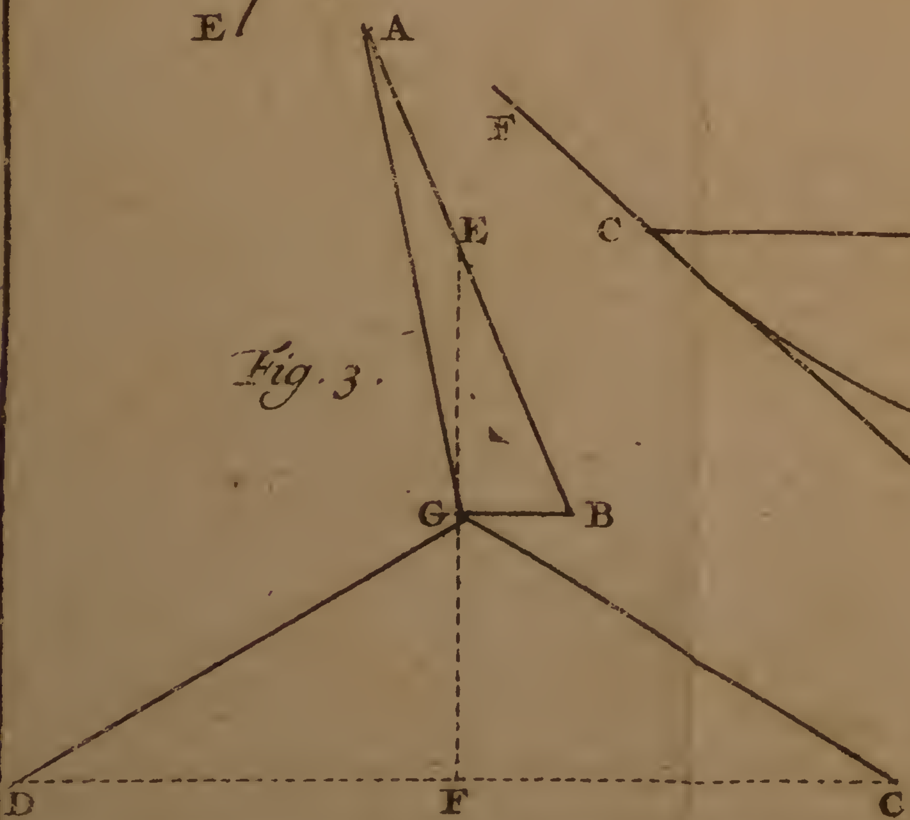

Fig. 7.
d
R
D
G
g
B
h
H
E
V
C
A
u
c

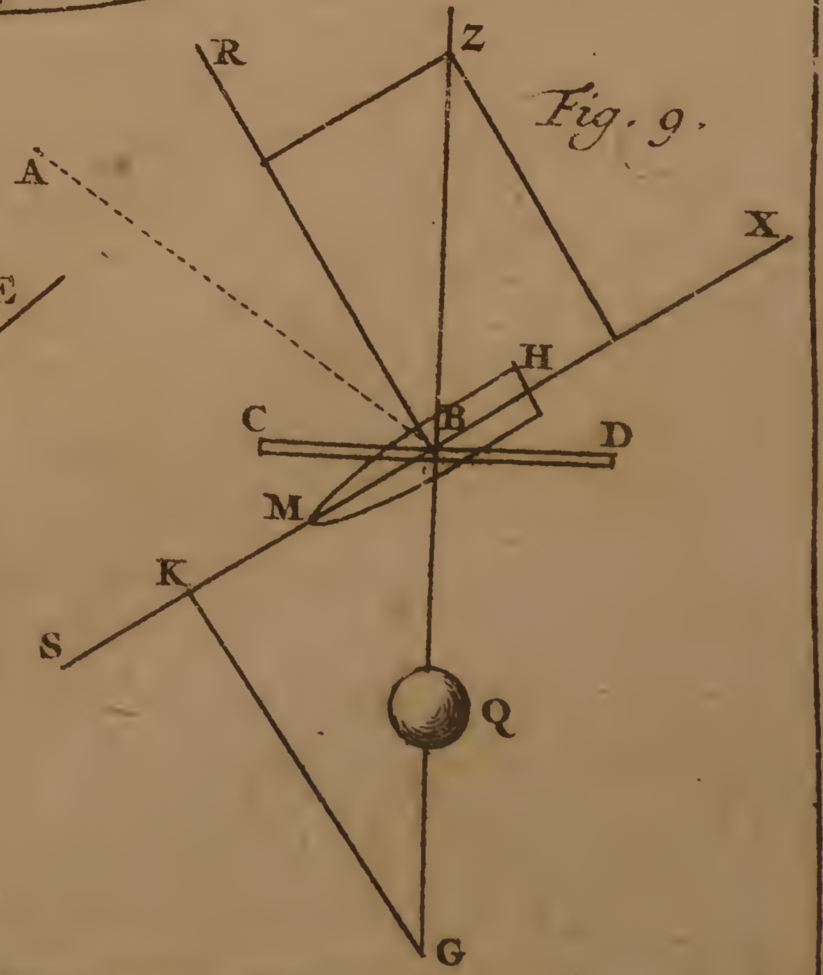

Fig. 4.
A
B
G
F
E
C
D


Fig. 6.
T
G
D
H
B
E
M
L
C
N
K
I
S
P
F
R
V
Q
O
A


Fig. 2.
B
G
C
F
H
A
K
D
E


Fig. 5.
N
K
F
E
C
B
A
H
L
V
W
R
G


Fig. 3.
A
E
G
B
D
F
C


Fig. 9.
R
Z
A
X
H
C
B
D
M
K
S
Q
G

CHRISTIANI HUGENII

OPERA

GEOMETRICA.

Tomus Secundus.

Tomi secundi contenta.

CHRISTIANI HUGENII
A ZULICHEM,
Dum viveret Zelhemi Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN SECUNDUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

THEOREMATA

DE

QUADRATURA

HYPERBOLES, ELLIPSIS

ET CIRCULI,

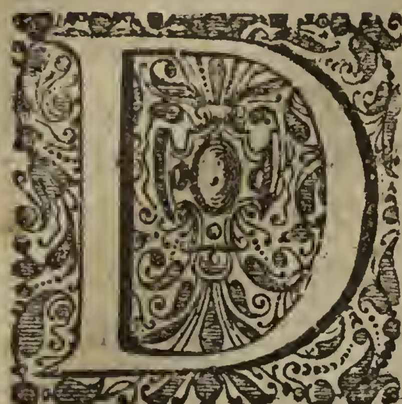
EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO:

Quibus subjuncta est

E'ξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno cIↃ IↃCXLVII.

AD LECTOREM.



E Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, si tamen ita vocari queat, quod æternâ lege definitum constitutumque, quale nunc est, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic stellas in cœlo novas, quæ superioribus sæculis incognitæ, nostrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetustate cedit, sed nos novitatem singulis tribuimus, prout quæque sese nobis offerunt fiuntque manifesta. Itaque & inscripti trigoni Parabola ante Archimedem sesquitertia fuisse dicenda est; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus semper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini, de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuisse constet vel determinata. Damus autem non isti, quam retulimus, Archimedeæ similem determinationem, neque vel ipsa rerum natura, post tot subtilissimorum hominum delusos conatus, spem reliquisse videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas sumpsimus, expectandi: Verùm id præstitisse profitemur, quod in ipsa

quoque inscriptione expressum est, & paulò quid amplius, si Lectoris æqui judicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipses & Circulos ad quadrata redigere non finis est horum Theorematum, sed consequentia duntaxat; eoque nomine potissimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inscripta triangula rationem demonstrant. Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ destinatâ planè, sed impeditâ difficilique; quâ deinde breviorem exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipsin & Circulum quoque pertineret, commodumque obvenit constans illa in cognatis figuris mirabilisque convenientia. Quæ quidem universim in omnibus hisce quo minus locum habeat, sola facit Propositionum novissima, supernumeraria illa quasi, atque ultra propositum adscita, cujusque hoc solum mihi tribui par est, quod ex præcedentibus ipsam non ineleganti ratione comprobari posse ostendi. Dudum enim hîc nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonstratum dedit acutissimus Geometra I. Della Faille, felix, meâ quidem sententiâ, quod ante alios perspexerit, quomodo à sectorum gravitatis centro Quadratura dependeret: cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruisse agnoscam, non æquè gavisus sum detectâ in reliquis hujus segmentis simili connexione,

ne,

ne, quàm cum eandem in Hyperboles portionibus obſervaſſem, illudque inveniſſem de quo tantus Vir non potuit non & ipſe cogitaſſe. Raros alioqui ſemper hæc figura, ſi cum Circulo conferatur, ſui contemplatores nacta eſt; ejuſque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia ſint inſpecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari neceſſe ſit; cujuſmodi ſunt exacta perimetri longitudo, Helicis Archimedeæ contingens, Quadratricis Dinoſtrati terminus, vel tangens quoque ejuſdem Quadratricis ad terminum alterum, (ſicut aliquando me demonſtraſſe memini) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel ſub ulla conditione Hyperbole cum ſpatio rectis comprehenſo lineis comparari poſſit. Noſtrâ ſanè ætate, paucіſque abhinc annis Vir Clariſſ. D. Gregorius à S. Vincentio, de quo mihi deinceps dicendum reſtat, exquiſitâ prorſus novâque methodo utramque Quadraturam aggreſſus eſt, & credidit eâdem ſe propemodum demonſtratione abſolviſſe. At ego cum ampliſſima quæ de hiſce volumina emiſit, perſcriptis jam Theorematis meis, diligentius evolverem, (certus, ſi quod intenderat obtineret, ſaltem gravitatis me centra exhibiturum,) intellexi tandem, majori ſubtilitate quàm ſucceſſu rem arduam tentatam fuiſſe, ratione quoque repertâ quâ id clariſſime oſtendi poſſe confido.

Et

Et quando inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui ſibi hanc provinciam delegerit, ac proinde fieri poſſet ut longa porro dubitatio maneret circa demonſtrationes, quas certiſſimas eſſe oportet; arbitratus ſum me facturum quod & in publicum utile eſſet & à propoſiti argumenti ratione non alienum, ſi ſimul hîc prodire ſinerem, quæ novam in re obſcura lucem allatura videbantur. Nulla autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctoritatem acceſſi, ſed cauſæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offenſam proponi poſſe. Majori quoque fiduciâ, poſteaquam is ſeſe ipſum per literas, quarum aliquod inter nos commercium eſt, auctorem hortatoremque candidè præbuit, ut ſiqua commentatus eſſem, ea cum univerſis communicarem. Ingenuitatem hanc inſignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & ſpero modeſtâ reprehenſione ſatis me declaraſſe, quanti æſtimem Doctiſſ. Viro haberi amicus. Cujus invicem ſumma, quâ me uſque adhuc excepit, humanitas facit ne quid aliud exſpectem, niſi ut vel moderatè & ſine ulla acerbitate ad mea reſpondeat, ſi quid iis reponendum eſſe duxerit, vel rationibus evidentiſſimis perſuaſus, æquè lubens noſtra quam alterius poſthac opera veriora ſentiat & amplectatur.

CHRI-



CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.
THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS,
ET CIRCULI,
EX DATO
PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

THEOREMA I.



Ortioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori, circumscribi potest figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quæ portionem excedat spatio quod minus sit quovis dato.



ATA sit portio ABC, cujus diameter BD. Super basin AC constituatur parallelogrammum AE, latera duo habens diametro BD parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo continuè in duo æqualia secto, relinquetur tandem pars quæ TAB. XXXIV. Fig. 1.

minor erit dato spatio; sit ea parallelogrammum B F, & dividatur basis A C in partes æquales ipsi D F, punctis G, H, K &c. atque inde ducantur ad sectionem rectæ G L, H M, K N &c. diametro B D parallelæ, & perficiantur parallelogramma D O, G P, H Q, K R &c. Dico figuram ex omnibus istis parallelogrammis compositam (quæ imposterum ordinatè circumscripta vocabitur) superare portionem A B C minori quàm datum sit spatio.

Jungantur enim A N, N M, M L, L B, B S, &c. eritque hac ratione inscripta quoque portioni figura quædam rectilinea; majorque erit excessus figuræ circumscriptæ quæ ex parallelogrammis composita est, super inscriptam, quàm supra portionem A B C. Excessus autem circumscriptæ super inscriptam ex triangulis constat, quórum quæ sunt ab una diametri parte, ut A R N, N Q M, M P L, L O B, æquantur dimidio parallelogrammi O D vel B F, quia singulorum bases basi D F æquales sunt, & omnium simul altitudo, parallelogrammi B F altitudini. Eâdem ratione triangula quæ sunt ab altera diametri parte, æquantur dimidio parallelogrammi B F: Ergo omnia simul triangula sive dictus excessus æqualis est parallelogrammo B F, eóque minor spatio dato. Sed eodem excessu adhuc minor erat excessus figuræ circumscriptæ supra portionem A B C: igitur hic excessus dato spatio multo minor est. Et apparet fieri posse quod proponebatur.

Theorema II.

Datâ portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majore, & dato triangulo qui basin habeat basi portionis æqualem; potest utrique figura circumscribi ex parallelogrammis quorum sit omnium eadem latitudo, ita ut uterque simul excessus quo figuræ circumscriptæ portionem & triangulum superant, sit minor spatio quovis dato.

Da-

Data sit portio A B C & triangulus D E F, basibus A C, D F æqualibus; & portionis diameter sit B G, in triangulo verò ducta à vertice in mediam basin linea E H. Sint autem utræque B G, E H vel ad bases rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet B G ad E H, in eandem dividatur spatium datum; sintque partes K & L. Circumscribatur jam sicut antea portioni A B C figura ordinatè, quæ portionem superet excessu minore quàm sit spatium K. Et triangulo D E F circumscribatur figura quæ totidem parallelogrammis constet, quot sunt in figura portioni A B C circumscripta. TAB. XXXIV. Fig. 2.

Quoniam igitur bases portionis & trianguli æquales sunt; apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallelogrammum B M sit ad E R ut B G ad E H, id est ut K ad L, sitque B M minus quam K [1], erit quoque E R minus quam L [2]. Verùm omnia triangula quibus constat excessus figuræ circumscriptæ supra triangulum D E F, æqualia sunt parallelogrammo E R, ergo minor est idem excessus spatio L. Sed & excessus quo figura circumscripta portionem A B C superat, minor est spatio K. Ergo uterque simul excessus minor erit spatio K L dato. Et constat fieri posse, quod proponebatur.

[1] Ex constr.
[2] 14. 5. Elem.

THEOREMA III.

SI portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori, circumscribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portionis diametro.

Sit portio quælibet istarum A B C, diameter ejus B D; & circumscribatur ei ut supra figura ordinatè. Ostendendum est ejus figuræ centrum gravitatis fore in B D diametro. Ducantur lineæ H K, N R, P S, conjungentes suprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portionis æqualiter utrinque distant. TAB. XXXIV. Fig. 3.

Quoniam igitur F H, L K sunt diametro B D parallelæ, suntque D F, D L æquales, oportet lineam H K, quæ duas F H, L K conjungit, à diametro B D bifariam secari; quare eadem H K parallela erit basi A C [1], & E H K G recta linea. Itaque E C parallelogrammum est; cujus opposita latera quum bifariam dividat diameter B D, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis [2]. Eâdem ratione parallelogramma erunt H M, N O, P Q, & singulorum centra gravitatis in linea B D. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis compositæ centrum gravitatis in eadem B D reperiri necesse est. Ista autem figura eadem est quæ portioni ordinatè fuerat circumscripta. Ergo figuræ portioni ordinatè circumscriptæ centrum gravitatis constat esse in B D portionis diametro. Quod erat ostendendum.

[1] 15. lib. 2. Con.

[2] 9. lib. 1. Arch. de Æquipond.

THEOREMA IV.

Portionis hyperboles, ellipsis & circuli, centrum gravitatis est in portionis diametro.

TAB. XXXIV. Fig. 4. Esto portio hyperboles, vel ellipsis vel circuli dimidiâ primum figurâ non major, A B C; diameter ejus B D. Ostendendum est, in B D reperiri portionis A B C gravitatis centrum.

Si enim fieri potest, sit extra diametrum in E, & ducatur E H diametro B D parallela. Dividendo itaque D C continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam D H; sit ea D F, & circumscribatur portioni figura ordinatè ex parallelogrammis quorum bases æquales sint lineæ D F, & jungantur B A, B C. Figuræ itaque portioni circumscriptæ centrum gravitatis est in B D portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur E K, producaturque, & occurrat ei A L parallela B D. Quia autem portio major est triangulo A B C; & excessus quo figura circumscripta portionem superat, minor parallelogrammo B F, uti supra demonstratum fuit *; erit major ratio portionis A B C ad dictum excessum, quàm trianguli A B C ad B F parallelogrammum, id est quàm

* Theor. 1.

A D

A D ad D F; multoque major quam A D ad D H, vel quàm L K ad K E. Sit itaque M K ad K E ſicut portio A B C ad exceſſum quo ipſa ſuperatur à figura ordinatè circumſcripta. Itaque cum K ſit centrum grav. figuræ portioni circumſcriptæ, & E centrum grav. ipſius portionis; erit M centrum gravitatis omnium ſpatiorum quæ eundem exceſſum conſtituunt [1]. Quod eſſe non poteſt; Nam ſi per M linea ducatur diametro B D parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus ſpatia. Manifeſtum eſt igitur, portionis A B C centrum grav. eſſe in B D portionis diametro.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.

Eſto nunc A B C portio ellipſis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Abſolvatur figura, & producatur B D uſque dum ſectioni occurrat in E; erit igitur portionis A E C diameter E D, & B D E diameter totius figuræ. Et quoniam in B D E diametro eſt figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonſtratis conſtabit, ſi in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipſi A C ſit parallela,) & in eadem centr. gravitatis A E C portionis minoris, ſicut modò oſtenſum fuit; erit quoque centr. gravitatis portionis reliquæ A B C in B D E [2]; quod erat oſtendendum.

TAB. XXXIV. Fig. 5.

[2] 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

* LEMMA.

Eſto linea E B, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ E S, B P, & inſuper alia P D. Dico id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Eſt enim rectangulum E D B æquale iſtis duobus, rectangulo E D P & rectangulo ſub E D, P B: quorum ultimum ſuperat rectangulum E P B rectangulo D P B. Igitur exceſſus rectanguli E D B ſupra rectangulum E P B æqualis eſt duobus iſtis, rectangulo E D P, & D P B. Sed rectangulum E D P addito rectangulo D P B, id eſt rectangulo ſub E S, D P, æquale fit rectangulo S D P. Manifeſtum eſt igitur, exceſſum rectanguli E D B ſupra E P B, æquari rectangulo S D P.

TAB. XXXIV. Fig. 6.

† Eſto rurſus linea E B, cui ad utrumque terminum auferan-

TAB. XXXIV. Fig. 7.

* Idem hoc aliter demonſtratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24.
† Vide eundem, lib. 7. Prop. 57.

rantur duæ æquales E S, B P, & insuper alia P D. Dico iterum, id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Rectangulum enim E D B æquale est istis duobus, rectangulo E D P, & rectangulo sub E D, P B; horum autem E D P rursus æquale est duobus, rectangulo nimirum S D P, & ei quod continetur sub E S, D P, sive rectangulo D P B. Igitur rectangulum E D B istis tribus æquale est rectangulis, S D P, D P B, & rectangulo sub E D, P B; horum vero duo postrema æquantur rectangulo E P B; ergo rectangulum E D B æquale est duobus, rectangulo nimirum S D P & E P B, unde apparet excessum rectanguli E D B supra rectangulum E P B æquari rectangulo S D P.

THEOREMA V.

Datâ portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; si ad diametrum constituatur triangulus hujusmodi, qui verticem habeat in centro figuræ, & basin portionis basi æqualem & parallelam; eam verò quæ deinceps à vertice ad mediam basin pertingit tantam, ut possit ipsa rectangulum comprehensum lineis, quæ inter portionis basin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. Erit magnitudinis, quæ ex portione & præscripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quod est trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.

TAB. XXXV. Fig. 1. 2. 3. Data sit portio hyberboles, vel ellipsis vel circuli portio dimidiâ figurâ non major, A B C. Diameter ejus sit B D, & figuræ diameter B E, in cujus medio centrum figuræ F. Et sumatur F G quæ possit rectangulum B D E, ductâque K G H æquali & parallelâ basi A C, quæque ad G bifariam

riam dividatur, jungantur K F, F H. * Demonstrandum est, quòd magnitudinis compositæ ex portione A B C & triangulo K F H, centrum gravitatis est punctum F.

Si non est in F, sit si fieri potest primùm ab ea parte puncti F quæ est versùs A B C portionem, atque esto punctum L; constat autem futurum in recta B D G, quum in hac sint utraque centra gravitatis portionis & trianguli K F H. Jungantur A B, B C, & quam rationem habet G F ad F L, eam habeat magnitudo composita ex triangulis A B C, K F H ad spatium quoddam M; & circumscribantur portioni & triangulo K F H figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium sit eadem latitudo, ita ut duo simul excessus quibus istæ figuræ superant portionem A B C & triangulum K F H, minores sint spatio M [1]. Igitur duorum simul triangulorum A B C, K F H ad dictos duos excessus sive residua major erit ratio quàm ad M, id est quàm G F ad F L; ac proinde longè major ratio portionis A B C unà cum K F H triangulo ad eadem residua quam G F ad F L. Sit itaque N F ad F L, sicut portio A B C simul cum triangulo K F H ad duo residua, & cadet terminus N ultra trianguli basin K H. Jam per F ducatur O Ξ parallela basi A C vel K H; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo K F H æqualiter à diametro distabunt, ut sunt R Q, Σ T, sint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta Z Λ Δ Ω, secans lineam O Ξ in Υ; & ducatur R P basi A C parallela, abscissæque ad verticem lineæ P B, sumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, E S.

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim sunt applicatæ C D & R P, erit ut rectangulum B D E ad rectangulum B P E, ita quadratum C D ad R P quadratum [2]; verùm ut C D ad R P, hoc est, ut H G ad Ψ G, ita est H F ad Σ F, & ita Z Υ ad Λ Υ; igitur ut C D quadratum ad quadratum R P, id est ut rectangulum B D E ad B P E, ita

[1] Theor. 2. h.

[2] 21. lib. 1. Con.

* Notatu dignum quod K F, F H in hyperbole sunt asymptoti.

ita est quadratum Z Υ ad Λ Υ quadratum. Quare & per conversionem rationis, sicut rectangulum B D E ad differentiam rectangulorum B D E, B P E, ita quadratum Z Υ ad differentiam quadratorum Z Υ, Λ Υ. Est autem differentia rectangulorum B D E, B P E, æqualis rectangulo S D P, sicut lemmate præmisso demonstratum est; differentia verò quadratorum Z Υ, Λ Υ, æqualis quadrato Z Λ & duobus
[3] 4. lib. 2. Elem. rectangulis Z Λ Υ [3], sive quod idem est, rectangulis Z Λ X, Z Λ Υ bis sumptis, hoc est, duplo rectangulo sub Z Λ, X Υ. Itaque sicut est rectangulum B D E ad rectangulum S D P, ita quadratum Z Υ ad duplum rectangulum sub X Υ, Z Λ. quare cum rectangulum B D E quadrato F G
[4] Ex constr. æquale sit [4], ideoque & quadrato Z Υ, erit quoque rectan-
[5] 3. 4. 5. Elem. gulum S D P æquale duplo rectangulo sub X Υ, Z Λ [5]. Quia verò F punctum dividit B E per medium, suntque æquales B P, E S, etiam F P, F S æquales erunt, unde additâ utrique F D, erit S D æqualis toti P F D id est Δ Υ Ω: sed Δ Υ Ω dupla est lineæ V Υ, quia bis continet utramque Υ Δ, Δ V in hyperbole, in ellipsi verò & circulo bis utramque V Ω & Ω Υ; ergo & S D dupla V Υ, ideoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo sub Υ V, Ω Δ. Sed idem rectangulum S D P æquale ostensum fuit duplo rectangulo sub X Υ, Z Λ; ergo æquale est rectangulum sub Υ V, Ω Δ, rectangulo sub X Υ, Z Λ. Est itaque
[6] 16. l. 6. 6. Elem. Υ V ad Υ X, ut Λ Z ad Ω Δ [6]; verùm ut Λ Z ad Ω Δ, ita est parallelogrammum Σ T ad R Q; itaque & Υ V est ad Υ X ut parallelogrammum Σ T ad R Q parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallelogram-
[7] 7. lib. 1. Archim. de Æquip. mo compositæ centrum gravitatis est punctum Υ [7]. Eâdem ratione ostendi potest de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppositorum centrum gravitatis est in linea O Ξ. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumscriptis componitur, centr. gravitatis in eadem O Ξ reperiri necesse est. Sed ejusdem compositæ magnitudinis centrum gravit. est quoque in recta

B D G,

B D G, quoniam in ea sunt centra gravitatis utriusque figuræ circumscriptæ [8]; igitur magnitudinis ex dictis figuris compositæ centrum grav. est ipsum punctum F. Positum autem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione A B C & K F H triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compositæ ex duobus residuis, quæ in figuris circumscriptis remanent, erit centr. grav. in producta L F, ubi ea sic terminatur, ut pars adjecta habeat ad F L eandem rationem quam portio A B C simul cum K F H triangulo ad dicta duo residua [9]: is autem terminus est N; itaque N punctum est centrum gravitatis duorum residuorum. Quod fieri nequit; Nam si per N ducatur recta basi K H parallela, erunt ab una parte spatia omnia è quibus utrumque residuum constat. Non est igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione A B C & K F H triangulo compositæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F. Namque hoc si dicatur, planè simili demonstratione eò devenietur ut duorum residuorum quæ demptâ portione A B C & K F H triangulo, in circumscriptis figuris supererunt, centrum gravitatis sit ultra portionem A B C; quod est æquè absurdum. Reliquum est igitur ut sit ipsum punctum F; quod erat ostendendum.

[8] Theor. 3. h.

[9] 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

THEOREMA VI.

Omnis hyperboles portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera duarum, lateris transversi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro sectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.

Esto hyperboles portio, & inscriptus ei, qualem diximus, triangulus A B C; diameter autem portionis sit B D, & latus transversum sive diameter sectionis B E, in cujus medio centrum sectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in TAB. XXXIV. Fig. 8.

portione punctum L. Dico portionem ad inſcriptum triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius E D ad F L.

Conſtituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus K F H; ſcilicet ut quadratum F G æquetur rectangulo E D B, & ut baſis K H ſit baſi A C æqualis & parallela: ejuſque trianguli ſit centrum gravitatis M, ſumptâ nimirum F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Eſt itaque triangulus K F H ad A B C triangulum, ut F G ad B D: verùm ut F G ad B D, ita eſt E D ad F G, quia quadratum F G æquale eſt rectangulo E D B; & ut E D ad F G, ita ſunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id eſt F M; ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ E D ad F M. Eſt autem portio hyperboles ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium portionis & trianguli K F H eſt in puncto F [3], & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit portio ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ lineæ E D ad F L [4]: quod erat demonſtrandum.

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.

[3] Theor. 5. h.

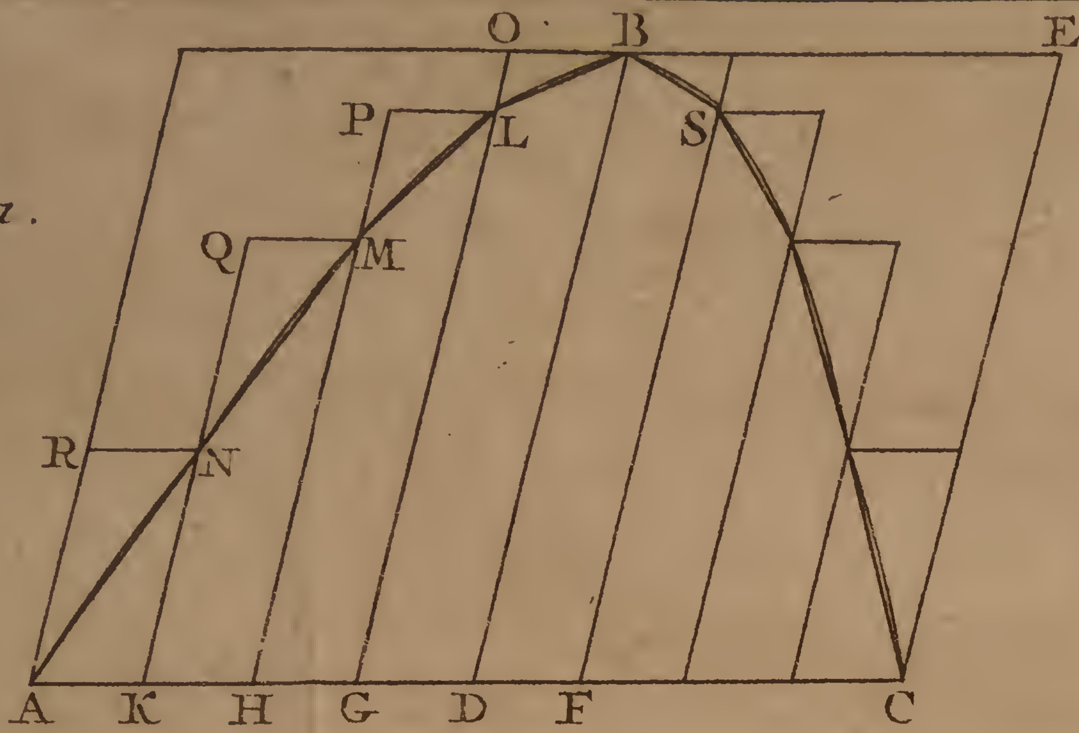
[4] 23. lib. 5. Elem.

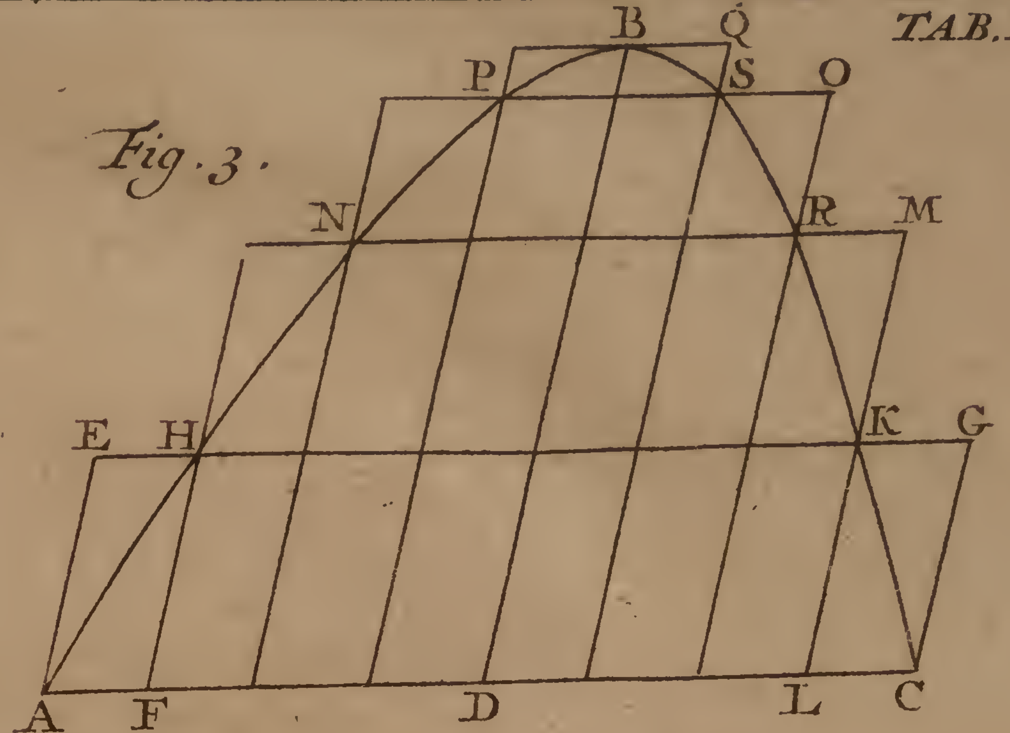
THEOREMA VII.

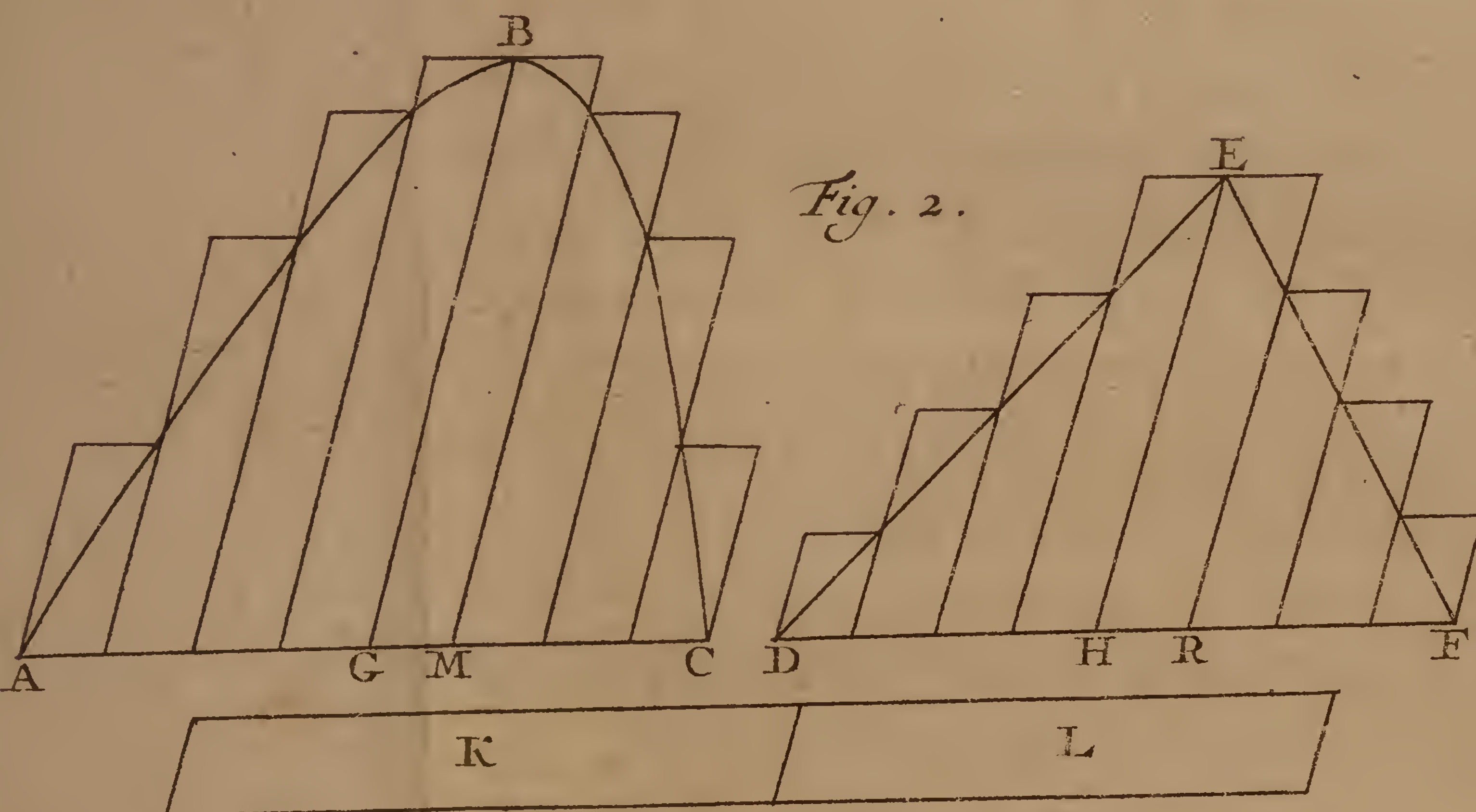
Omnis ellipſis vel circuli portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.

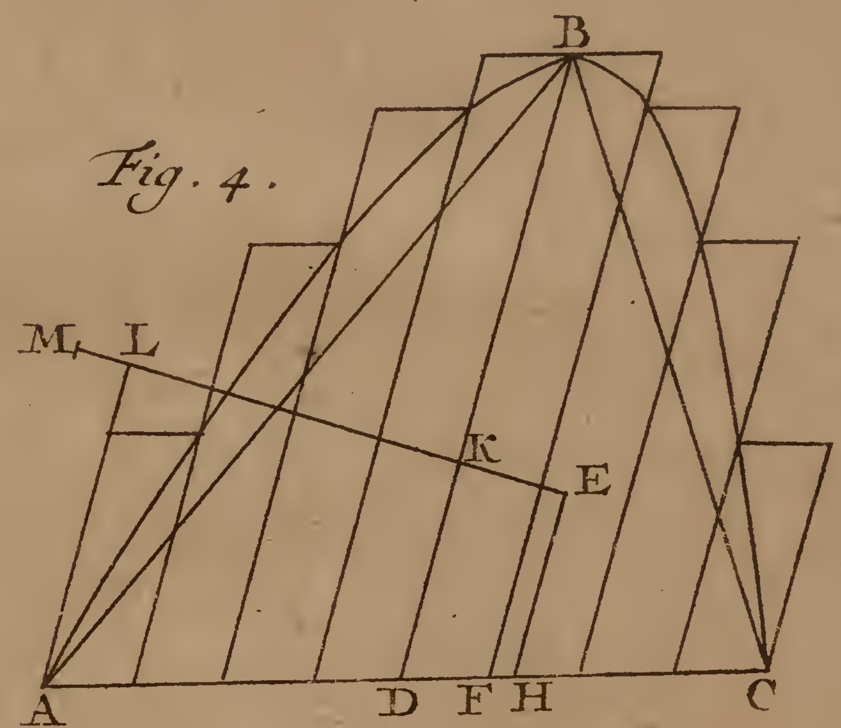
TAB. XXXV. Fig. 4. 5.

Eſto ellipſis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inſcriptus ei triangulus A B C, eandem cum portione baſin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis ſit B D, quæ producatur, & manifeſtum eſt quod tranſibit per centrum figuræ; ſit hoc F, & diameter portionis reliquæ D E. Et ponatur centrum gravitatis in portione


Fig. 1.
O
B
E
P
L
S
Q
M
R
N
A
K
H
G
D
F
C


Fig. 3.
B
Q
P
S
O
N
R
M
E
H
K
G
A
F
D
L
C


Fig. 2.
B
E
A
G
M
C
D
H
R
F
K
L


Fig. 4.
B
M
L
K
E
A
D
F
H
C

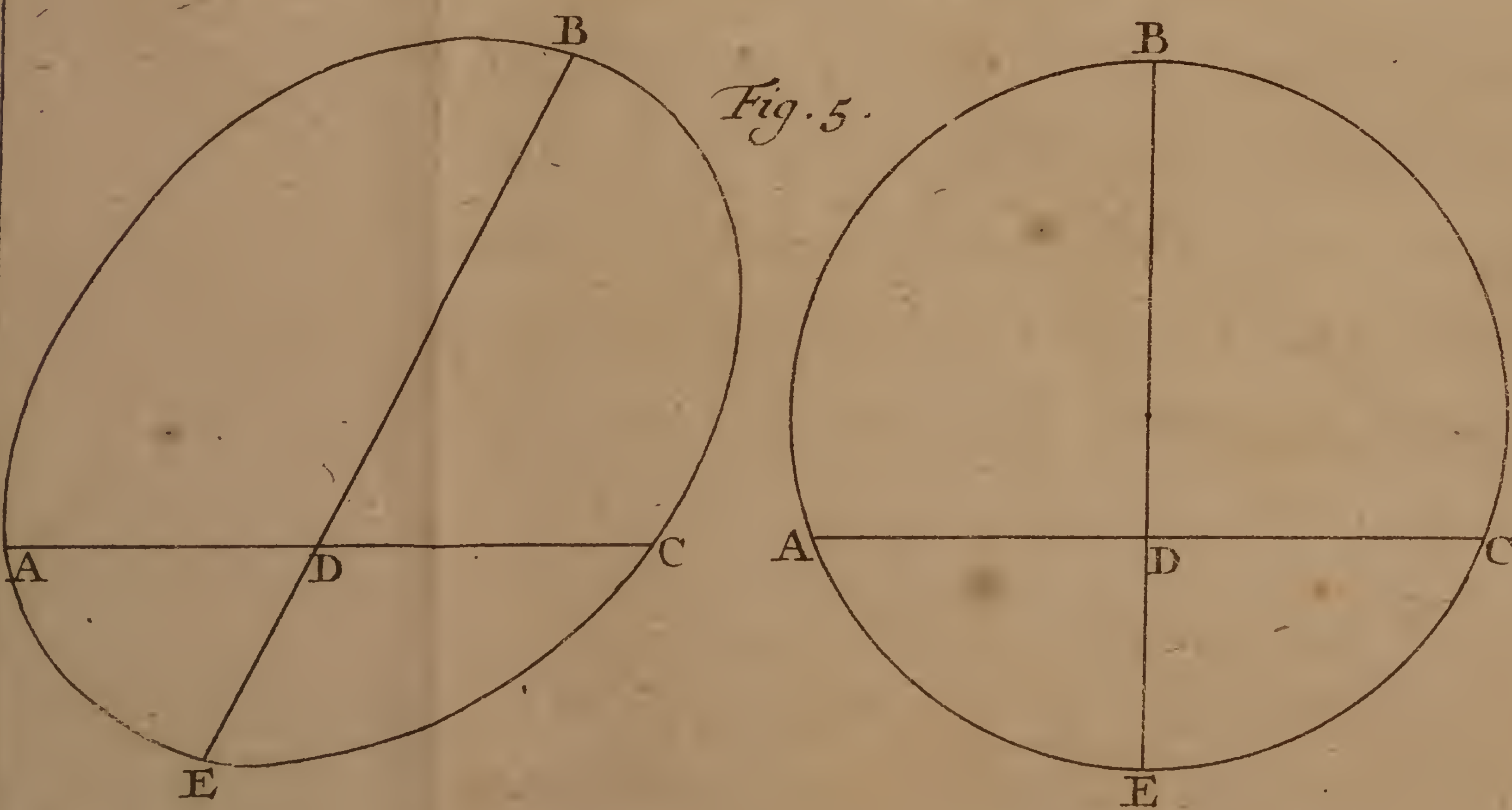
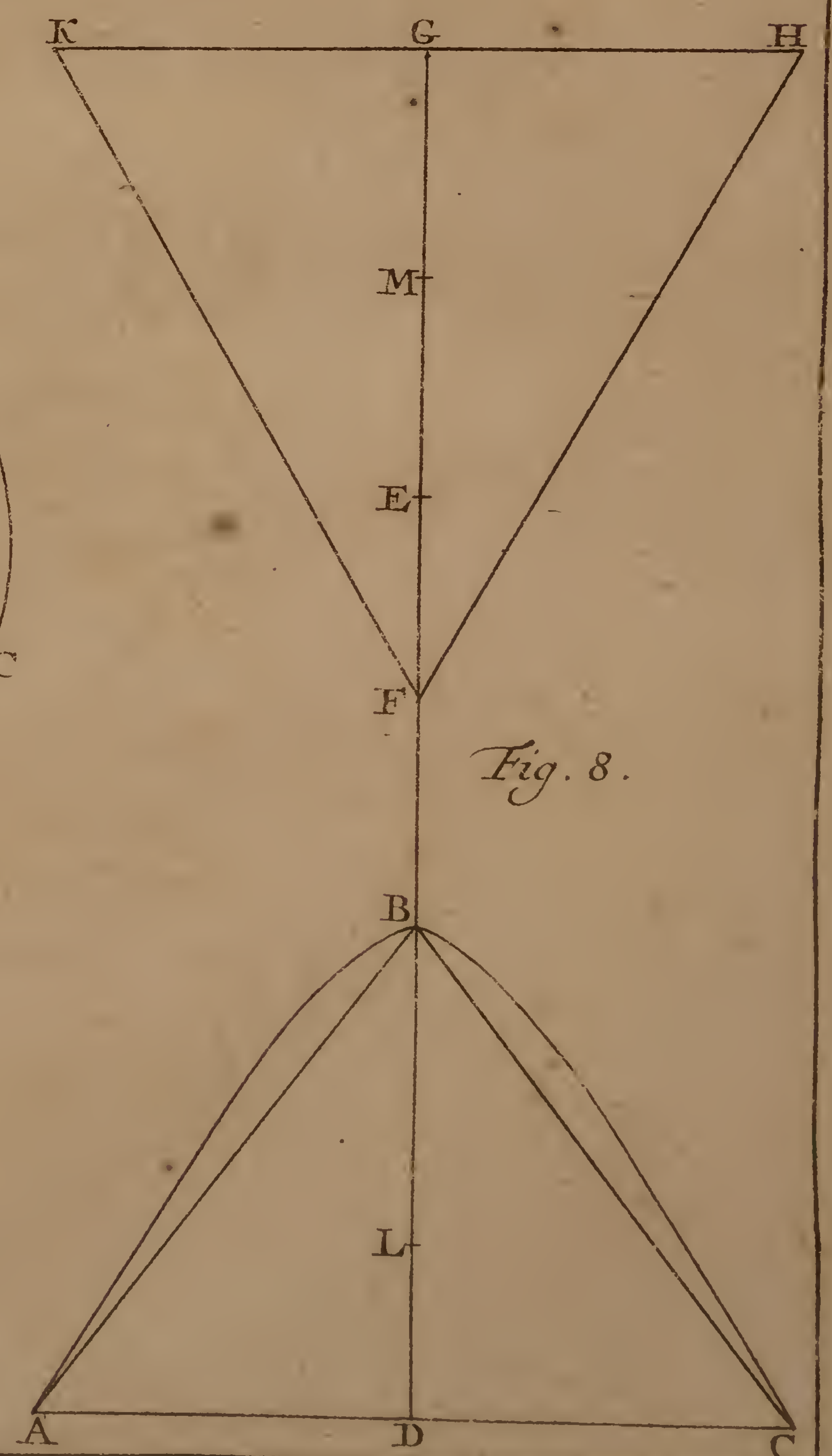

Fig. 5.
B
A
D
C
E
B
A
D
C
E


Fig. 6.
S
E
B
P
D


Fig. 7.
E
S
D
P
B


K
G
H
M
E
F
Fig. 8.
B
L
A
D
C

tione A B C punctum L. Dico igitur portionem ad inſcriptum ſibi triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L. Conſtituatur enim ut ſupra triangulus K F H, cujus nimirum baſis K H ſit baſi A C æqualis & parallela, & F G quæ à vertice ad mediam baſin pertingit poſſit rectangulum B D E: & centrum gravitatis trianguli K F H ſit M punctum, ſumptâ ſcilicet F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Triangulus igitur K F H eſt ad triangulum A B C, ut F G ad B D; ut autem F G ad B D, ſic eſt E D ad F G, quia quadratum F G æquale eſt B D E rectangulo; & ut E D ad F G, ſic ſunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id eſt, ad F M. Ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ſicut duæ tertiæ E D ad F M. Portio autem A B C eſt ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium eorum eſt in F [3], & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ſicut duæ tertiæ E D ad F L [4].

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.
[3] Theor. 5. h.
[4] 23. lib. 5. Elem.

TAB. XXXVI. Fig. 1. 2.

Sit nunc portio A B C dimidiâ figurâ major. Dico eam rurſus ad inſcriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L.

Ponatur enim portionis reliquæ A E C centrum gravitatis H punctum, & jungantur A E, E C. Igitur per ea quæ jam oſtendimus, erit portio A E C ad A E C triangulum, ut duæ tertiæ B D ad F H; verùm ut triangulus A E C ad triangulum A B C, ſic eſt E D ad B D, ſive duæ tertiæ E D ad duas tertias B D; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit ſicut portio A E C ad triangulum A B C, ita duæ tertiæ E D ad F H [5]. Sed ut portio A B C ad A E C portionem, ita eſt F H ad F L [6], quoniam totius figuræ centrum gravitatis eſt F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ut duæ tertiæ E D ad F L. Omnis igitur Ellipſis vel circuli portio &c. Quod erat demonſtrandum.

[5] 23. lib. 5. Elem.
[6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.

THEOREMA VIII.

IN semicirculo & quolibet circuli sectore, habet arcus ad duas tertias rectæ sibi subtensæ hanc rationem, quam semidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad sectoris centrum gravitatis.

TAB. XXXVI. Fig. 3. Esto primùm semicirculus A B C, descriptus centro D, sectusque bifariam rectâ B D, in qua centrum gravitatis semicirculi sit E [1]. Dico arcum A B C esse ad duas tertias A C, sicut B D ad D E. Jungantur enim A B, B C. Igitur, ut semicirculus ad triangulum A B C, sic sunt duæ tertiæ B D ad D E [2], est enim B D æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut semicirculus, id est, ut triangulus habens basin æqualem arcui A B C & altitudinem B D, ad A B C triangulum, ita est arcus A B C ad A C rectam; ergo ut arcus A B C ad A C, ita sunt duæ tertiæ B D ad D E, & permutando, ut arcus A B C ad duas tertias B D, ita A C ad D E, sive ita $\frac{2}{3}$ A C ad $\frac{2}{3}$ D E, unde rursus permutando, ut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita $\frac{2}{3}$ B D ad $\frac{2}{3}$ D E, sive ita, B D ad D E.

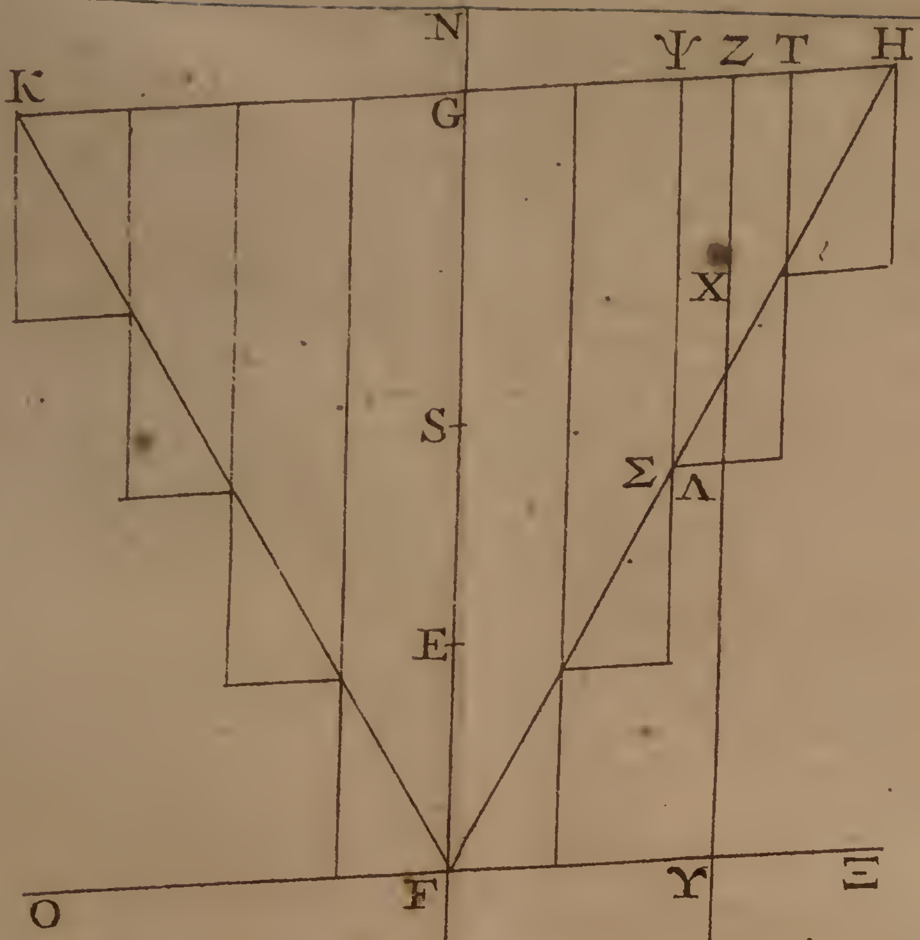
[1] Theor. 4. h.

[2] Theor. 7. h.

TAB. XXXVI. Fig. 4. Sit deinde sector D A B C, semicirculo minor, bifariam sectus rectâ D B, in qua sectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur subtensa A C. Dico rursus, arcum A B C ad duas tertias rectæ A C eam habere rationem, quam B D ad D E. Jungantur enim A B, B C, & totius circuli sit diameter K D B, quæ producatur in Q, ut fiat Q F, ad B F, sicut portio A C B ad A B C triangulum, & jungantur A Q, Q C; erit jam triangulus A Q C portioni A C B æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli A C D, & H portionis A C B; & sicut D Q ad Q F, ita sit H D ad D R.

Quia igitur sicut portio A C B sive triangulus A Q C ad triangulum A B C, id est, ut Q F ad B F, ita $\frac{2}{3}$ K F ad D H [3], erit rectangulum sub Q F, D H, æquale duabus tertiis

[3] Theor. 7. h.



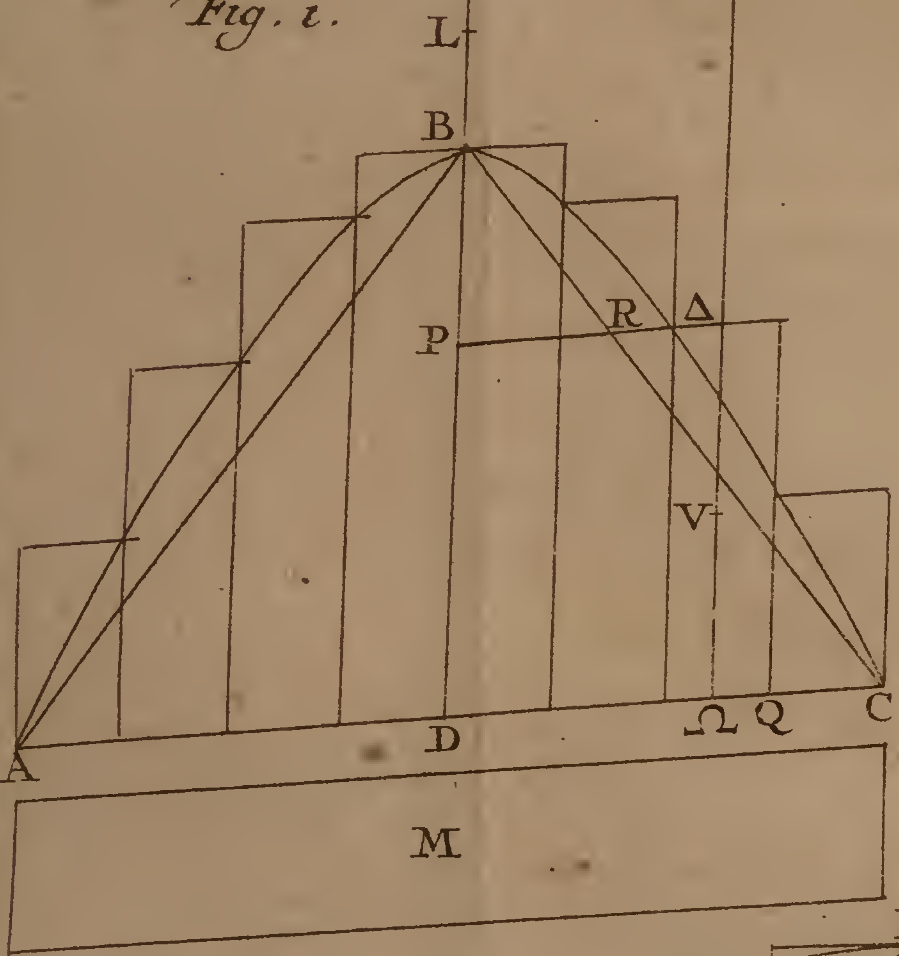


Fig. 1.

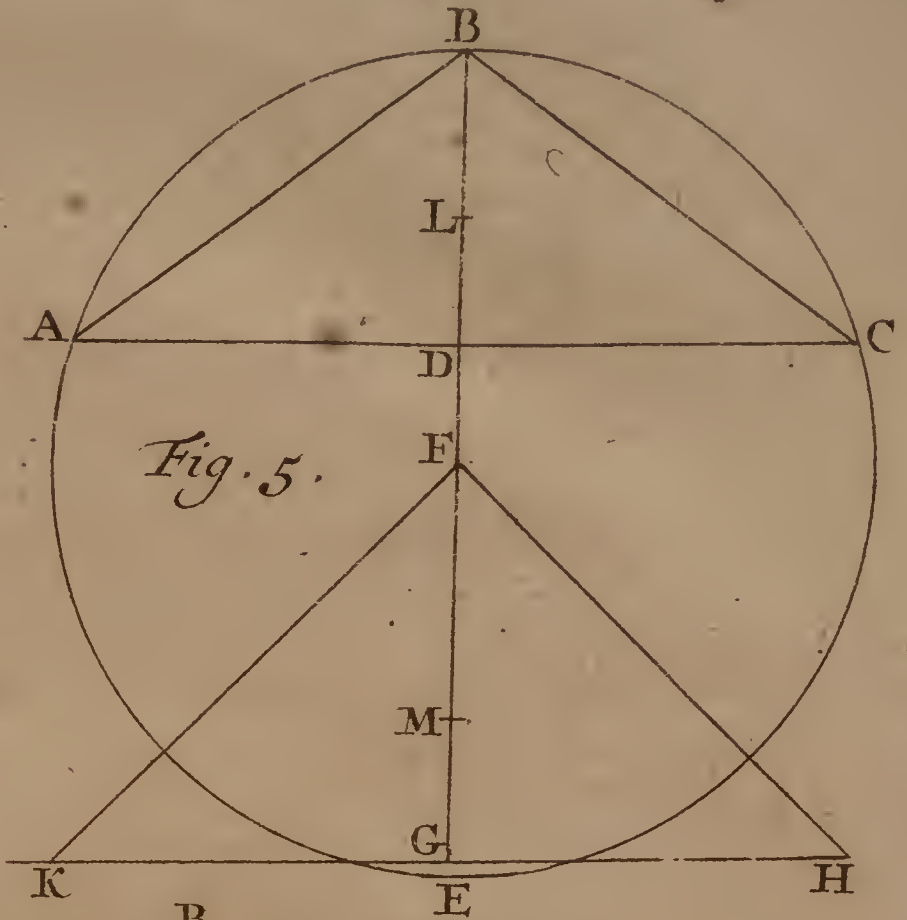


Fig. 5.

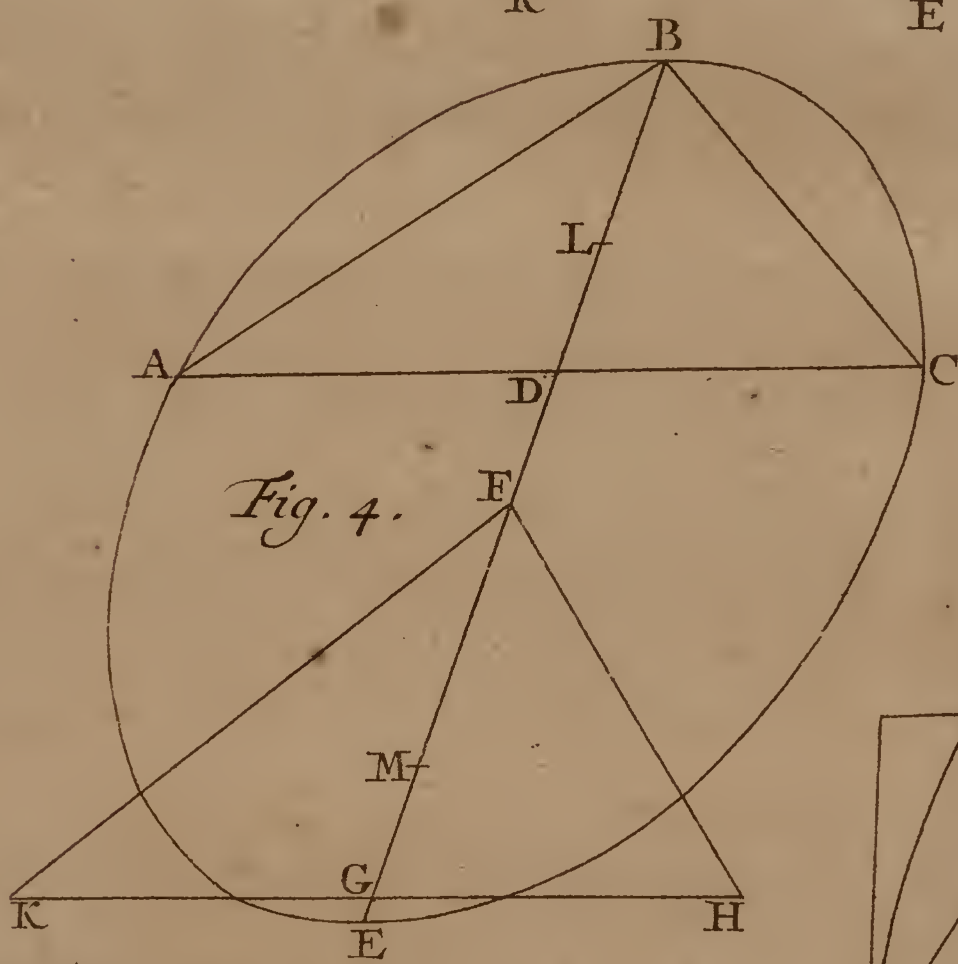
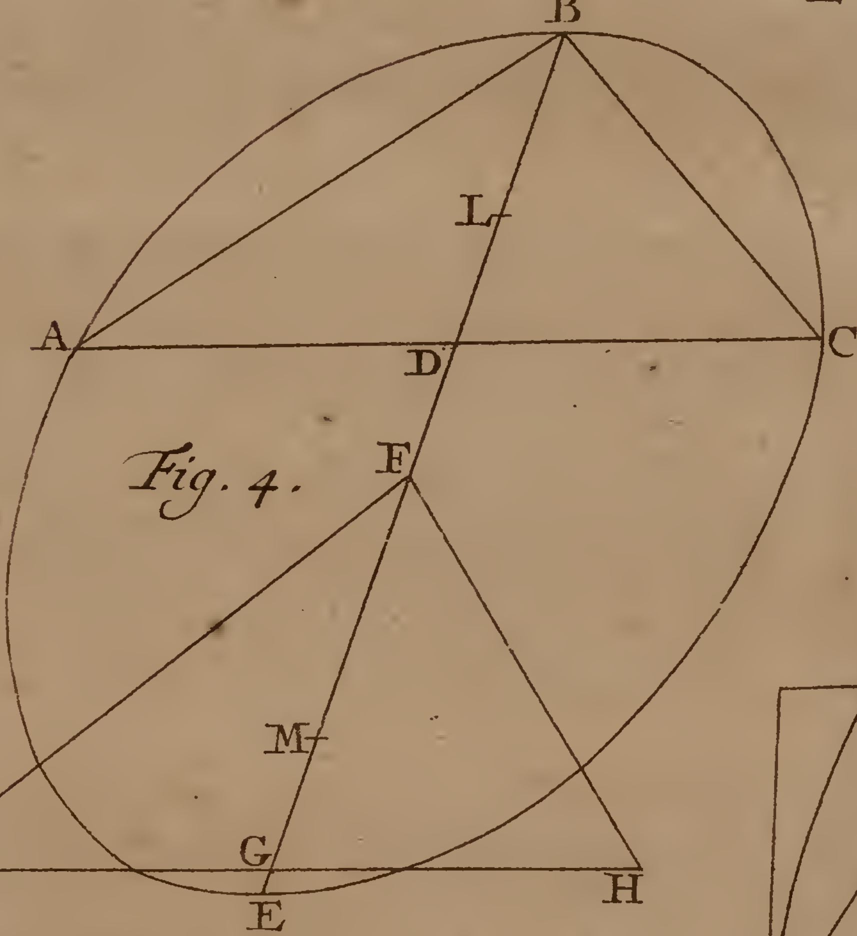
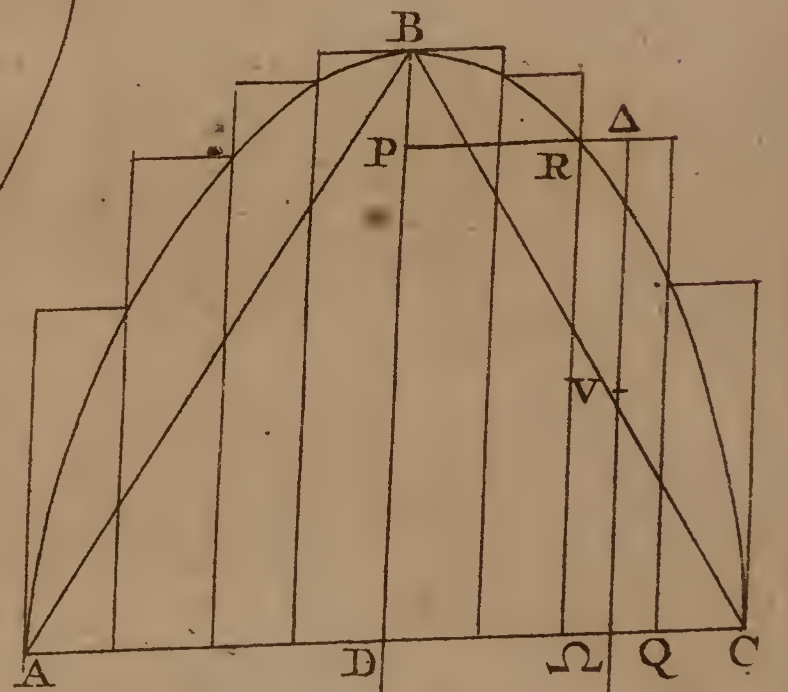



Fig. 4.



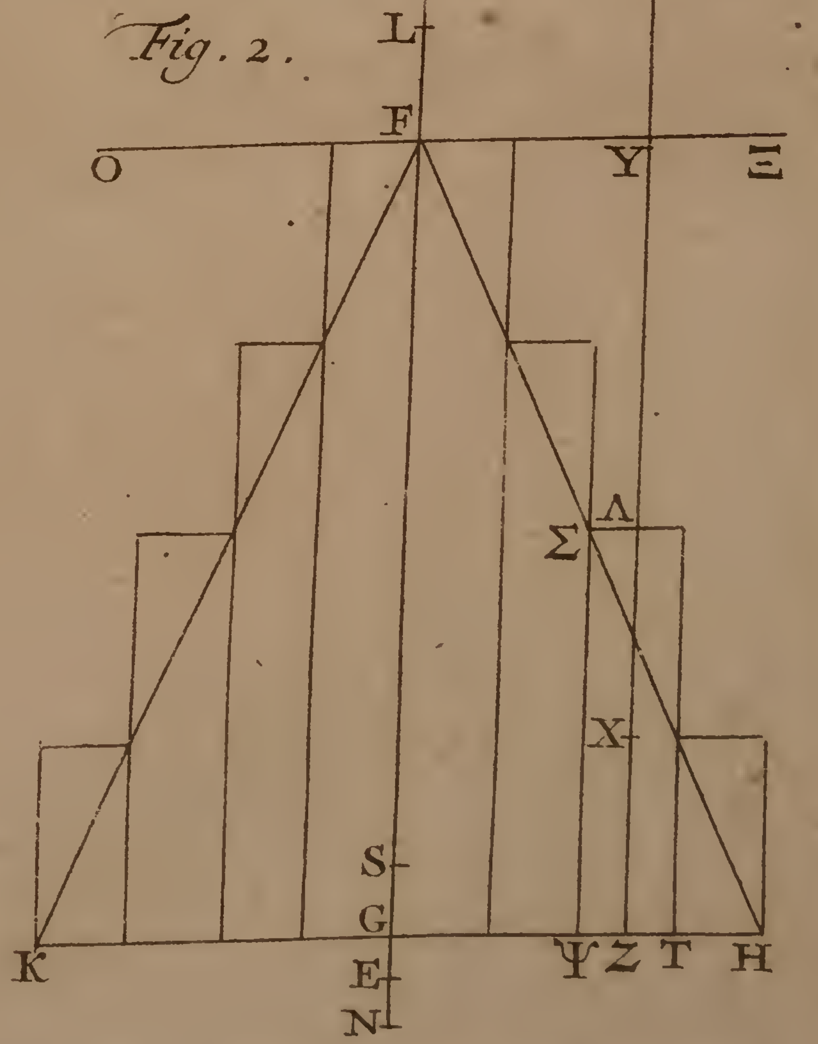
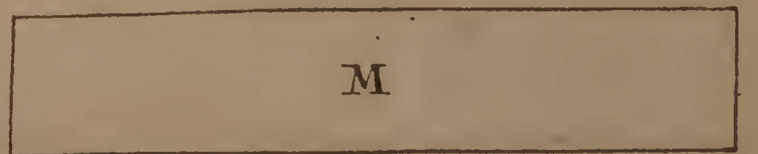


Fig. 2.



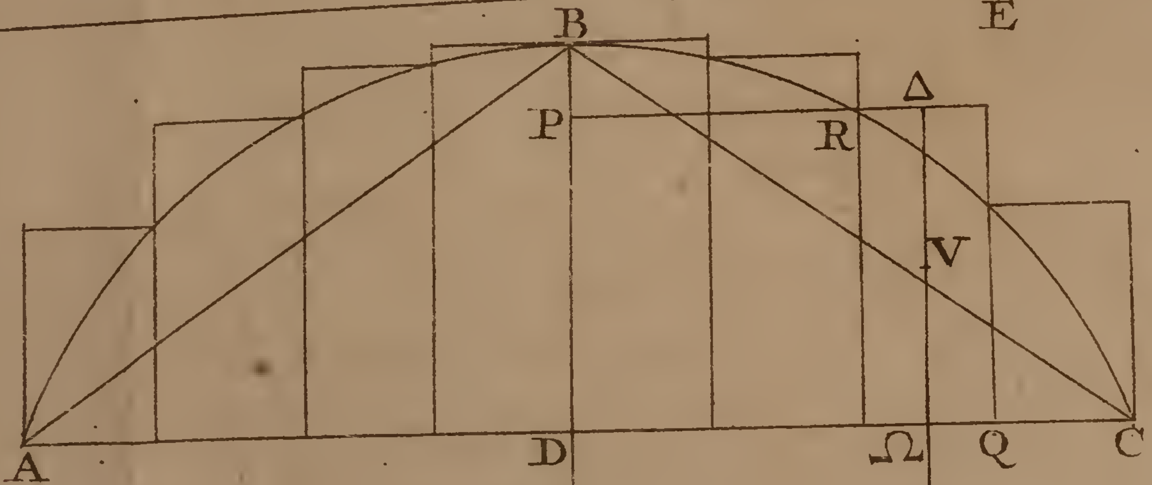
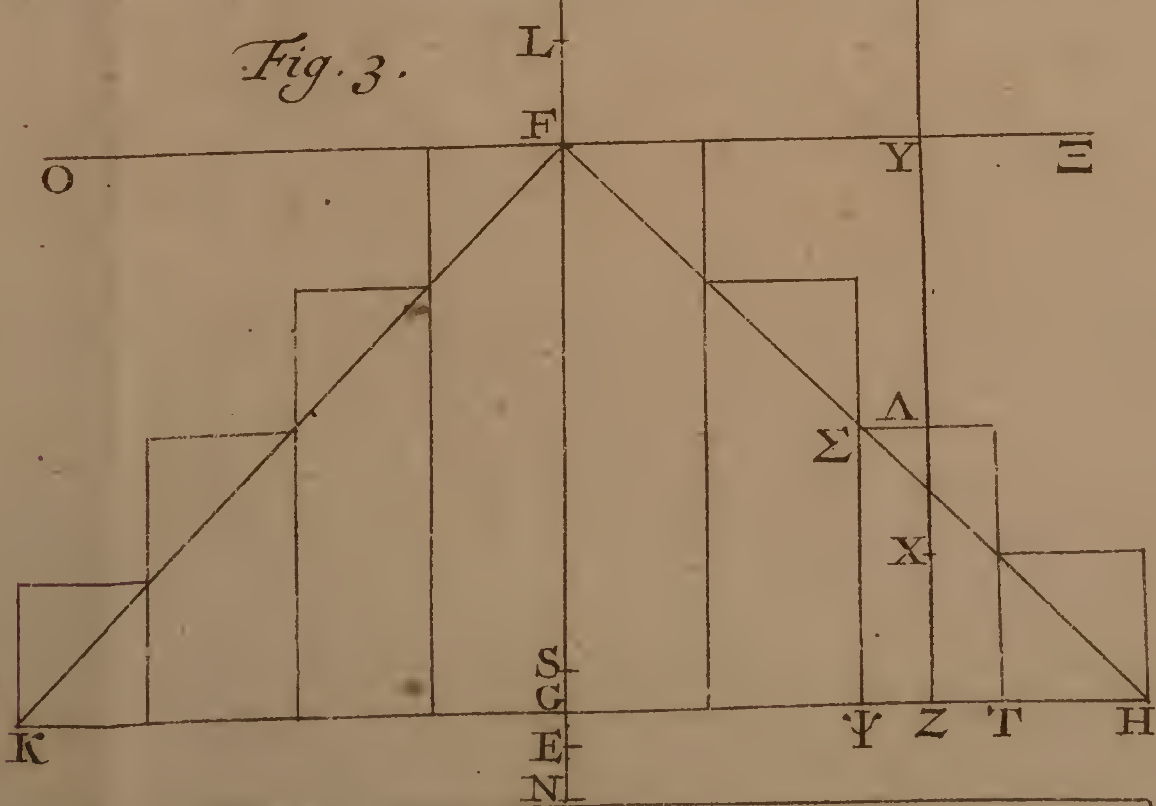
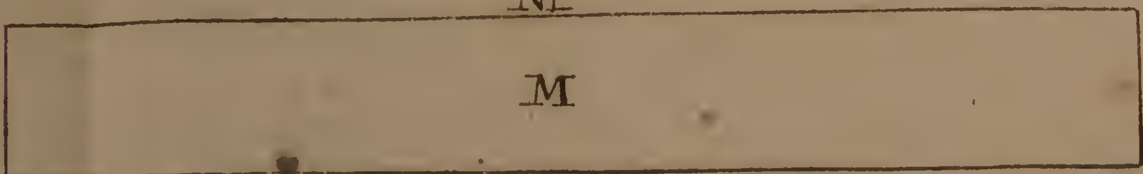


Fig. 3.





tertiis rectanguli K F B [4], id est, duabus tertiis quadrati A F; sed idem rectangulum sub Q F, D H, æquale est rectangulo Q D R, quia ut Q D ad Q F, ita fecimus esse D H ad D R; ergo rectangulum Q D R æquale duabus tertiis quadrati A F, ideoque ut Q D ad A F ita $\frac{2}{3}$ A F ad D R [5]: sed ut Q D ad A F, sic quoque est rectangulum sub Q D, A F, cui æquale quadrilaterum D A Q C, id est, sector D A B C ad A F quadratum; ergo & sector D A B C ad quadratum A F, ut $\frac{2}{3}$ A F ad D R. Porro quoniam E centrum gravitatis est totius sectoris, & H centrum grav. portionis A C B, G verò trianguli A C D, constat esse, sicut triangulus A C D ad A C B portionem sive ad triangulum A Q C, id est, ut D F ad F Q, ita H E ad E G [6]; quare convertendo & per compositionem rationis erit ut D Q ad D F, ita G H, ad H E. Sed quia fecimus ut D Q ad Q F, ita H D ad D R, erit quoque per conversionem rationis, ut D Q ad D F, ita H D ad H R; ergo H D ad H R ut G H ad H E; quare & reliqua G D ad reliquam E R, ut H D ad H R [7], hoc est, ut D Q ad D F. Sicut autem D Q ad D F, ita est quadrilaterum D A Q C, cui æqualis sector D A B C ad A C D triangulum; igitur sector D A B C ad A C D triangulum ut G D ad E R: Est autem A C D triangulus ad D F quadratum, ut A F ad D F, sive ut $\frac{2}{3}$ A F ad $\frac{2}{3}$ D F id est D G. Igitur ex æquali in proportione perturbata, sicut sector D A B C ad quadratum D F, ita $\frac{2}{3}$ A F ad E R [8], & convertendo, quadratum D F ad sectorem D A B C, ut E R ad $\frac{2}{3}$ A F. Fuit autem ante ostensum, quadratum A F esse ad sectorem D A B C, ut D R ad $\frac{2}{3}$ A F; igitur duo simul quadrata, D F & A F, sive unum quadratum D A ad sectorem D A B C ut duæ simul E R & R D, id est ut tota E D ad $\frac{2}{3}$ A F [9]. Est verò etiam quadratum D A ad D A B C sectorem, sicut linea D A ad arcum A B, quia nimirum sector D A B C æqualis est rectangulo, basin habenti æqualem arcui A B & altitudinem D A; ergo sicut D A ad arcum A B, ita E D ad $\frac{2}{3}$ A F; & permutando, arcus A B ad $\frac{2}{3}$ A F, sive arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ut D A vel B D ad D E.

4 16. lib. 6. Elem.
5 16. lib. 6. Elem.
6 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.
7 19. lib. 5. Elem.
8 23. lib. 5. Elem.
9 24 lib. 5. Elem.

TAB. XXXVI. Fig. 5.

Esto jam denique sector D A B C semicirculo major, & ponantur ea quæ priùs, & perficiatur circulus B A F C, & totius diameter sit B D F, in qua erit quoque centrum grav. sectoris reliqui D A F C [1], quot sit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis est D, & duorum sectorum centra grav. E & G, erit sicut sector D A B C, ad sectorem D A F C, id est, sicut arcus A B C ad arcum A F C, ita G D ad D E [2]: verùm ut arcus A F C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita est D F ad D G, sicuti modò ostensum est; ergo ex æquali in proportione perturbata, sicut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita erit D F vel B D ad D E [3]. Constat itaque quod in semicirculo & quolibet circuli sectore &c. quod erat demonstrandum.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[2] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[3] 23. lib. 5. Elem.

ἘΞΈΤΑΣΙΣ
CYCLOMETRIÆ
CLARISSIMI VIRI,
GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.

Editæ Anno D. cIↃ IↃC XLVII.



Nte quinquennium circiter Vir eruditissimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio, quatuor modos proposuit quadrandi Circulum, unum verò eorum etiam Quadraturæ Hyperboles applicavit: quem cæteris potiorem ab ipso existimari ex multis indiciis colligere licet. Unum est hoc ipsum quod duas diversarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonstravit; alterum quod evidentior multò sit hic modus quàm reliqui tres; ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum est, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi suæ inventionis

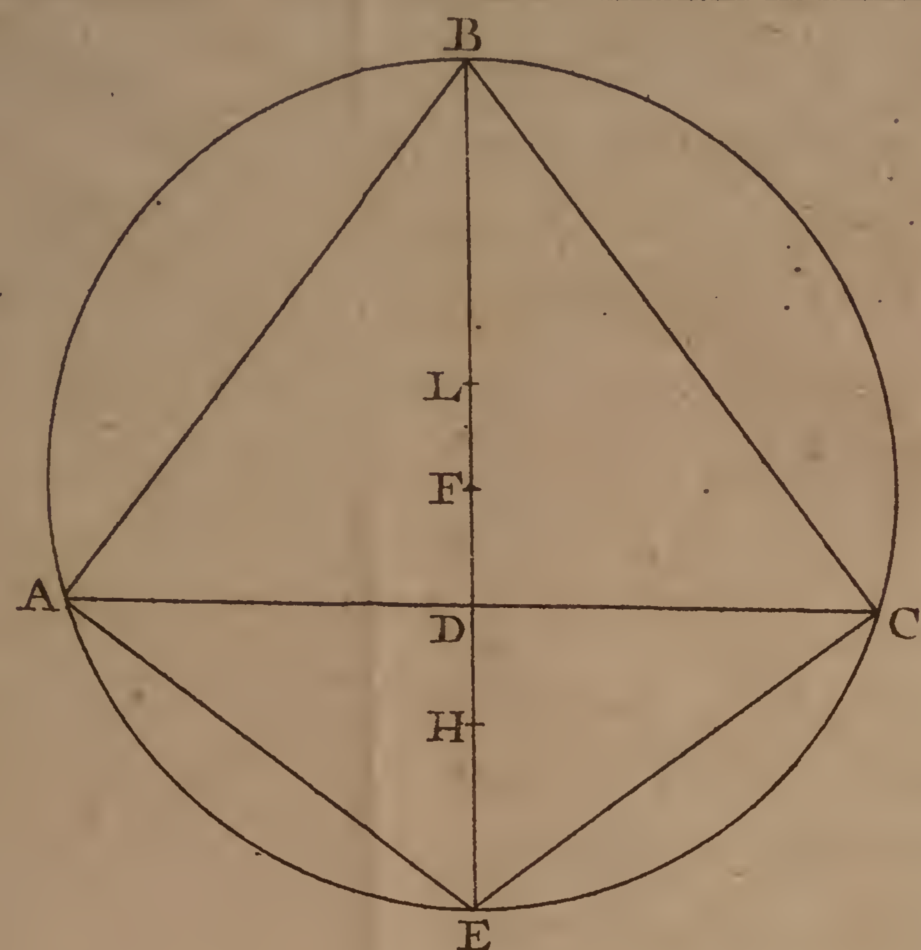


Fig. 2.

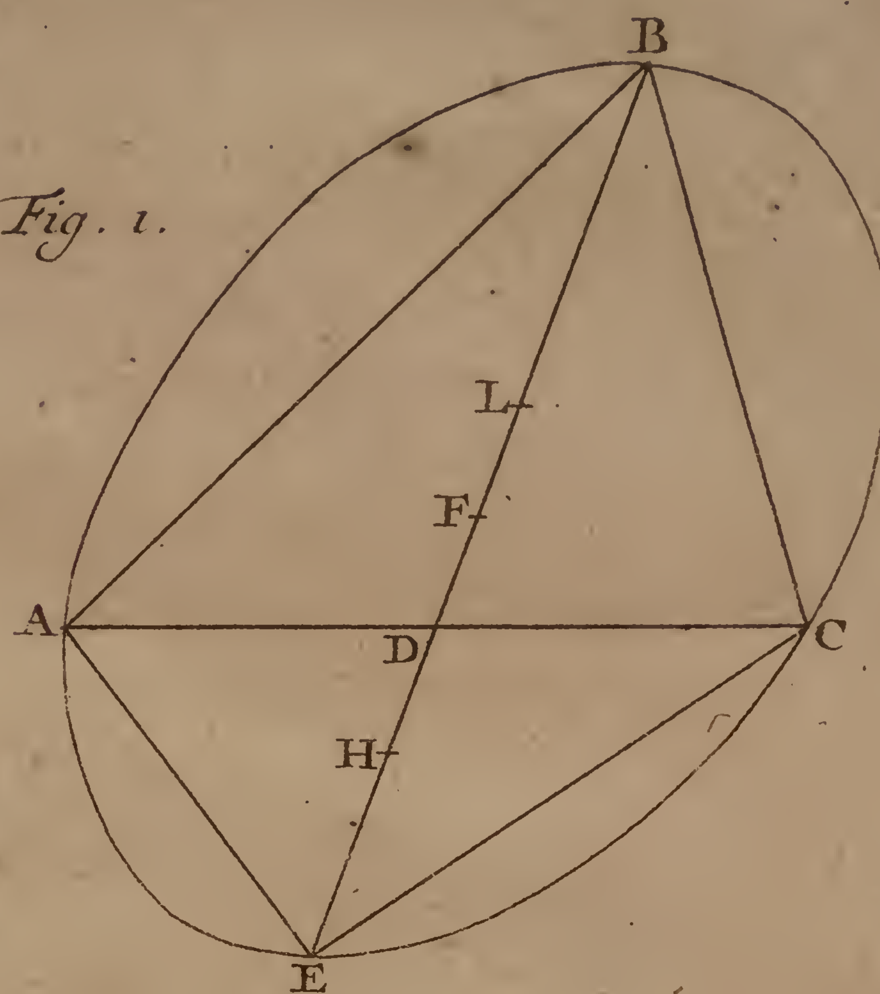


Fig. 1.

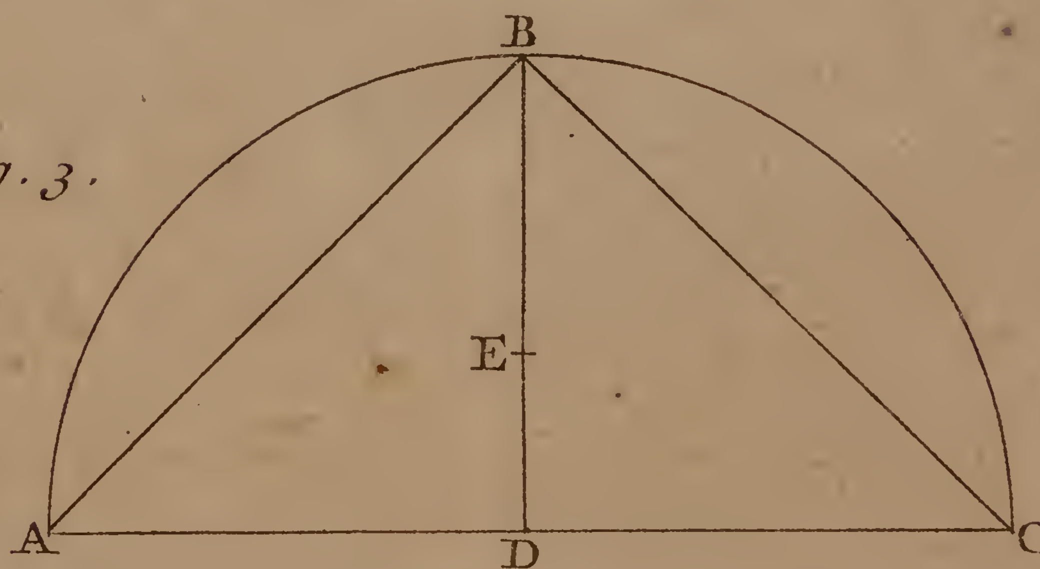


Fig. 3.

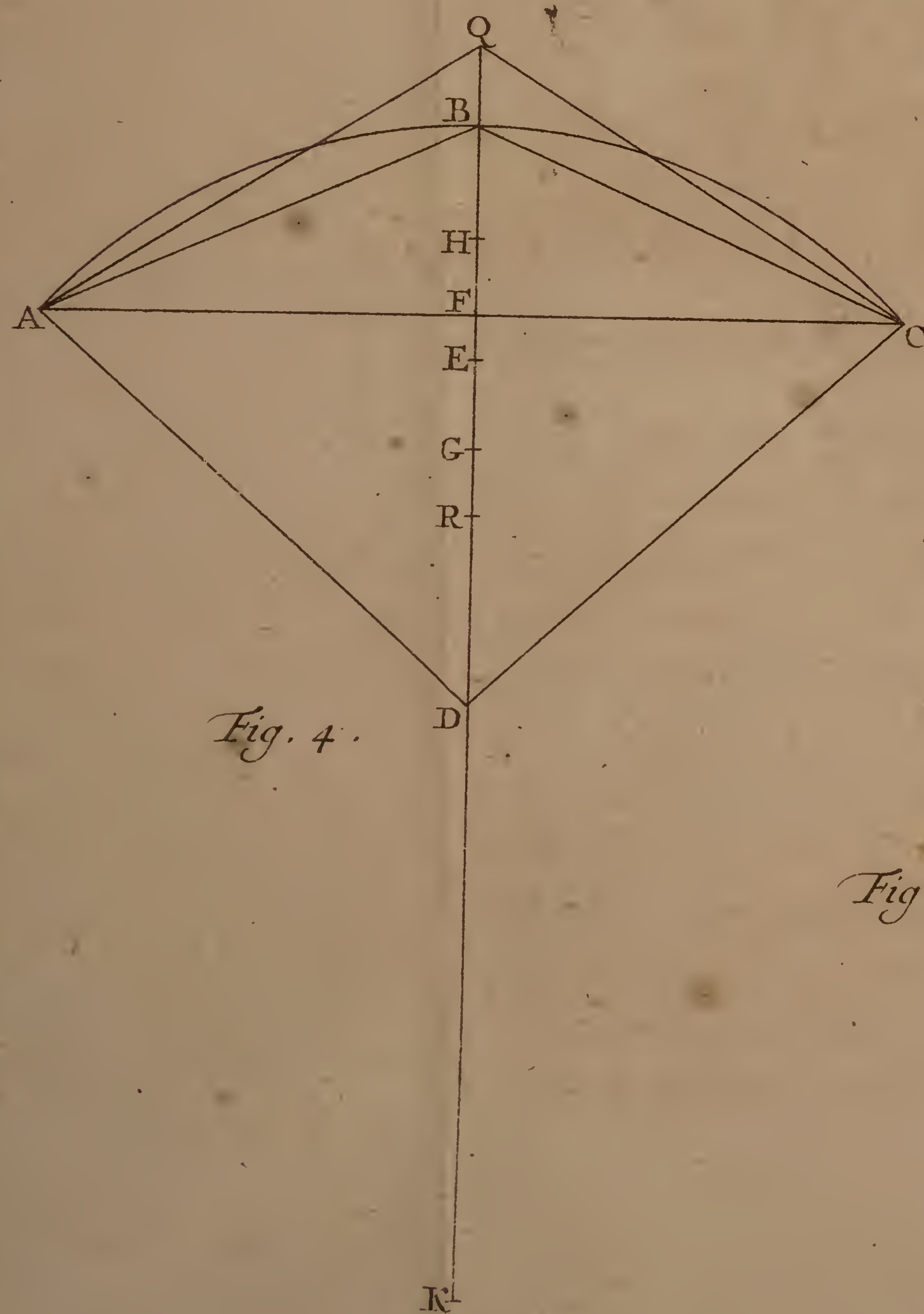


Fig. 4.

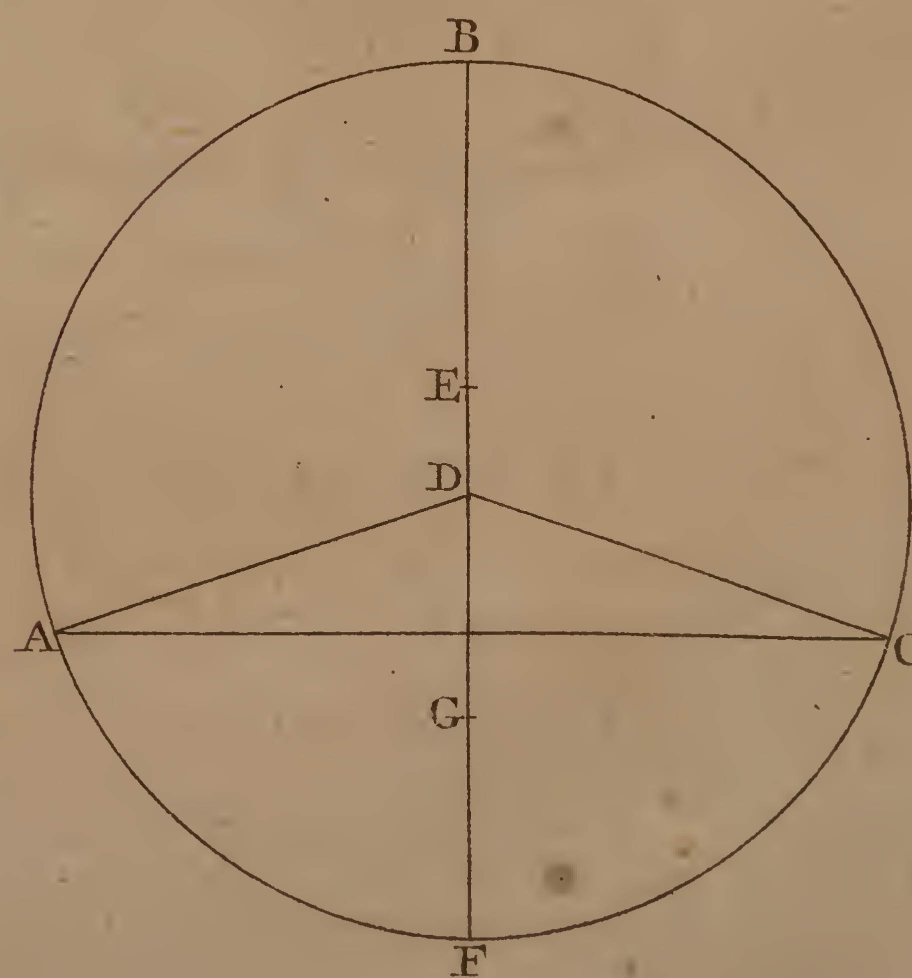


Fig. 5.

ventionis hiſtoriam & progreſſum paucis expoſuit, nullius modi præter hunc unum meminerit. Potuit autem & aliam rationem habuiſſe tres poſteriores quadraturas illic ſilentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes ſciret ex iiſdem principiis deductas & demonſtratas eſſe. Sed mihi vel alterutra harum conſiderationum ſufficere viſa eſt, ut perſuaderet unam pro omnibus fore diſcuſſionem quæ quadraturam primariam infirmatura eſſet, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea oſtenderimus quæ minus obſcuritatis habet, non video quâ ratione melior ſucceſſus expectandus ſit in tribus ſequentibus, quæ maximâ caligine involvuntur, quaſque Auctor ipſe vel uni illi poſthabere videtur. Principia quæ communia eſſe omnibus quadraturis dixi, ea ſunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis ſive de Proportionum proportionibus, & de Ductibus plani in planum. Quæ quidem prorſus non impugnabo, nam & ſolida corpora quæcunque in Geometria conſiderare licere exiſtimo, & alia omnia adhiberi poſſe, quæ modo ullo auxilio fore credimus ad inveſtigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non ſatis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicaſſe, atque hinc, meâ opinione, ipſi extitiſſe erroris cauſam. Primùm omnium id in propoſ. 39. lib. 10. Oper. Geom. * obſervaveram. Poſitis enim numeris fortuitò aſſumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hiſce eandem demonſtrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. ſcripta eſt de totidem parallelepipedis. Et quum tamen concluſio nullam idoneam admitteret interpretationem, non dubitabam quin æquè ipſius ac mea argumentatio, quam iiſdem verbis formaveram, aliquid abſurdi contineret. Poſterior autem demonſtrationis pars rectè ſe habebat, ideoque arguebat peccatum in

* In hac Propoſ. 39. etiam Carteſius paralogiſmum oſtendit Epiſt. ad Schotenium.

in priori. Sed veritus ne intricata & prolixa hinc nobis disputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea sese obtulerunt, quæ paucis hic perscribere constitui. Nulla per hæc propositionum Cl. Viri in controversiam vocabitur; sed contrà multis earum probatis, atque in usum meum conversis, eò rem deducam, ut si quidem non impossibile dicet quadraturam suam ad exitum perducere, & per eam reapse invenire rectilineum circulo æquale, ostendam qui id facillimè imposterum assequatur. Deinde vestigia ipsius insistens demonstrabo, quibus hactenus nobis præcessit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri posse, sed esse subsistendum ad conclusiones perquam absurdas. Atque ut ad rem veniamus.

TAB. XXXVII. Fig. 1. Esto circulus cujus centrum F, diameter C D. Et diviso radio F C bifariam in G, ducantur ipsi ad angulos rectos F E, G H. Dico, datâ ratione segmenti C H G ad G H E F segmentum, dari quoque rationem circuli ad inscriptum sibi hexagonum regulare. Jungantur enim F H, H C, & manifestum est triangulum F H C fore æquilaterum; item quadrantis arcum C E triplum fore arcus H E. Si ergo data sit ratio segmenti C H G ad G H E F segmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis F E C ad segmentum G H E F. Sed data quoque est ratio sectoris F H E ad quadrantem F E C, ergo datur quoque ratio segmenti G H E F ad sectorem F H E; ac proinde dabitur quoque ratio segmenti G H E F ad triangulum F H G; quare & ratio sectoris F H E ad triangulum F H G data erit. Sed huic rationi eadem est ratio sectoris F H C ad triangulum F C H, (quoniam hæc utriusque præcedentium dupla sunt;) eademque est circuli ratio ad hexagonum regulare sibi inscriptum. Ergo & hanc datam esse apparet: quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVII. Fig. 1. 2. Sunto nunc lineæ A B, C D, E F, singulæ æquales diametro circuli C D: & super unaquaque harum construantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B describantur semiparabolæ A V G, B T H, quarum bases sint quadratorum latera

latera B G, A H. In duobus ſequentibus quadratis ducantur diagonii C I, D K. Sed in poſtremis rurſus ſemiparabolæ deſcribantur E Σ L, F Π M, quarum vertices E & F, axes vero ſint quadratorum latera E Ψ, F Ω, & baſes Ψ L, Ω M. Porro diviſis bifariam ſingulis lineis quæ ab initio poſitæ fuerunt, in N, O, P, & medietatibus rurſus bifariam in Q, R, S, ducantur per diviſionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, T V, X Y; Z Γ, Δ Θ, Π Σ, Λ Ξ.

Oſtendit itaque Cl. V. in demonſtr. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. & veriſſimum eſt, in circulo ſuperiori ſegmentum C H G ad ſegmentum G H E F, eandem habere rationem quam habet hîc ſolidum quod fit ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ad ſolidum ortum ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N; ſicut enim ille in ſuo ſchemate ſumit æquales lineas *h i*, *k l*, ita nobis æquales ſunt ſumptæ in circulo, C G, G F, & hiſce pares A Q, Q N.

Atque ut ipſa demonſtrandi methodus quoque noſcatur, ea hujuſmodi eſt. In prop. 51. lib. 10. oſtenditur, ſolidum quod fit ex ductu ſemiparabolæ A B G in ſemipar. A B H, æquari ſemicylindro, baſin habenti ſemicirculum C E D & altitudinem C D. Deinde in Corollario ejuſdem prop. idem quoque ſingulis partibus quod totis ſolidis convenire docetur. Nimirum id ſolidum quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, æquatur quoque parti dicti ſemicylindri quæ inſiſtit ſegmento G H E F; Itemque ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, æquatur ejuſdem ſemicylindri parti quæ inſiſtit ſegmento C H G. Quorum hoc vel ex eo conſtat, quod alioqui duo iſta ſolida ſimul ſumpta, hoc eſt, ſolidum ex ductu plani A V N in pl. A H T N, æquale non eſſet dimidio ejus quem diximus, ſemicylindri; & conſequenter falſum quoque eſſet quod in confeſſo eſt, nimirum ſolidum ex ductu ſemiparab. A B G in ſemiparab. A B H æquari toti ſemicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ ſemicylindri partes eandem inter ſe rationem

 habent

habent quam baſes quibus inſiſtunt, certum eſſe quod diximus, ſegmentum circuli C H G ad G H E F, eſſe ut ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q ad ſolidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N.

Hæc ita enucleatè ſcribere volui, ne cui ignaro fortaſſe naturæ demonſtrationum quibus Cl. V. utitur, ſcrupulus reſtare poſſet, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli ſegmenta conſiderat, quale ferè eſt G H E F, ego pro altero eorum ſumpſerim ſegmentum C H G: Quodque in linea A B ab ipſo termino A æquales partes capiam A Q, Q N. Ipſum autem Cl. Virum hæc remorari non poſſunt, neque hîc, neque in ſequentibus; quia cum in d. prop. 52. & 44, lib. 10. præcipit in linea *a b* æquales inter ſe ſumi *h i*, *k l*, ſcit hoc nullam limitationem admittere; ſicut & in ſchemate communi prop. 39, lib. 10, ubivis in linea *a b* ſumitur *i k*, quæ dividitur in duas æquales *i m*, *m k*. Idem contingit in prop. ſequenti 40.

Revertor autem ad propoſitum, & conſtat nunc quidem, ſi detur Ratio ſolidi quod fit ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, ad ſolidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N, eo ipſo dari quoque rationem ſegmenti C H G ad ſegmentum G H E F, ac proinde continuò tunc inveniri poſſe quam rationem circulus habeat ad inſcriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ſolidum H Y. Item quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, ſolidum X V. Similiter quod oritur ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, vocemus ſolidum K Θ; eâdemque brevitate dicamus ſolida Δ Γ, M Ξ, Λ Σ, quibus quæ denotentur jam ſatis intelligitur.

His ſic conſtitutis, ſciendum eſt, omnem ſpem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl. Viro in eo poſitum eſſe, quod exiſtimet rationem ſolidi H Y ad ſolidum X V (quam unicam tantum deſiderari jam admonui) facile inveniri poſſe, ſi cognitæ ſint duæ rationes hæ, nimirum ratio ſolidi

M Ξ

M Ξ ad sol. Λ Σ, & ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ. Sic enim tunc argumentabitur; Nota est ratio solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, item ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipsa, scilicet ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ, continet rationem solidi H Y ad X V; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda sint paulò inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemus. Interea certo scio, nihil horum quæ dixi mihi à Cl. V. negatum iri, modò consideret in linea A B, sumptas esse æquales inter se partes A Q, Q N, & hisce pares C R, R O; E S, S P.

Si igitur indicavero ipsi quæ sit ratio solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, item quæ sit ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ, & ne tum quidem dicere possit quam rationem habeat solidum H Y ad sol. X V, fateatur sane se frustra utramque Quadraturam tentasse, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli; quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propositionem 44. lib. 10. Oper. Geom. quæ vana & inanis erit, nisi ex notis rationibus solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, & solidi K Θ ad sol. Δ Γ, innotescat ratio solidi H Y ad sol. X V. Hyperboles vero; quoniam prop. 146. ejusd. lib. 10. cui hæc quadratura innititur, eadem est cum dicta prop. 44. & iisdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin vero datis istis duabus rationibus invenire posthac poterit rationem solidi H Y ad sol. X V, tum se credat Circulum reverâ quadravisse. Nota enim sic erit ratio segmenti C H G in circulo ad segmentum G H E F, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipsas Rationes. Et primam quidem, hoc est rationem solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, ajo esse eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram vero, rationem solidi K Θ ad sol. Δ Γ, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infrà sum demonstraturus.

Priùs autem quod ab initio promisi etiam ostendam, hisce Rationibus cognitis, tamen rationem sol. H Y ad sol. X V,

 per

per ea quidem quæ nos adhuc docuit V. Cl. inveniri non posse. Etenim inventurus ex datis rationibus, sol. Μ Ξ ad sol. Λ Σ, & solidi Κ Θ ad sol. Δ Γ, rationem tertiam solidi H Y ad sol. X V, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre est ex demonstratione prop. 44. suprà citatæ, cui hunc casum convenire liquidò constat. Dicet enim, Notæ sunt prima & secunda ratio, (istæ enim sunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima secundam contineat. Sed quoties prima continet secundam, toties secunda continet tertiam, (hoc asserit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.) Ergo notum quoque quoties secunda tertiam contineat. Quare cum nota sit secunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet solidum H Y ad sol. X V.

Consequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima secundam contineat; hoc est, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo sensu verbum *continere* hìc explicaturus est? Num eo, ut idem significet quod alibi *continere per multiplicationem?* utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc est ut illa hujus sit duplicata, ita enim *continere* intelligendum videtur in propositione 40. lib. 10, modo citata) vel ter, vel quater, vel sæpiùs etiam. Et hoc quidem esse non potest; nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata est neque triplicata vel ulterius multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{13}{25}$ sit duplicata rationis 5 ad 11.

An igitur verbum *Continere* in eum sensum trahet, quem habet in propositione 125. lib. 8. Oper. Geom.? Vix quidem illud suspicari possum; sed etiamsi vellet rursus inde absurdum consequetur. Nam secundum interpretationem istam; quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipsa continebit rationem 5075 ad 6413; hoc autem patebit horum numerorum inter se rationis examinanti secundùm regulam dictæ propositionis 125. Esset igitur ratio solidi H Y ad sol. X V, hoc est, ratio segmenti circuli ab initio propositi C H G, ad segmentum G H E F, eadem quæ

5075

5075 ad 6413. Quare qualium partium ſegmentum C H G eſſet 5075, talium ſegmentum G H E F eſſet 6413; & proinde quadrans F C E 11488; & ſector F H E (qui quadrantis tertia pars eſt) $3829\frac{1}{3}$: & triangulum G H F $2583\frac{2}{3}$. Sicut autem ſector F H E ad triang. G H F, ita eſt ſector F H C ad triangul. F C H, & ita circulus C D ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$ talium hexagonum inſcriptum foret $2583\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inſcriptum eſt $2583\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumſcriptum eſt $3444\frac{8}{9}$; quoniam hoc inſcripti eſt ſeſquitertium: Ergo qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumſcriptum eſſet $3444\frac{8}{9}$, atque ita eſſet ipſo circulo minus, quod eſt abſurdum.

Manifeſtum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram caſui noſtro accommodari poſſe. Aliam autem præter illas nullam in ſuo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſol. M Ξ ad ſol. Λ Σ contineat rationem ſol. K Θ ad ſolid. Δ Γ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi H Y ad ſolid. X V. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus iſtis datis, per inventa Clariſſ. Viri cognoſci poſſe: ideoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere Circuli quadraturam.

Reſtat nunc tantùm ut manifeſta faciam quæ in præcedentibus poſita fuere, dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum M Ξ eſſet ad ſolid. Λ Σ, ut 53 ad 203: item quod ſolidum K Θ rationem haberet ad ſolidum Δ Γ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, ut notum habeamus, quæ ſit Ratio ungulæ Parabolicæ ad Cylindrum ſuum, qui baſi inſiſtit eidem, & eandem habet altitudinem; idcirco hanc Rationem declarantes, Tractatum Clariſſ. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9. propoſuit, uno egregrio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipſum non inveniſſe, quum ex iis quæ jam

 oſten-

oſtenderat facili negotio deducatur, ut jam ſtatim apparebit.

TAB.XXXVII. Fig. 3. Repetitâ enim quatenus hîc neceſſe erit figurâ ipſius, quæ eſt in propoſitione 99. lib. 9. Eſto Cylindrus Parabolicus, baſes oppoſitas habens parabolas A B D, V C E; à quo ſit abſciſſa Ungula A B C D, eâdem baſi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam ſeſquialteram, ſive quam 5 ad 2.

Tranſcriptis enim reliquis ex figura eadem, eſt F B diameter parabolæ A B D: & lineæ rectæ A B, B D. Ductâ porrò B C rectâ in ſuperficie cylindri, ſumptâque ejus quartâ parte C Q, abſcinditur plano P Q N ungula P Q C N & junguntur C A, C D. Denique toti cylindro adjuncta eſt pyramis A D γ C æqualis parti B X D E C, quæ à cylindro abſciſſa eſt plano B D E C. Et hactenus quidem ſufficiet nobis conſtructionem Cl. V. repetiiſſe. Demonſtravit autem hæc duo quæ ſequuntur, ſicut videre eſt in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod ungula A B C D eſt ad ungulam P Q C N, ſicut 32 ad 1. Item quod hæc ungula P Q C N eſt ad pyramidem totam A γ D B C, (quæ compoſita eſt ex duabus pyramidibus A D B C & A D γ C) ut 1 ad 30.

Erit igitur ex æquo ungula A B C D ad pyramidem A γ D B C ut 32 ad 30, hoc eſt, ut 16 ad 15. Porrò cùm parabolæ A B D octava pars ſit ſegmentum B D X, erit quoque ſegmentum ſolidum B X D E C vel huic æqualis pyramis A D γ C, octava pars cylindri totius parabolici A V C E D B: ſed pyramis altera A D B C æquatur duabus octavis ſive uni quartæ ejuſdem parabolici cylindri; (eſt enim ipſa tertia pars ſui priſmatis, quod æquale eſt tribus quartis cylindri iſtius, ut ex quadratura parabolæ conſtat) ergo tota pyramis A γ D B C tribus octavis æquatur cylindri parab. A V C E D B. Cylindrus igitur parabolicus A V C E D B erit ad pyramidem A γ D B C, ut 8 ad 3, hoc eſt, ut 40 ad 15; ſed oſtenſum eſt eandem pyramidem A γ D B C eſſe ad ungulam A B C D ut 15 ad 16. Igitur ex

ex æquo erit cylindrus parabolicus A V C E D B ad ungulam A B C D ut 40 ad 16, hoc est, ut 5 ad 2; quod fuit demonstrandum.

Quæ hîc dixi à Cl. Viro ostensa fuisse, verissima sunt, ac proinde non est quod de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonstr. adferre possem, longe ab ista diversam, nisi ad sequentia properarem.

Repetitâ igitur parte ultimâ schematis, quod suprà descripsimus, sit ostendendum, quod solidum M Ξ, id est, quod oritur ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S ad solidum Λ Σ, id est, quod oritur ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, eam habet rationem quam 53 ad 203. Describatur super E F parabola E Π F, axem habens P Π, quam constat esse quartam partem ipsius E F sive M E. Erit igitur parabola E Π F eadem quam V. Cl. in prop. 41. & 42. lib. 10. notat literis A R B. Ait autem in dicta prop. 42. & verissimum est, solidum quod producitur ex ductu plani E Σ L F in planum F Π M E æquari solido quod fit ex parabola E Π F ducta in se ipsam: sicut illud quoque quod subjungit in Coroll. 1. nimirum quod solidum ex plano S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, æquatur solido ex ductu plani S Φ Π P in se ipsum; unde similiter solidum ex plano E Ξ S in planum E M Λ S æquabitur solido ex plano E Φ S in se ipsum ducto. TAB. XXXVII. Fig. 2.

Oportet itaque ostendere solidum ortum ex plano E Φ S ad solidum ex plano S Φ Π P, utroque in se ipsum ducto, esse ut 53 ad 203.

Esto ungula parabolica A E F Π, cujus basis parabola E Π F repetita sit ex figura præcedenti; eodemque modo ut istic divisa lineis Π P, Φ S. Sit autem altitudo ungulæ A Π dupla diametri basis Π P. Erit igitur hæc ea ungula, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejusdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ E Π F in se ipsam. Eâdem nimirum consideratione usus quæ est in Scholio propos. 19. lib. 9. Nam alioqui ex ejusmodi ductu potius dicendum esset geminas ungulas produci, singulas altitudine æquales diametro TAB. XXXVII. Fig. 4.

tro Π P. Ducto deinde plano per A Π P, & alio huic parallelo D Φ S secundum lineam Φ S, erit jam pars ungulæ hisce duobus planis terminata, æqualis solido quod fit ex ductu plani S Φ Π P in se ipsum; & pars ungulæ E D S Φ, æqualis ei solido quod fit ex ductu plani E Φ S in se ipsum. Quare nunc demonstrandum erit duntaxat, partem E D S Φ esse ad partem Φ A P ut 53 ad 203, Sit Φ N parallela E P, & N C parallela Π A. Ergo quoniam ex proprietate Paraboles, P N est $\frac{1}{4}$ Π P, erit quoque P C $\frac{1}{4}$ A P. Verùm & S D æquatur $\frac{3}{4}$ A P, quum sit huic parallela *, sitque parábola E A F: Itaque junctâ C D, ea parallela & æqualis erit lineis P S, N Φ. Ducatur secundùm D C planum D B C parallelum basi E Π F, fietque semiparabola B D C æqualis & similis semiparabolæ Π Φ N; & erit Φ B N dimidius cylindrus parabolicus: D A C B verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur sicut antea ostendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, basin habentis D B C & altitudinem B A. Ergo quum semicylindrus Φ B N habeat altitudinem B Π triplam ipsius B A, erit ungula dimid. D A C B ad semicyl. Φ B N, ut 2 ad 15, hoc est, ut 8 ad 60.

* 11. 16. Lem.

Junctâ porro Φ Π, constat semiparabolam Π Φ N ad triangulum Π Φ N esse ut 4 ad 3; sed triangulus Π Φ N est ad rectangulum Φ P ut 1 ad 6, (est enim basis Π N tertia pars ipsius N P) hoc est, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit semiparab. Π Φ N ad rectang. Φ P ut 4 ad 18. Itaque & semicylindrus Φ B N est ad parallelepipedum ejusdem altitudinis super basi Φ P, ut 4 ad 18. Dicti autem parallelepipedi dimidium est prisma D N S; ergo semicylindrus Φ B N est ad prisma D N S, ut 4 ad 9, hoc est, ut 60 ut 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula D A C B erat 8, talium semicylindrus parab. Φ B N erat 60, (ut suprà ostensum est) taliumque prisma D N S erit 135. Ac proinde solidum A Π S D, quod ex istis tribus componitur, erit 203. Est autem ungula dimidiata A D C B ad dimidiatam ungulam E A P Π, ut 1 ad 32, sicut Cl. Vir. demonstravit in prop. 95. lib. 9. Ergo qualium partium ungula dimid.

A D C B

A D C B est 8, talium erit dimid. ungula E A P Π 256, quoniam ut 1 ad 32, ita est 8 ad 256. Diximus autem partem sol. A Π S D esse talium 203. Igitur dim. ungula E A P Π est ad partem A Π S D ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua E D S Φ ad partem A Π S D, ut 53 ad 203; quod erat demonstr. Ostendimus igitur illud quoque solidum, quod suprà diximus fieri ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S, eam habere rationem ad solidum ortum ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, quam 53 ad 203.

Tandem ad alterum eorum quæ demonstrare promisimus accedamus, repetitâque parte mediâ schematis triplicis quod suprà descriptum fuit, ostendendum sit; solidum ortum ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, ad solidum ex ductu plani R Θ Γ O in planum R Δ Z O eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus C D trianguli C D I, erigatur ad perpendiculum triangulum C K D, & jungatur K I. Erit jam pyramis C D I K illud solidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli C D I in triangulum C D K. Etenim sectâ pyramide plano A Z O Γ secundum O Γ, quod rectum sit ad basin C D I, erit sectio quadratum, id est, rectangul. quod fit ex lineis Γ O, O Z; eademque sectio dividet pyramidem bifariam. Secta item plano E Δ R Θ priori parallelo, secundùm lineam R Θ, existet inde rectangulum E R, quale continetur lineis Θ R, R Δ. Oportet itaque ostendere, quòd solidum K C R E Δ est ad solidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11. TAB. XXXVII. Fig. 2. Fig. 5.

Ducatur secundùm E Δ planum Δ E B parallelum basi C D I; abscindet illud pyramidem B E Δ K similem toti pyramidi C I D K, quæque proinde erit ad hanc in triplicata ratione laterum homologorum B Δ ad C D. Sed B Δ, cum sit æqualis ipsi C R, quarta pars est lateris C D. Itaque qualium partium pyramis B E Δ K est unius, talium pyramis C I D K erit 64: & dimidium hujus, hoc est, solidum K A O C erit 32. Qualium autem pyramis B E Δ K est unius talium quoque prisma B E R est 9; quoniam basin habent communem B E Δ, & prismatis altitudo B C tri-

pla eſt ad altitudinem pyramidis B K. Ergo ſolidum K C R E Δ quod ex hiſce duobus componitur, erit partium 10, qualium ſolidum K A O C eſt 32. Apparet igitur hoc eſſe ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo ſolidum K C R E Δ eſſe ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11: quod erat oſtendendum.

F I N I S.



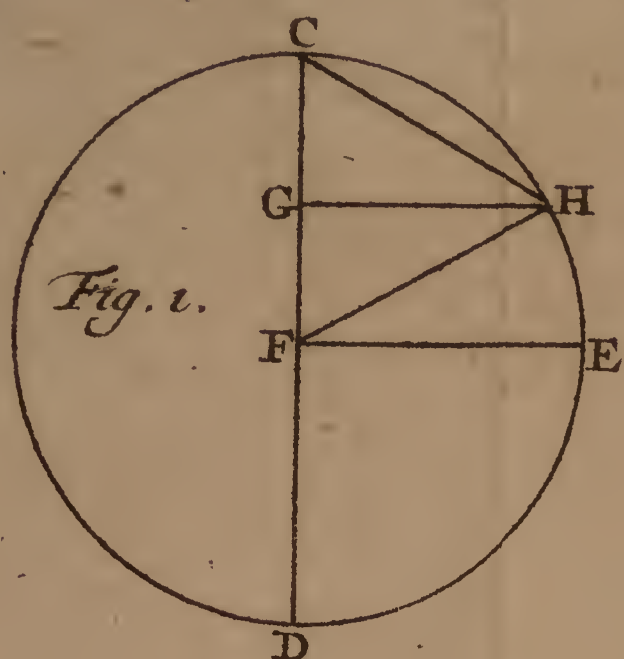


Fig. 1.

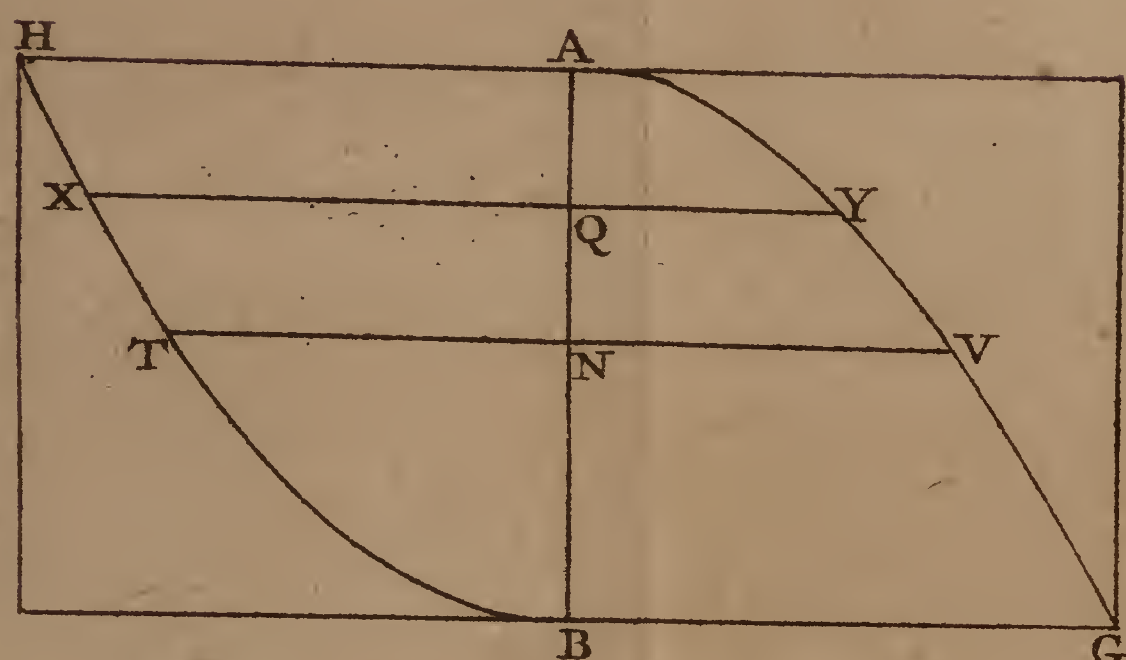


Fig. 2.

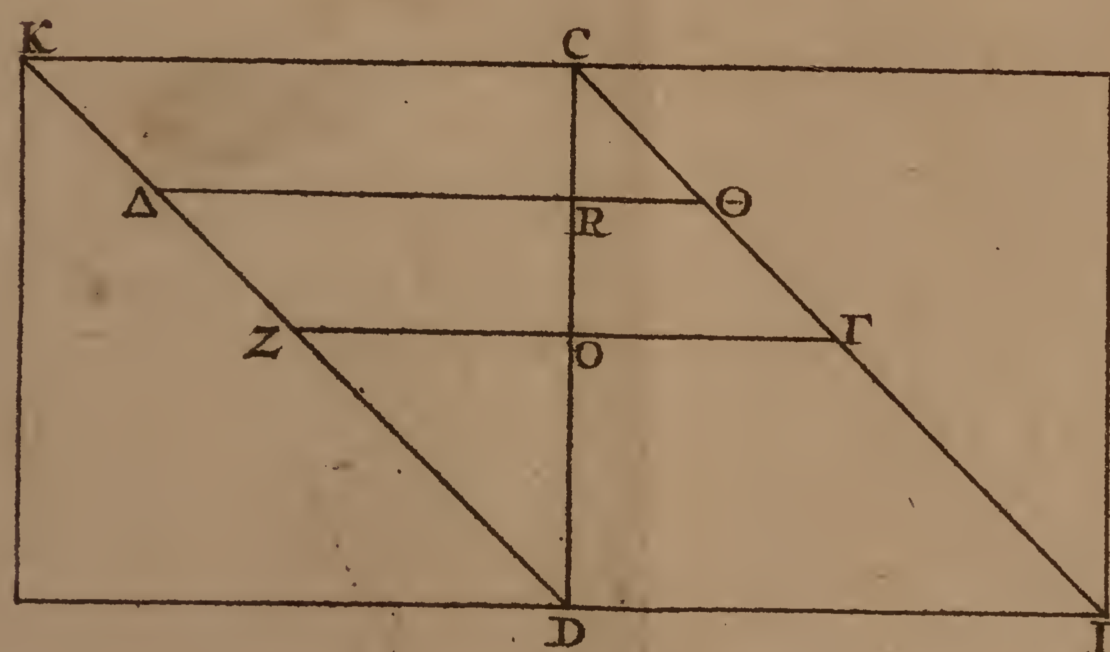
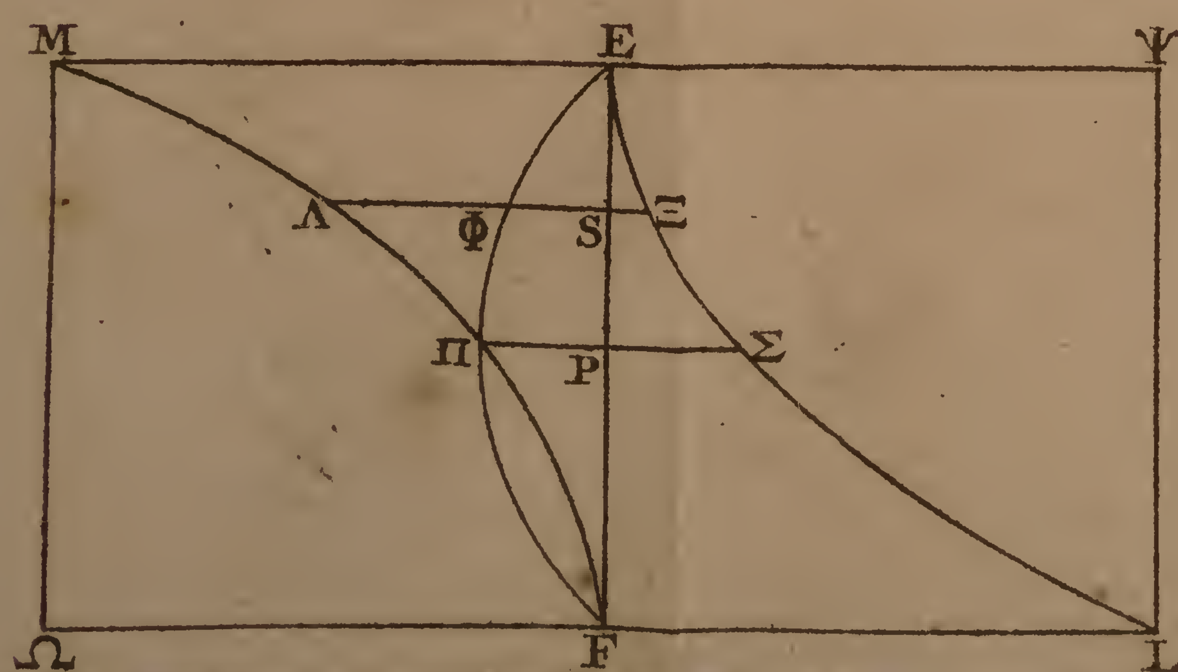


Fig. 2.



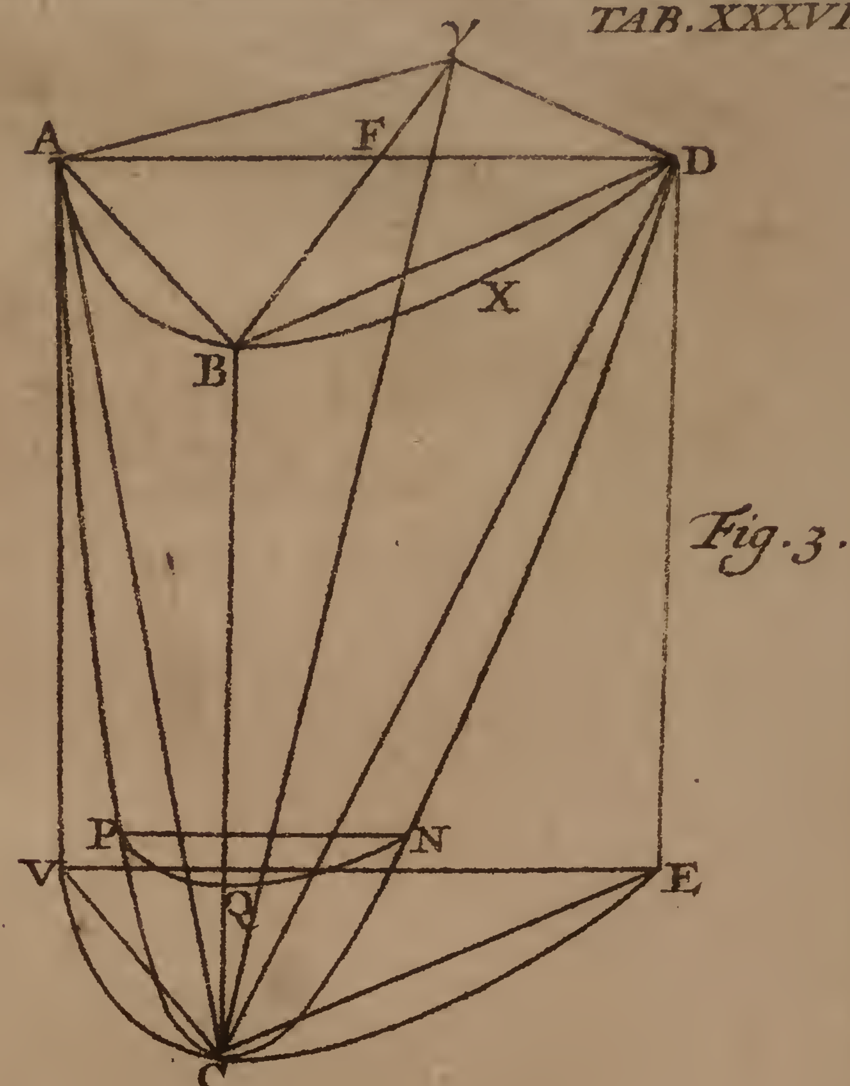


Fig. 3.

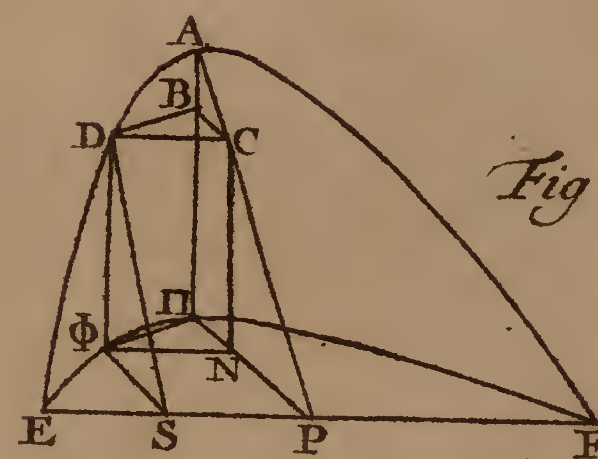


Fig. 4.

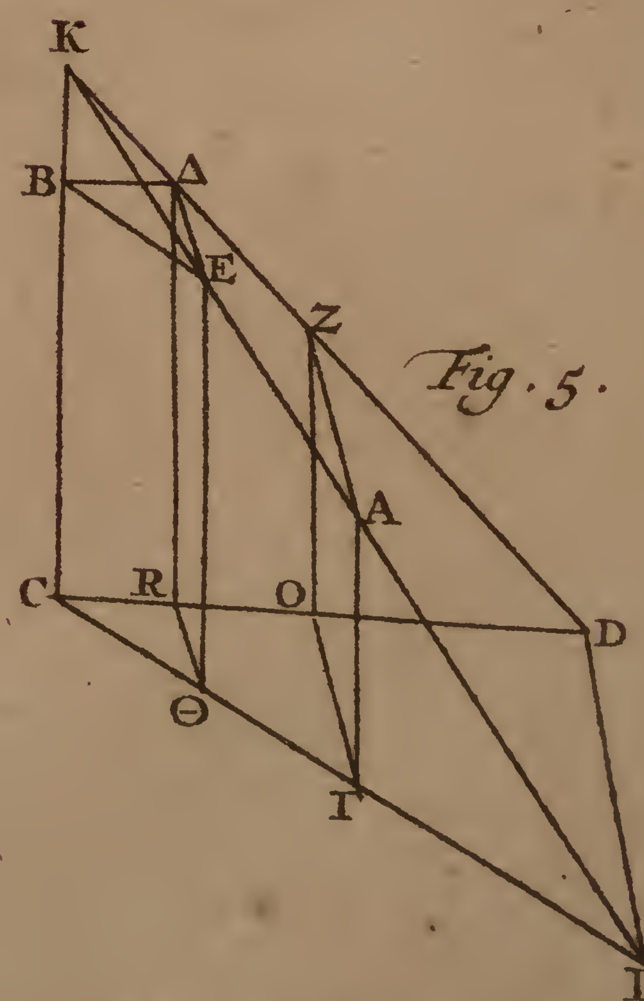
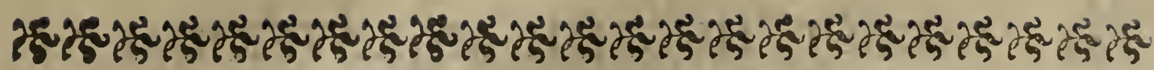


Fig. 5.

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.
AD
C. V. FRAN. XAVERIUM
AINSCOM. S.I.
EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii à Sto. Vincentio* impugnata fuit.



CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.
AD
C. V. FRAN. XAVERIUM AINSCOM. S. I.
EPISTOLA.

CL. VIRO D°. XAVERIO AINSCOM CHRISTIANUS HUGENIUS S. D.



Iber ille quem non ita pridem tuo nomine huc misit Apelles vester Segerus, tam mihi acceptus fuit, Vir Clariss. quam solent esse ea quorum diutina expectatio desiderium auget. Jam diu enim intellexeram te Quadraturæ Vincentianæ patrocinium suscepisse, novissiméque & Lovanio & Româ significatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quædam nostræ Exetasi dicata esset. Itaque cum avide totum commentarium tuum evolvi, tum accuratius reliquis illa expendi quæ propius ad me pertinebant. De quibus quid visum fuerit breviter tibi perscribere constitui. Equidem miratus sum, cum me non ultimum inter eos recenseas qui cæteris solidius in examinanda Quadratura vestra versati sint, postea tamen adeo nihili animadversiones omnes meas, omniáque argumenta prædicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant quidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, cœlo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minime sum assecutus. Veruntamen Viri Doctissimi funditus evertisse me commenta vestra pronunciavere, quorum judiciis, etsi vos fortasse non statis, apud intelligentes tamen multo pluris futura reor quam eo-

rum qui vobis de reperta Quadratura gratulantur. E societate vestra Vir eximius A. Tacquetus, *accurate sibi lectam esse multumque probari Exetasin nostram rescripsit, & recte me urgere autorem Quadraturæ, ut exhibeat, quoties ratio prima contineat secundam & secunda tertiam, idque nisi præstet, tertiam incognitam explicaturum nunquam; ac proinde non daturum quadraturam, quæ à notitia tertiæ illius rationis dependet.* Alter item apud vos est Clarissimus Gutschovius, quem passim profiteri scio magnos P. Gregorii conatus nostrâ operâ penitus concidisse. Neque aliter sentit Vir undiquaque Doctissimus & in Academia Oxoniensi Mathematum Professor J. Wallisius, idque publice testatum fecit in edito nuper subtilissimo opere de Infinitorum Arithmetica. Possemque & alios complures referre quorum pro me facit calculus, ni persuasum haberem in re Geometrica rationibus magis quam autoritate agendum. Neque enim dubito quin dicturus sis, eodem mecum errore ductos qui mihi applaudunt, ipsos quoque nihilo rectius penetrasse sensa autoris tui. Quare id agam potius, ut procul à me simul atque illis hanc, sive inscitiæ, sive oscitantiæ culpam amoliar. Prius autem ad alia quoque nonnulla quæ mihi objicis respondendum opinor. Variis allatis conjecturis verisimile reddere conatus eram, ex quatuor quadraturis eam à vobis præferri quæ prima ponitur. Hoc ita refutas, ut, quod ego præcipuum argumentum dixeram, dissimules prætereásque. Verum per me licet ut quo loco vobis visum erit primam quadraturam habeatis. Ego me abunde præstitisse arbitrabor si hanc absurdam esse evincam: cuique hoc planum fecero, eum non puto reliquarum trium confutationem expetiturum, imo, si offeratur, ne lecturum quidem. Etenim quod iisdem omnes principiis innitantur, Proportionalitatum nimirum doctrinæ atque ei quæ est de ductibus plani in planum, tam certum est, ut negari nulla ratione possit. Negas tu tamen hoc, crebroque inculcas, in prima hac quadratura, proportionalitatum consideratione, non uti autorem tuum. Sed miror qua fronte; cum non ignores utique propositionem 12. 39. & 40. libri 10. ex 8va. ejusdem libri demonstrari, hanc vero per 114. lib.

lib. 8. qui totus est de Proportionalitatibus.

Porro superfluam me ais operam sumpsisse, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, si credimus, multo antè quàm ego edidissem, imo quàm ipse editus essem, perspectas habuit aliisque demonstravit. Quæso cur non explicuit igitur, nosque ea levavit molestia? Nam certum erat plurimum ad absolvendam quadraturam, si modo absolvi posset, eorum notitiam conferre debere, planéque esse necessariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quæ cognosci posse aliquâ saltem ratione imaginamini, atque ea quæ liquido comperta fuerint. Itaque ad propos. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri asseris. Illa vero non magis ipsas expédit quam propositio postrema ejusdem libri, rationem quæ sit inter circulum & quadratum diametri. Prorsus huic simile est quod de Parabolica ungula respondes. Videlicet jam à triginta annis exploratum habuisse autorem tuum, quænam sit illius ad cylindrum suum proportio. Equidem ex iis quæ jam tradiderat, erui illam posse fassus sum; ipsum vero adhuc cujusmodi foret nescivisse, satis evidens argumentum videbatur, quod eam non exprimeret. Neque enim credibile, cujus theorematis gratia duodeviginti propositiones elucubrasset, id tanquam superfluum non esse adscripturum, si tam nullo negotio inveniri posse speraret. Parum intererat utrum propositione illud dignatus fuisset, (quod noluisse eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uspiam expressa est. Nam in eo quod adducis, hoc solum legitur, methodum traditam esse qua ratio ungulæ ad cylindrum quo continetur, investigari queat, eamque notam fore, si quorundam inter se corporum rationes inventæ fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quæ sit inter ungulam cylindrumque suum analogia, lectoribus disquirenda relinquuntur: idque ipse non nescis. Quare non satis ingenue hic me dissimulationis arguis, ubi ipse contra quam sentias, scribere videaris.

Jam vero de *palmari* errore quem mihi impingis videamus.

mus. Is circa verbum *continere* commissus est, ex quo non recte percepto factum est scilicet, ut, cum Quadraturam vestram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omnesque item, qui me labefecisse eam judicarunt, cæcutierint. Ego significationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quæ & P. Sarrasæ est, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, præterii. Igitur hic *palmaris* est error meus, quod nec P. Sarrasæ librum, nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortasse si scivissem explicationem vestram, propterea memorandam duxissem, cum parum adeo ad rem faciat, sitque monstrosa plane atque absona, uti ex adjecto specimine liquebit: quantum vero ea promoveritis deinde exponam. Propositio 40. lib. 10. est hujusmodi. *Iisdem positis, dico rationem solidi ex* R S *in* X Y *ad solidum ex* T V *in* Z &, *toties continere rationem solidi ex* I K *in* N O *ad solidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæc ipsa ratio continet rationem solidi ex* A B *in* E F *ad solidum ex* C D *in* G H. Quam propositionem *juxta mentem*, ut ais, *autoris*, (variatâ tantùm phrasi scilicet) sic nobis enarras. *Iisdem positis, dico rationem solidi ex* R S *in* X Y *ad solidum ex* T V *in* Z &, *constitui ex iis rationibus quæ toties multiplicatæ sunt illarum rationum ex quibus constituitur ratio solidi ex* I K *in* N O *ad solidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæ ipsæ rationes multiplicatæ sunt earum ex quibus constituitur ratio solidi ex* A B *in* E F *ad solidum ex* C D *in* G H.

Pulchra vero explanatio! quam quia ego pervidere non valui, sensum convenientem ratiociniis vestris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longe aliud scribere quam intelligi postulet? quisve magis adhuc intricatum sensum theorematibus jam nunc nimium obscuris affingere vellet? Omnes profecto qui vobis controversiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* accepisse nosti, neque ulli hoc incidisse, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* constituerentur. Ecce vero ut præter eos quorum animadversiones ad manus vestras pervenere, eadem plane quæ nobis,

nobis, circa has propositiones & significationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Cartesio, quem si minus insignem Geometram quam *Algebristam* fuisse arbitraris, parum ex vero judicas. Ejus ad amicum epistolæ copia mihi facta est, cum jam diu exetasis nostra prodiisset, quâ quoniam non tantum id quod dixi comprobatur, sed & tota insuper ad opus Geometricum P. à St.o Vincentio pertinet, integram hic adscribere visum est. Gallicè sic habet.

MONSIEUR.

J'Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je desirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j'avois bien de la peine à me resoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque chose & assez ce me semble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne soit facile, & qu'on ne pust escrire tout en une ou deux pages. Le reste n'est qu'un paralogisme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propositions qui ne servent qu'à embroüiller la matiere, & sont tressimples & facilles pour la pluspart, bien que la façon dont il les traite, les face paroistre un peu obscures. Pour trouver son paralogisme, j'ai commencé par la 1134e *page, ou il dit: Nota autem est proportio segmenti* LMNK *ad segmentum* EGHF, *ce qui est faux, & la preuve qu'il en donne est fondée sur la* 39e *proposition en la page* 1121. *du mesme livre, ou il y a une erreur tresmanifeste, qui consiste en ce qu'il veut appliquer à plusieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des mesmes quantitez divisées. Car par exemple, ayant les* 4. *ordres de proportionelles*

2, 4, 8, & 2, 8, 32.

2, 6, 18, & 2, 10, 50.

bien qu'il soit vray que 8. *est à* 32. *en raison duoblée de ce que* 4. *est à* 8. *Et que* 18. *est aussi à* 50. *en raison doublée de ce que* 6. *est à* 10. *il n'est pas vray pour cela que* 8 + 18. *c'est à dire* 26. *soit à* 32 + 50. *c'est à dire* 82. *en raison double de celle qui est entre* 4 + 6. *c'est à dire* 10, & 8 + 10, *c'est à dire* 18. *Tous ses raisonnements ne sont fondez que sur cette faute, & ce qu'il escrit de*

Proportionalitatibus & de Ductibus, ne sert qu' à l'embarasser, & ne me semble d' aucun usage, pour ce que frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.

Quorum latinè hæc est sententia.

Libros tuos retinui diutius, quod remittere eos nolebam quin simul opinionem meam tibi exponerem de nova ista quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipso impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnulla in iis delibavi, è quibus satis tutò mihi pronunciare posse videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile sit; unâque aut alterâ paginâ explicari potuerit. Cætera merum paralogismum de quadratura circuli continent, multis propositionibus implicitum, quæque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleræque vero simplicissimæ sunt & facili ratione constant, licet tractandi methodus obscuriores reddiderit. Paralogismum quærere institui, initio facto ad paginam 1134. *ubi hoc ait: Nota autem est proportio segmenti* L M N K *ad segmentum* E G H F; *quod falsum est, pendet enim hujus demonstratio à propositione* 39, *pag.* 1121. *ejusdem libri, ubi manifestus error occurrit, dum pluribus quantitatibus conjunctim applicatur, quod de singulis seorsim fuerat ostensum. Etenim ex. gr. positis quatuor proportionalium ordinibus*

2,	4,	8,	&	2,	8,	32,
2,	6,	18,		2,	10,	50,

licet verum sit rationem 8. *ad* 32. *duplicatam esse ejus quæ* 4. *ad* 8. *itemque rationem* 18. *ad* 50. *duplicatam esse ejus quæ* 6. *ad* 10. *non tamen idcirco verum est* 8 † 18. *hoc est,* 26. *esse ad* 32 † 50. *hoc est ad* 82. *in ratione duplicata ejus quæ* 4 † 6. *hoc est,* 10. *ad* 8 † 10. *hoc est,* 18. *Unicum ei fundamentum hæc vitiosa argumentatio; quæque de Proportionalitatibus scribit & de Ductibus, tantum majoribus ipsum difficultatibus involvunt, neque alicujus usus videntur, siquidem frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.*

Vides, Vir Egregie, neque Cartesium, vestrum illud *Hoc est juxta mentem autoris*, agniturum fuisse, sed potius, quod res est, dicturum, desperatâ causâ hoc vobis effugium quæsitum, ut quadratura vestra ad instar Protei cujusdem aliâ atque aliâ

aliâ assumptâ formâ quantumlibet arctè sese constringentibus elaberetur. Verum age, inspiciamus jam quo rem deducas, postea quam verbi *continere* novam significationem elicuisti, eâque vetera theoremata tam scitè interpolasti. In Corollario propositionis 40. lib. 10. quò tam sæpe provocas, id unum egisse videris, unas ex aliis difficultates nectendo, ut si quis argumentationis tuæ tenorem consectari cupiat, is defessus absistat priusquam ad finem pervenerit. Ego ad eum usque locum te secutus sum, ubi spatia Y & Z assumi jubes: Inde non ulterius procedendum putavi. Adeo enim manifesto vitio atque ἀγεωμετρησίας ibi laborat constructio tua, ut tibimet ipsi exploratum id esse dubitare nequeam: sed quoniam alia evadendi ratio non occurrebat, sperasti, credo, in tanta obscuritate nemini illud facile animadversum iri. *Dein*, inquis, *assumantur duo plana Hyperbolica* Y & Z, *rectis alteri asymptotorum parallelis inclusa*. Nullâ aliâ præcautione assumuntur quam quod rectis alteri asymptotorum parallelis includi ea necesse sit. De magnitudine utriusque aut ratione quam inter se servare debeant nihil præcipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unum quodque eorum abscindi poterit. Mox tamen rationem spatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare instituis, quas prius secundum certam determinationem assumpsisti, tibique hoc demonstrandum proponis, *Rationem totalem planorum* X *ad* T *tam esse multiplicem rationis totalis planorum* Y *ad* Z, *quàm ratio totalis solidorum* G H *ad* I K *multiplicata est rationis totalis solidi* L M *ad* N O. Quidnam, quæso, absurdius, quam de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quæ prorsus incerta sit ac vaga? Equidem ex hoc solo satis liquere puto, quam frustra primæ Quadraturæ suppetias ferre tentaveris, cum in eo quod præcipuè tibi explicandum erat, tam insigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ usus sis, si me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen scito perpetuum adversus vos argumentum fore, quod rationem peripheriæ ad diametrum quam singulis quadraturis datam esse profitemini, ipsi tamen exhibere non potestis; non autor ipse Quadraturæ, non tot ejus discipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus Ilium expugnatum sit. Datam esse rationem, Euclides definivit, cui

poſſumus æqualem invenire. Quis autem ad veſtram illam hoc pertinere credet, quæ irrito labore toto decennio quæſita eſt? Nam quod ſufficere exiſtimatis ſi modo viam commonſtraveritis quâ emensâ ad quæſitum perveniatur, obſtacula vero, atque innumeras difficultates quibus præſepta eſt, non removetis, videte cui perſuadere poſſitis, eâ ratione tetragoniſmi negotium à vobis confectum eſſe. Illud ſanè vos conſequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minus expoſiti ſitis ad promiſcuos omnium inſultus, difficilius etiam à peritioribus oppugnemini, paratioremque habeatis receptum. Facile enim acrius inſtantes proportionum & proportionalitatum veſtrarum tenebris involvere poteſtis, atque efficere ut tandem veluti nox prælium dirimat. Hoc ipſum ne mihi eveniret, cum exetaſin Quadraturæ conſcriberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri poſſet, autorem ad abſurdum compellerem, nimirum ut vel nolle ſe vel non poſſe Quadraturam ſuam abſolvere fateretur. Eo fine ignota prius atque informia corpora dimenſus ſum, exhibitiſque prioribus duabus ſolidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quam cognitis illis notam dixiſſet. Ad quas anguſtias redactum non aliâ ratione defendis, quam expoſtulando mecum quod autori tuo modum præſcribere præſumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid* & *cui* ſcribam. Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec præſcribo; ſed hoc urgeo; ut quem ille modum ſe inveniſſe contendit, eum reapſe utilem & efficacem eſſe demonſtret. Atque ita, quid ſcripſerim & in quem finem, me non neſciviſſe, ſatis jam tibi conſtare arbitror. Cui vero ſcripſerim, ne hoc quidem puto me oblitum fuiſſe. Vides autem quam hac in parte longe diverſum ſonent Carteſii literæ atque Elogia veſtra: quorum utris potius ſubſcribendum ſit aliorum judicio decerni malim quam meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturæ ſcire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quanto maturius ab errore ſuo reſipiſcet. Vale.

Dat. Hagæ-Com. 2. Oct.
1656.

CHRISTIANI HUGENII,

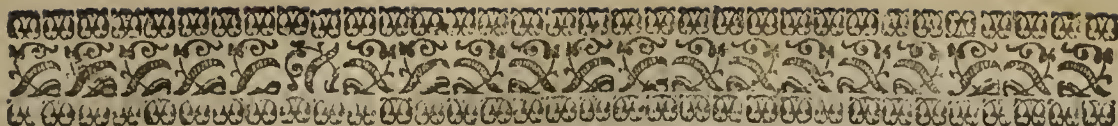
CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

ACCEDUNT EJUSDEM

Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones.



PRÆFATIO.



Irca antiquum Tetragonismi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil est celebrius, recens operæ pretium nos fecisse rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus consecuti, Geometris ea demonstrata impertiri volumus. Namque & studiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipsâ ad rerum abditarum investigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem summâ contentione versati sint, aliqua superfuisse haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam sibi asserere conati sunt, variaque subinde commenta protulere, falsis vera miscentes. Verum à peritioribus omnia vel eversa fuisse vel contempta scimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimensio niteretur, præter unum illud, majorem esse eum inscripto sibi polygono, circumscripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus ostendimusque, quod duobus sumptis polygonis proportione mediis inter inscriptum circumscriptumque ipsis simile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli major existit, reliquum vero

ro polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat. *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonstraturi sumus & difficillimum & contemplatione præcipue dignum videatur, alia tamen sunt non accuratiora modò, sed quæ & usu magis probentur; quæ sane hic in antecessum non recensebimus, quippe in sequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid studiis Geometriæ conferant exposuisse proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propositi tractationem instituerimus, primum ea tradendo quorum demonstratio consuetis Geometriæ elementis contenta est, deinde centrorum gravitatis quoque considerationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti, sed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda sit; expeditâ ratione ad Mechanicas constructiones, quæque vel subtilissimas earum minime frustretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum* 96 *eruit, per dodecagona sola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum* 10800, *cum iis qui veterem insistunt viam vix hi peripheriæ termini existant* 62831852 *&* 62831855, *ad diametrum partium* 20000000, *nostrâ Methodo isti prodiisse cernentur*, 6283185307179584, 6283185307179589; *semperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona*

gona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere perspeximus sicuti & quadratum cujusque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque constituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas subministrat, & propius quodammodo ad perfectionem insuperabilis problematis per hæc accessisse videmur. Certe ad Archimedeos peripheriæ limites constituendos, solo nunc inscripti trigoni cognito latere indigemus. E sexagintangulo autem inter hosce eam contineri probamus 314159265338 & 314159265333, *positâ diametro partium* 10000000000, *cum solitâ methodo vix isti producantur* 3145, 3140. *Adeo ut triplus jam & ultra sit verarum hîc notarum numerus, sicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem successu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum sui lateris triplum esse animadvertitur. Ergo posthac si qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numerosa polygona non refutabuntur, sed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris insimulare, quod hactenus ferè soliti sunt, haud facile possint. Ad hæc si quid in subtensarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes sciunt, in eo contexendo si quid erit admissum aut aliunde perversum irrepserit, non difficile erit horum ope restituere, cum aliâ nunc ratione ex inscriptis in circulo longitudinem arcuum quibus subtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio destitutis osten-*

ostendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum investigare queant, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit à vero dissensus, sæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda visum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum Cartesium, cujus viri inventis cum Philosophia universa tum Mathesis plurimùm illustrata est, nonnulla quæ huc spectent scriptis mandasse. Ea vero defuncto ipso in commentariis reperta feruntur, neque adhuc rescire potuimus quâ industriâ aut eventu hisce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus extat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset. Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minime comprobant: ipsa vero theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus meritò inserenda putavimus, quod causæ eorum à nostris pendeant inventis.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.
DE
CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI Circuli portioni, semicirculo minori, triangulum maximum inscribatur, & portionibus reliquis triangula similiter inscribantur, erit triangulum primo descriptum duorum simul quæ in portionibus reliquis descripta sunt minus quam quadruplum.

Esto circuli portio A B C, semicirculo minor, cujus diameter B D; maximum autem inscriptum sit triangulum A B C, hoc est, quod basin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inscribantur triangula item maxima A E B, B F C. Dico triangulum A B C minus esse quam quadruplum triangulorum A E B, B F C simul sumptorum. Jungatur enim E F, quæ secet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus A B bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum E A, E B, major dimidiâ A B. Quamobrem quadratum A B minus erit quam quadruplum quadrati E B vel E A. Sicut autem quadratum A B ad quadr. E B, ita est D B ad B G longitudine; quia quadratum quidem A B æquale est rectangulo quod à D B & circuli totius diametro continetur, quadratum vero E B æquale rectangulo sub eadem diametro & recta B G. Minor igitur est B D quam quadrupla B G. Sed & A C minor est quam dupla E F, quoniam hæc ipsi A B æquatur. Ergo patet triangulum A B C minus esse quam octuplum tri- TAB.XXXVIII. Fig. 1.

 anguli

anguli E B F. Huic autem triangulo æquantur ſingula A E B, B F C. Ergo utriuſque ſimul triangulum A B C minus erit quam quadruplum. Quod erat oſtendendum.

Theor. II. Prop. II.

Si fuerit circuli portio, ſemicirculo minor, & ſuper eadem baſi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abſcindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem deſcripti.

TAB.XXXVIII. Fig. 2. Eſto circuli portio ſemicirculo minor A B C, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos baſis rectæ A E, C E, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio ſemicirculo minor eſt. Porro ducatur F G, quæ contingat ipſam in vertice B;& jungantur A B, B C. Oſtendendum eſt itaque, triangulum F E G majus eſſe dimidio trianguli A B C. Conſtat triangula A E C, F E G, item A F B, B G C æquicruria eſſe, dividique F G ad B bifariam. Utraque autem ſimul F E, E G, major eſt quam F G; ergo E F major quam F B, vel quam F A. Tota igitur A E minor quam dupla F E. Quare triangulum F E G majus erit quarta parte trianguli A E C. Sicut autem F A ad A E, ita eſt altitudo trianguli A B C ad altitudinem trianguli A E C, & baſis utrique eadem A C. Ergo, quum F A ſit minor quam ſubdupla totius A E, erit triangulum A B C minus dimidio triangulo A E C. Hujus vero quarta parte majus erat triangulum F E G. Ergo triangulum F E G majus dimidio trianguli A B C. Quod oſtendendum fuit.

Theor. III. Prop. III.

Omnis circuli portio, ſemicirculo minor, ad maximum triangulum inſcriptum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam.

Eſto

Esto Circuli portio, semicirculo minor, cui maximum sit inscriptum triangulum A B C. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inscribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula A D B, B E C. Itaque minus est triangulum A B C quam illorum simul quadruplum *: ac proinde spatium aliquod adjungi potest triangulo A B C, quod una cum ipso minus etiam sit quam quadruplum dictorum simul triangulorum A D B, B E C. Esto itaque eâ ratione adjectum triangulum A F C, ut totum spatium A B C F minus sit quam quadruplum triangulorum A D B, B E C. Et porro in residuis portionibus maxima triangula inscribi intelligantur; itemque in residuis semper, donec portiones quibus postremùm inscribentur simul minores sint triangulo A C F, hoc enim fieri potest. Itaque & triangula postremùm inscripta simul triangulo A C F minora erunt. Quia autem spatii A B C F quarta parte majora sunt duo simul triangula A D B, B E C. Rursusque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inscribuntur. Et horum quartâ majora similiter, quæ deinceps: atque ita continue, si plura fuerint descripta. Erit propterea spatium ex quadrilatero A B C F & cæteris inscriptis triangulis, & triente eorum, quæ postremò inscripta erunt, compositum, majus quam sesquitertium ipsius quadrilateri A B C F. Hoc enim ab Archimede demonstratum est, quod si fuerint spatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia simul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt sesquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones A D B, B E C descripta cum triente postremo discriptorum majora erunt tertia parte spatii A B C F. Sed triens dictus minor est triente trianguli A C F. Igitur dempto illinc triente postremò inscriptorum; à spatio autem A B C F ablato triangulo A F C, erunt triangula omnia intra portiones A D B, B E C descripta, majora triente trianguli A B C *. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni A B C inscripta major quam sesquitertia trianguli A B C, multoque magis portio ipsa. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 3.

* per. 1. huj.

* 33. 5. Elem.

 THEOR.

Theor. IV. Prop. IV.

Omnis circuli portio, semicirculo minor, minor est duabus tertiis trianguli eandem cum ipsa basin habentis, & latera portionem contingentia.

TAB.XXXVIII, Fig. 4. Esto circuli portio, semicirculo minor, A B C, & contingant ipsam ad terminos basis rectæ A D, C D, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem A B C minorem esse duabus tertiis trianguli A D C. Ducatur enim E F quæ portionem contingat in vertice B, & inscribatur ipsi triangulum maximum A B C. Quum igitur triangulum E D F majus sit dimidio trianguli A B C *, manifestum est ab illo partem abscindi posse, ita ut reliquum tamen majus sit dimidio dicti A B C trianguli. Sit igitur hoc pacto abscissum triangulum E D G. Et ducantur porro rectæ H I, K L, quæ portiones reliquas A M B, B N C in verticibus suis contingant, ipsisque portionibus triangula maxima inscribantur. Idemque prorsus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones residuæ simul minores sint quam duplum trianguli E D G. Erit igitur inscripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumscripta. Et quoniam triangulum E G F majus est dimidio trianguli A B C; & rursus triangula H E I, K F L, majora quam dimidia triangulorum A M B, B N C; idque eadem semper ratione in reliquis locum habet, ut triangula super portionum verticibus constituta, eorum quæ intra portiones ipsas descripta sunt, majora sint quam subdupla: apparet triangula omnia extra portionem posita etiam absque triangulo E G D majora simul esse quam dimidia triangulorum omnium intra portionem descriptorum. Atqui segmentorum in portione reliquorum triangulum quoque E G D majus est quam subduplum. Ergo triangulum E D F simul cum reliquis triangulis, quæ sunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius A B C. Quare multo magis spatium à rectis

* per. 2. huj.

rectis A D, D C & arcu A B C comprehensum majus erit portionis A B C dimidio. Ac proinde triangulum A D C majus quam portionis A B C sesquialterum. Quod erat demonstrandum.

Theor. V. Prop. V.

Omnis circulus major est pylogono æqualium laterum sibi inscripto & triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.

Esto circulus centro C; sitque ipsi inscriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum sit A B. Atque alterum item polygonum sit inscriptum, cujus bina latera A D, D B, subtendat A B. Hoc igitur priore polygono majus est. Sit autem excessus trienti æquale H spatium. Dico circulum majorem esse polygono A D B una cum spatio H. Ducantur enim ex centro rectæ C A, C B. Quoniam igitur portio circuli A D B major est quam sesquitertia trianguli A D B sibi inscripti *; erunt portiones A D, D B, simul majores triente trianguli A D B. Quamobrem & sector C A B major erit utrisque simul quadrilatero C A D B & triente trianguli A D B. Sicut autem sector C A B ad circulum totum, ita est quadrilaterum C D B A ad polygonum A D B, & ita quoque triens trianguli A D B ad trientem excessus polygoni A D B supra polygonum A B. Ergo manifestum est circulum quoque totum majorem fore polygono A D B una cum triente excessus quo polygonum A D B superat polygonum A B, hoc est, unà cum spatio H. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 5.

* per. 3. huj.

Theor. VI. Prop. VI.

Omnis circulus minor est duabus tertiis polygoni æqualium laterum sibi circumscripti & triente polygoni similis inscripti.

Esto

TAB. XXXVIII. Fig. 6. Esto circulus cujus centrum A, & inscribatur ipsi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum sit B C; & aliud simile circumscribatur F E G, cujus latera circulum contingant ad occursum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem esse duabus tertiis polygoni F E G simul cum triente polygoni B C. Ducantur namque ex centro rectæ A B, A C. Igitur quoniam super basi portionis B D C consistit triangulum B E C, cujus latera portionem contingunt, erit ipsa minor duabus tertiis trianguli B E C *. Itaque si triangulo A B C addantur duæ tertiæ trianguli B E C, hoc est, duæ tertiæ excessus quadrilateri A B E C supra triangulum A B C, ex utrisque compositum spatium majus erit sectore circuli A B C. Idem est autem, sive triangulo A B C addantur duæ tertiæ excessus dicti, sive addantur duæ tertiæ quadrilateri A B E C, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli A B C: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri A B E C cum triente trianguli A B C. Ergo apparet sectorem A B C minorem esse duabus tertiis quadrilateri A B E C & triente trianguli A B C. Quare sumptis omnibus quoties sector A B C circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumscripti F E G & triente inscripti B C. Quod erat ostendendum.

* per. 4. huj.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia major est perimetro polygoni æqualium laterum sibi inscripti, & triente excessus quo perimeter eadem superat perimetrum alterius polygoni inscripti subduplo laterum numero.

TAB. XXXVIII. Fig. 7. Esto circulus A B, centro O, cui inscribatur polygonum æquilaterum A C D, atque alterum duplo laterum numero A E C B D F. Sitque recta G I æqualis perimetro polygoni A E C B D F, G H vero æqualis perimetro polygoni

goni A C D. Excessus igitur perimetrorum est H I; cujus triens I K adjiciatur ipsi G I. Dico totâ G K majorem esse circuli A B circumferentiam. Inscribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum A L E M C, quod sit duplo numero laterum polygoni A E C B D F. Et super lineis G H, H I, I K, triangula constituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis semidiametro circuli A B. Igitur quoniam G H basis æqualis est perimetro polygoni A C D, erit triangulum G N H æquale polygono, cui bis totidem sunt latera, hoc est, polygono A E C B D F. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis O A & O E, quarum hæc secet A C in P. Nam triangulum quidem A E O æquale est triangulo basin habenti A P & altitudinem radii O E. Quanta autem pars est triangulum A E O polygoni A E C B D F, eadem est recta A P perimetri A C D. Itaque polygonum A E C B D F æquabitur triangulo cujus basis æqualis perimetro A C D, altitudo autem radio E O: hoc est, triangulo G N H. Eadem ratione, quoniam basis G I est æqualis polygoni A E C B D F perimetro, & altitudo trianguli G N I æqualis radio circuli, erit triangulum G N I æquale polygono A L E M C. Itaque triangulum H N I æquale excessui polygoni A L E M C supra polygonum A E C B D F. Trianguli autem H N I subtriplum est ex constr. triangulum I N K. Ergo hoc æquale erit dicti excessus trienti. Quare totum triangulum G N K minus erit circulo A B *. Altitudo autem trianguli æqualis est circuli semidiametro. Ergo evidens est rectam G K totâ circuli circumferentiâ minorem esse. Quod erat ostendendum.

* per 5. huj.

Hinc manifestum est, si à sesquitertio laterum polygoni circulo inscripti auferatur triens laterum polygoni alterius inscripti subduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus esse. Idem enim est, sive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ excessus quo ipsa superat perimetrum minorem, sive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit sesquitertium majoris perimetri mi-

nus triente minoris. Quare si à sexdecim inscripti dodecagoni lateribus duo latera inscripti hexagoni, hoc est, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit, aut si ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ semisse. Hoc autem ad constructionem mechanicam utile est, quoniam exigua est differentia, sicut postea ostendetur.

Manifestum etiam, in omni arcu qui semicircumferentiâ minor sit, si ad subtensam addatur triens excessus quo subtensa sinum superat, compositam arcu minorem esse.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, si ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab opposito diametri termino quæ circumferentiam secet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab intersectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, simul arcu abscisso adjacente majores.

TAB. XXXVIII. Fig. 8. Esto circulus centro A, diametro B C; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat C D: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta B D, quæ circumferentiam secet in E: sitque E F diametro B C ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ C D duas tertias simul cum triente ipsius E F, arcu E C majores esse. Jungantur enim A E, E C; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti C D occurrat in G. Erit igitur G E ipsi G C æqualis, itemque D G; nam si centro G circumferentia describatur quæ transeat per puncta C, E, eadem transibit quoque per D punctum, quoniam angulus C E D rectus est. Ostensum autem fuit suprà, duas tertias quadrilateri A E G C una cum triente trianguli A E C simul majores esse sectore A E C *. Estque quadrilaterum A E G C æquale triangulo basin habenti

* per 6. huj.

benti duplam C G, hoc est, C D, & altitudinem C A: triangulum vero A E C æquale triangulo basin ipsi E F æqualem habenti & altitudinem dictam A C. Itaque apparet duas tertias quadrilateri A E G C simul cum triente trianguli A E C æquari triangulo qui basin habeat compositam ex duabus tertiis C D & triente E F, altitudinem vero radii A C. Quare ejusmodi quoque triangulum majus erit sectore A E C. Unde liquet basin ipsius, hoc est, compositam ex duabus tertiis ipsius C D & triente ipsius E F, majorem esse arcu C E. Quod erat demonstrandum.

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor est duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum sibi inscripti & triente perimetri polygoni similis circumscripti.

Esto Circulus cujus A centrum; & inscribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus C D: simileque aliud circumscribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum sit E F. Dico circuli totius circumferentiam minorem esse duabus tertiis ambitus polygoni C D & triente ambitus polygoni E F. Ducatur namque diameter circuli B G, quæ simul inscripti polygoni latus C D medium dividat in H, & circumscripti latus E F in G, (constat autem G fore punctum contactus lateris E F,) Et ponatur H L æqualis ipsi H G, & jungantur A C, B C & producantur, occurrátque B C lateri E F in K, producta autem A C incidet in E angulum polygoni circumscripti. Quoniam igitur H L æqualis H G, erit B L dupla ipsius A H: Ideoque ut G A ad A H, ita G B ad B L. Major autem est ratio H B ad B L, quam G B ad B H; quoniam hæ tres sese æqualiter excedunt G B, H B, L B. Itaque major erit ratio G B ad B L, hoc est, G A ad A H, quam duplicata rationis G B ad B H. Sicut autem G A ad A H, ita est E G ad C H; & sicut G B TAB. XXXIX. Fig. 1.

ad B H, ita K G ad C H. Ergo major erit ratio E G ad C H, quam duplicata ejus, quam habet K G ad C H. Quare major ratio E G ad K G, quam K G ad C H. Ideoque duæ ſimul E G, C H omnino majores duplâ K G. Et ſumptis omnium trientibus, erunt trientes utriuſque E G & C H ſimul majores duabus tertiis K G. Quamobrem addito utrimque ipſius C H triente, erit triens E G cum duabus tertiis C H, major duabus tertiis K G cum triente C H. Hiſce
* per præced. vero minor etiam eſt arcus C G *. Igitur duæ tertiæ C H ſimul cum triente ipſius E G majores omnino ſunt eodem arcu C G. Unde ſumptis omnibus toties quoties arcus C G circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni C D, cum triente perimetri polygoni E F, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat oſtendendum.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor eſt ſinus ſui beſſe & tangentis triente.

PROBLEMA I. PROP. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

MInorem eſſe peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam ſeſquiſeptimam: majorem vero quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes oſtendit inſcripto circumſcriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonſtrabimus.

Quia enim latus inſcripti circulo dodecagoni majus eſt partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc eſt, perimeter inſcripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inſcripti eſt radii ſextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens exceſſus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente exceſſus, quo perimetrum hexagoni ſuperat, major erit aggregato partium

$62116\frac{1}{2}$

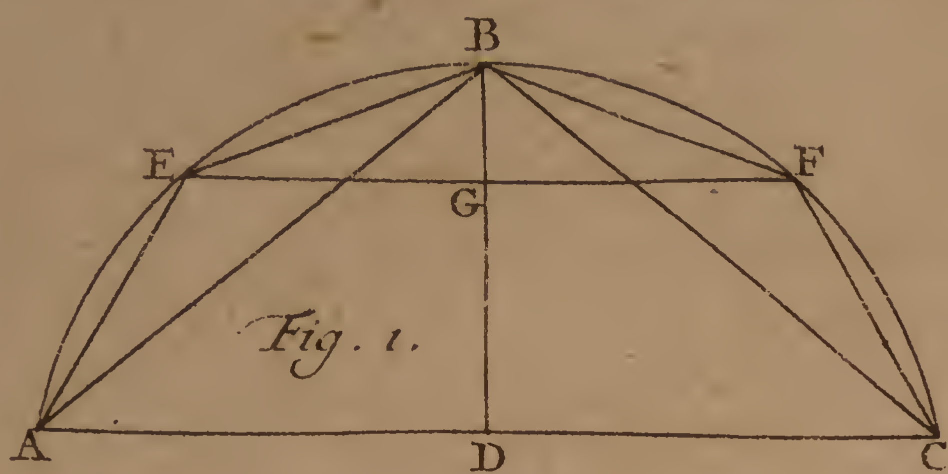


Fig. 1.

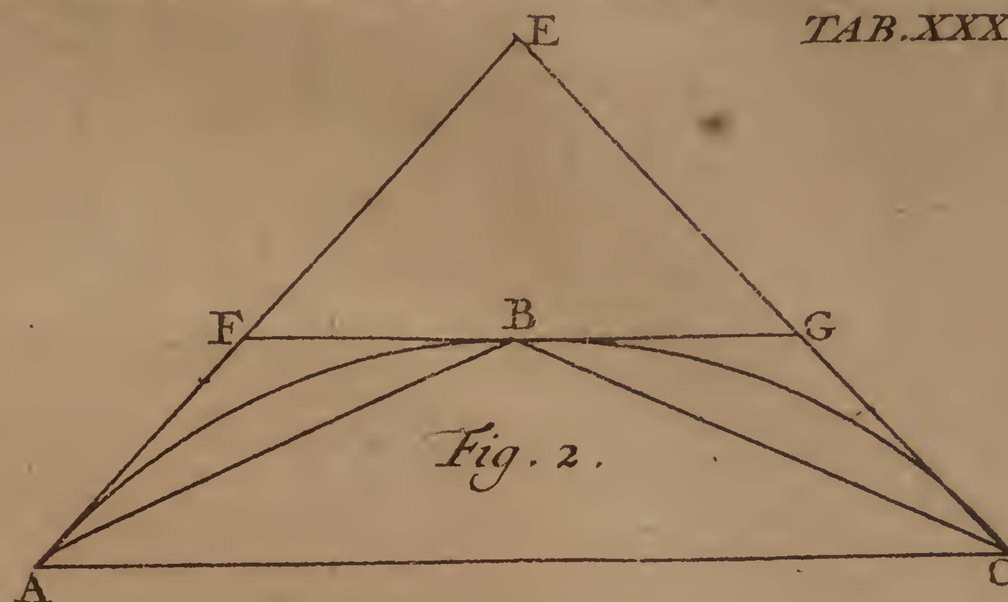


Fig. 2.

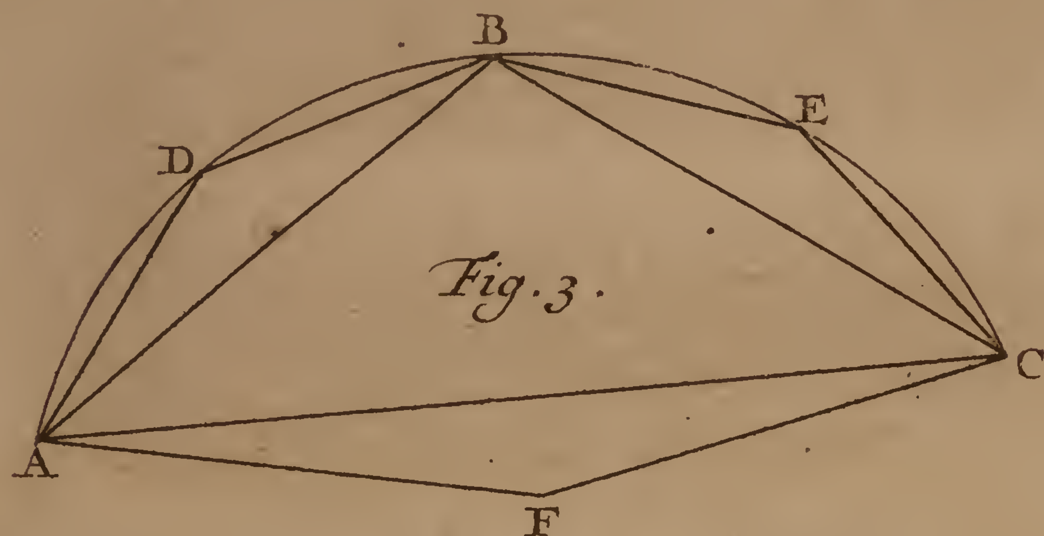


Fig. 3.

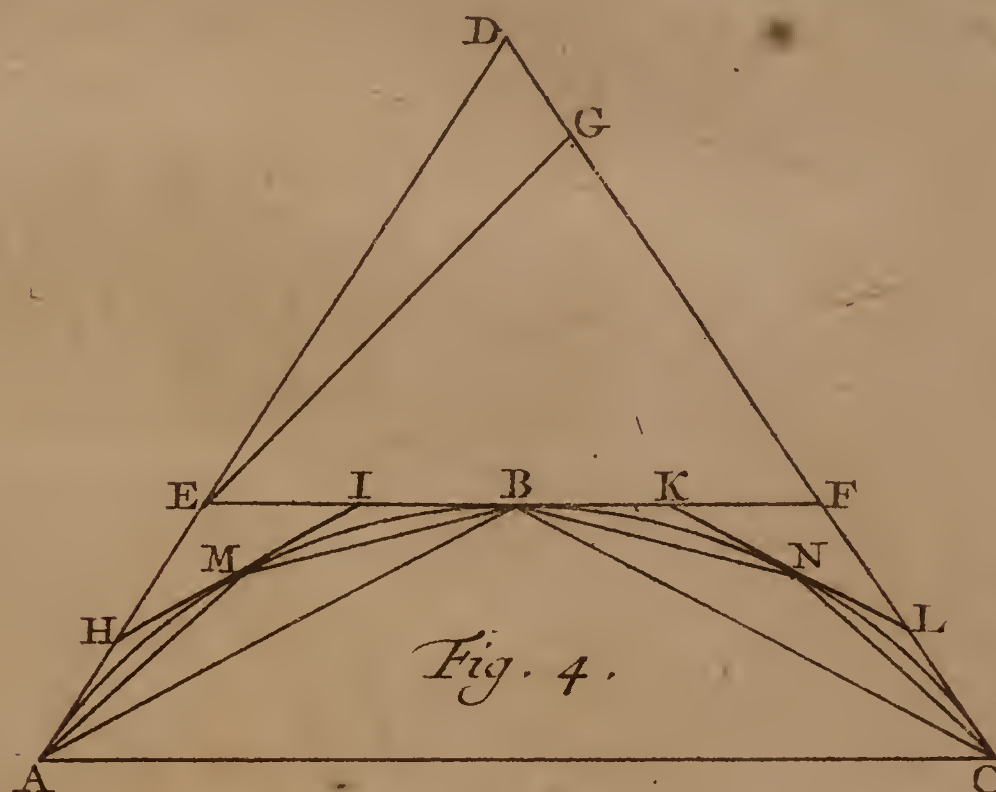


Fig. 4.

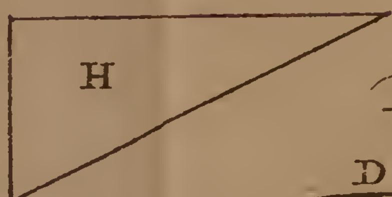
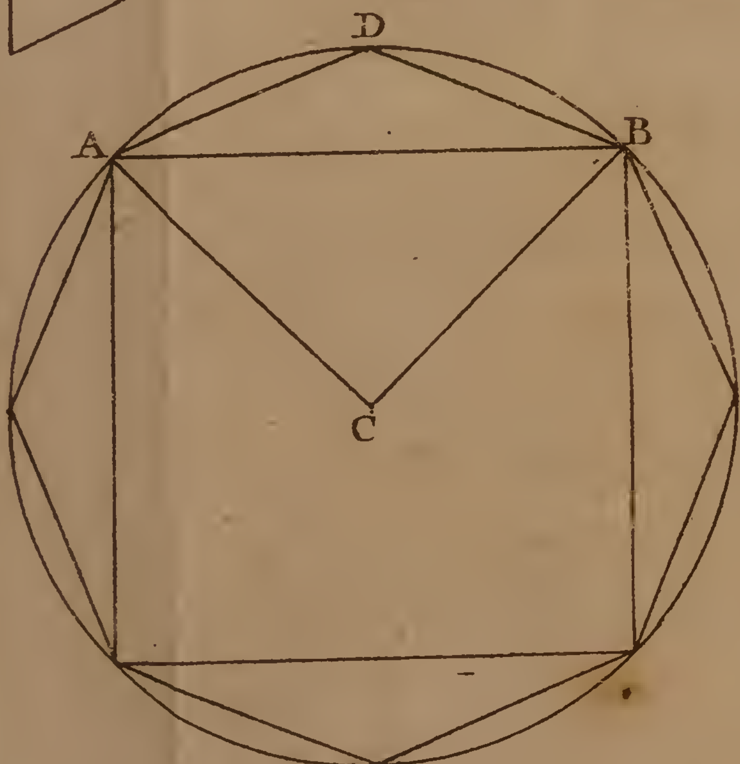


Fig. 5.



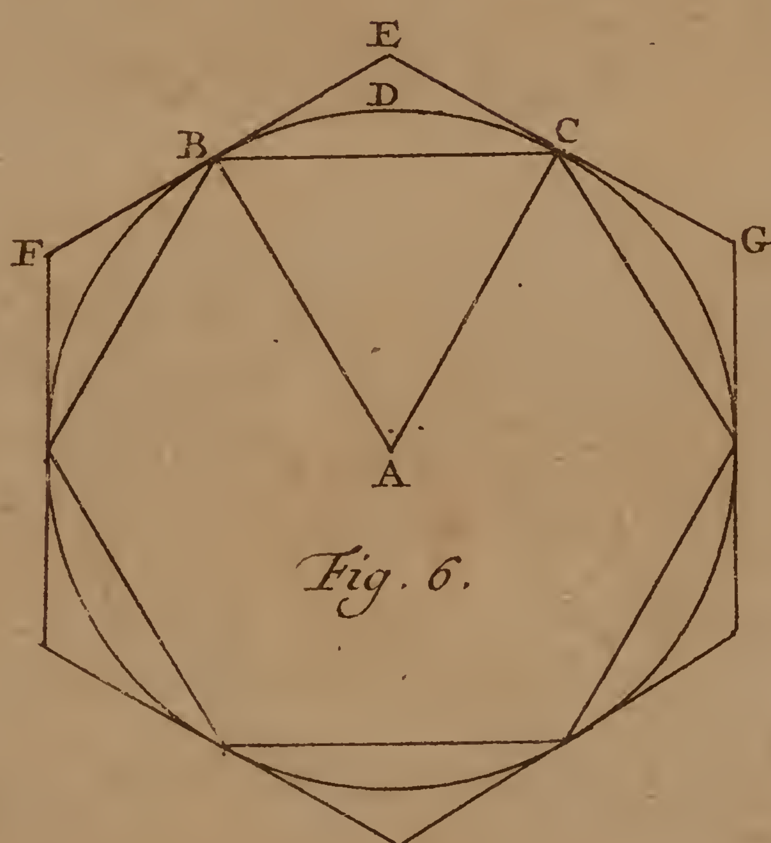


Fig. 6.

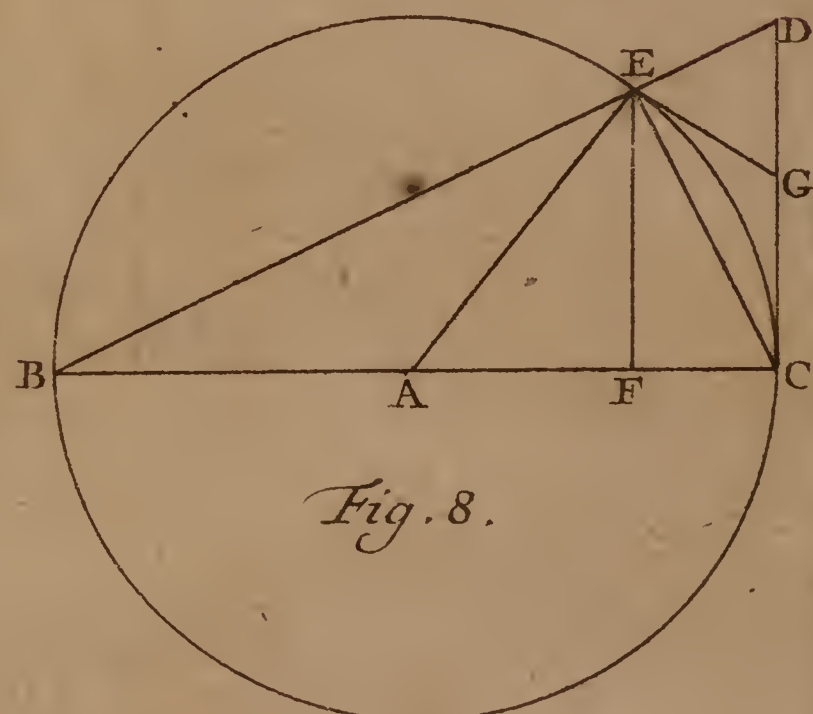


Fig. 8.

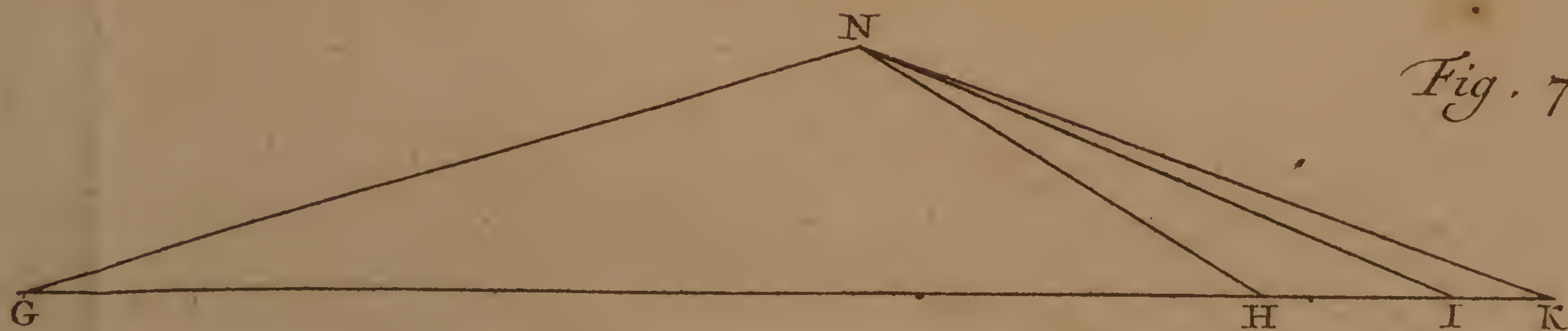
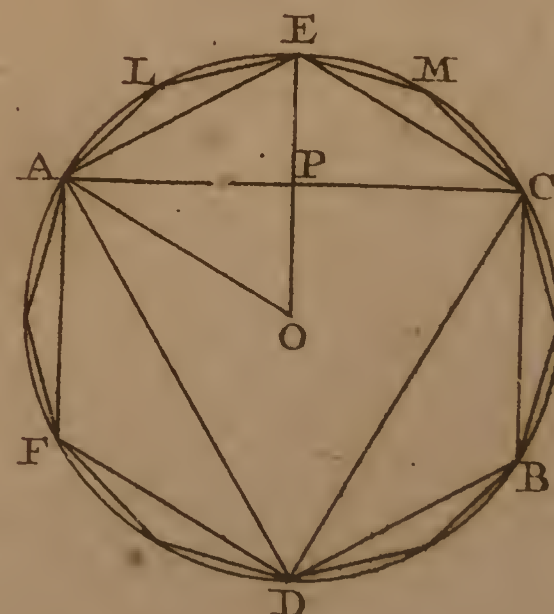


Fig. 7.





$62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc eſt, partibus 62822. Atque hiſce proinde omnino major erit circuli peripheria *. Eſt autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit. * per 7. huj.

Rurſus quoniam latus dodecagoni inſcripti minus eſt partibus $5176\frac{2}{7}$. Erunt octo latera, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{7}$. Item quia latus dodecagoni circumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{7}$. Sed iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{7}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus. Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum. * per 9. huj.

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693 : cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ : & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies fiunt 628318250. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus

additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & sexagecuplum ipsarum, hoc est 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod si verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inscripti quidem latus, calculo Ludolphi Coloniensis, Arithmetici nobilis, inventum est partium 58177640912684919 non unâ amplius, subtenditurque duobus scrup. primis; circumscripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni subduplo laterum numero inscripti, quod est 116355276902613523 non unâ minus. Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium 628318530717958 4; minor autem quam 628318530717958 9, qualium radius 1000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inscripti circumscriptique polygoni istius lateribus, invenietur tantum majorem esse peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum esse à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita se habet, semperque evenire necesse est quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ postea trademus, triplum numerum notarum facile obtineri apparebit.

PROBLEMA II. PROP. XI.

Rectam sumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Ostensum est superius, quod octo inscripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora sunt peripheriâ dimidiâ. In constructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam si quatermillesima diametri pars accedat longitudini sic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod sic fiet manifestum. Quarum partium radius est 10000, earum latus dodecagoni inscripti circulo est amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui si addantur partes 5, hoc est, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem esse circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem

tem dodecagoni inſcripti facile invenitur, quia radius peripheriæ ſextantem ſubtendit. Eſtque hæc ratio accuratior quam ſi triplâ ſeſquiſeptimâ utamur. Nam ſecundum eam excedetur $\frac{1}{2}$ peripheriæ longitudo amplius quam $\frac{1}{100}$ diametri.

A L I T E R.

Eſto datus circulus cujus B C diameter. Dividatur ſemicircumferentia B C bifariam in D. reliqua vero trifariam in E & F. Et jungantur D E, D F, quæ ſecent diametrum in G & H. Erit trianguli G D H latus alterum una cum baſi G H quadrante B D exiguo majus; neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri B C. Sciendum eſt enim fieri D G vel D H duobus inſcripti dodecagoni lateribus æquales. G H autem lateri dodecagoni circumſcripti. Unde quidem junctas D G & G H majores eſſe conſtat quadrante B D. Nam quia per 8. huj. octo latera dodecagoni circulo inſcripti cum quatuor lateribus circumſcripti majora ſunt peripheriâ totâ, ideo ſumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inſcripti cum latere uno circumſcripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inſcripti dodecagoni minus eſt quam partium 51764 qualium B C 200000: erunt latera duo, hoc eſt, G D, minor quam 103528. Circumſcripti autem dodecagoni latus minus eſt partibus 53590; ipſa nimirum G H. Itaque junctæ una D G, G H efficiunt minus quam 157118. At quadrantem B D conſtat ex præcedentibus majorem eſſe quam 157079. Ergo differentia minor eſt quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri B C. TAB. XXXIX. Fig. 2.

A L I T E R.

Tribus ſemidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inſcripti quadrati; compoſita ſemicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{18000}$ diametri brevior ſit. Latus quadrati eſt majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum eſt facile demonſtratur.

Vel

Vel potius sex semidiamestris addatur $\frac{1}{5}$ dicti lateris quadrati inscripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

Problema III. Prop. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem sumere.

TAB. XXXIX. Fig. 3. Esto datus circumferentiæ arcus C D, primum quadrante minor, cui rectam æqualem sumere oporteat. Dividatur arcus C D bifariam in E, sitque subtensæ C D æqualis recta F G. Duabus vero C E, E D, quæ subtendunt arcus dimidios, æqualis F H. Et ipsi F H jungatur H I triens excessus G H. Erit tota F I arcui C D æqualis ferè: adeo ut unâ sui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura sit, etiamsi arcus C D quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si fuerit datus non major peripheriæ sextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{6000}$ sui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem esse arcubus rectas eo modo inventas constat ex Theoremate 7. huj. De quantitate autem differentiæ est ostendendum.

Primum itaque ponendo arcum C D quadranti peripheriæ æqualem, erit C D recta, hoc est, F G, latus quadrati circulo inscripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. C E autem vel E D latus inscripti octogoni, ideoque major quam 76536. Est autem duplæ E D æqualis F H. Ergo hæc major quam 153072. Quare excessus G H major quam 11650: Et hujus triens H I major quam 3883. Ideoque tota F I major quam 156955. Arcus autem C D cum quadranti æqualis ponitur, minor est quam 157080. Itaque minus ab hoc discrepat recta F I quam partibus 125, qualium ipsa est 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1200}$ ipsius F I.

Si vero sextans peripheriæ sit arcus C D, erit recta C D, hoc est, F G, latus hexagoni inscripti, ideoque partium 10000, & C E vel E D latus dodecagoni, ac proinde major

jor quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla F H major quam $10352\frac{3}{4}$. unde G H major quam $352\frac{3}{4}$; & H I major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur F I major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem C D, ſextans peripheriæ, minor eſt quam 10472. Ergo deficiunt lineæ F I partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{6000}$ F I. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus eſt in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimenſione uti voluerimus; ſed numero pares: Earumque partium ſubtenſis ſimul ſumptis adjungendus eſt triens exceſſus quo ipſæ ſuperant aggregatum earum quæ arcubus duplis ſubtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, ſi arcus reliqui ad ſemicircumferentiam longitudo inveniatur aut ſupra eandem exceſſus, aut reliqui ad circumferentiam totam, ſi dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

THEOR. X. PROP. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inſcripti, proportione medium eſt inter latus polygoni ſimilis circumſcripti, & dimidium latus polygoni inſcripti ſub duplo laterum numero.

IN circulo cujus centrum A, radius A B, ſit latus inſcripti polygoni æquilateri B C; & latus circumſcripti ſimilis polygoni D E ipſi B C parallelum. Ergo producta A B tranſibit per D, & A C per E. Et ſi ducatur C F ipſi A B ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo numero laterum. Itaque oſtendendum eſt, B C mediam eſſe proportione inter E D & C F. Ducatur A G, quæ dividat E D bifariam, itaque erit ipſa quoque circuli ſemidiameter & æqualis A B. Et quoniam eſt ut E D ad C B, ſic D A ad A B, hoc eſt, D A ad A G; ſicut autem D A ad

TAB. XXXIX. Fig. 4.

ad A G, ita B C ad C F, propter triangulos similes D A G, B C F. Erit proinde ut E D ad C B, ita quoque C B ad C F. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

TAB. XXXIX. Fig. 5. Esto linea B C divisa æqualiter in R; & inæqualiter in F, sitque segmentum majus F C; & fiat B O æqualis utrique simul B C, C F; B M vero utrique B C, C R. Dico majorem esse rationem R B ad B F, quam triplicatam ejus, quam habet O B ad B M. Sumatur enim ipsi O M æqualis utraque harum M L, L P. Quoniam igitur M O ipsi R F æqualis est, (nam hoc ex constructione intelligitur) erit P O tripla ipsius F R. Sed & B M tripla est B R. Ergo ut B R ad B M, ita F R ad P O. Et permutando ut B R ad F R, sic B M ad P O. Major autem est B O quam B M. Ergo major erit ratio B O ad O P, quam B R ad R F: & per conversionem rationis minor O B ad B P, quam R B ad B F. Porro quoniam æquales sunt O M, M L, major erit ratio B O ad O M, quam B M ad M L: & per conversionem rationis minor O B ad B M, quam M B ad B L. Eodem modo minor adhuc ostendetur ratio M B ad B L, quam L B ad B P. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet O B ad B M minor erit quam composita ex rationibus O B ad B M, B M ad B L, & B L ad B P, hoc est, quam ratio O B ad B P. Major autem erat R B ad B F, quam O B ad B P. Ergo omnino major erit ratio R B ad B F, quam triplicata rationis O B ad B M. Quod erat propositum.

THEOR. XI. PROP. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor est minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum similium, quorum alterum ordinate circulo inscriptum sit, alterum circumscriptum.

ptum. Et circulus minor est polygono istis simili cujus ambitus majori mediarum æquetur.

Esto circulus B D, cujus centrum A. Et inscribatur ei polygonum æquilaterum B C D L, simileque circumscribatur lateribus parallelis H K M N. Sitque perimetro polygoni H K M N æqualis recta T, perimetro autem B C D L æqualis Z. Et inter Z & T duæ sint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli B D minorem esse rectâ X. Et si fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, simile autem sit polygono B C D L aut H K M N; Dico circulum B N minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli P E, quæ dividat bifariam latera parallela B C, H K, inscripti circumscriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris H K, & B C secabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta A C K, quæ utriusque polygoni angulos C & K bifariam secet, nam hoc ab eadem recta fieri constat; & jungatur C E. Ipsi autem C E ponatur æqualis C F; sitque duabus his C R, C F tertia proportionalis C G. Ergo qualis polygoni inscripti latus est C E sive C F, talis circumscripti latus erit C G*. Ideoque duæ tertiæ C F cum triente C G simul majores erunt arcu E C*. Sit autem duabus tertiis C F cum triente C G æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu E C. TAB. XXXIX. Fig. 6. * per 13. huj. * per 9. huj.

Et quoniam se habet C R ad C F, ut C F ad C G; erit quoque dupla C R una cum C F ad triplam C R, hoc est, utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R, ut dupla C F una cum C G ad triplam C F: vel sumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ C F una cum $\frac{1}{3}$ C G ad C F, hoc est, ut S ad C F. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R eadem erit triplicatæ rationi S ad C F. Major autem est ratio R B ad B F quam triplicata ejus, quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R *. Ergo major eadem ratio R B ad B F quam triplicata ejus quam habet S ad * per lemma præc.

C F, hoc eſt, quam cubi S ad cubum C F. Sicut autem R B ad B F, ita eſt cubus R B ad id quod fit ex quadrato R B in B F. Ergo major quoque ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F. Quadrato autem R B in B F minus eſt rectangulum ſub R B, B G, in F C; quod ſic oſtenditur. Quia enim proportionales ſunt R C, C F, C G, Erit id quo major mediam excedit, hoc eſt F G, major quam quo media minimam, hoc eſt, quam F R. Major autem eſt F C quam F B. Ergo omnino major erit ratio C F ad F R, quam B F ad F G. Et per converſionem rationis, minor ratio F C ad C R, quam F B ad B G. Et permutando minor F C ad F B, quam C R ſeu R B ad B G: hoc eſt, (ſumptâ communi altitudine B R) quam quadrati R B ad rectangulum R B G. Unde quod fit ex rectangulo R B G in F C minus erit quam quod ex quadrato R B in F B, uti dictum fuit. Quum itaque major oſtenſa fuerit ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F; omnino quoque major erit ratio cubi R B ad ſolidum ſub rectangulo R B G in F C, quam cubi S ad cubum C F. Et permutando major ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G in F C ad cubum C F; hoc eſt, quam rectanguli R B G ad quadratum C F. Eſt autem quadrato C F æquale rectangulum G C R, hoc eſt rectangulum ſub G C, R B, quia proportionales ſunt C R, C F, C G. Itaque major erit ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G ad rectangulum ſub G C, R B, hoc eſt, quam B G ad G C. Sicut autem B G ad G C, ita R C ad E K. Quia enim eſt C R ad C G, ut quadratum C R ad quadratum C F ſeu quadratum C E: ut autem quadratum C R ad quadratum C E, ita eſt P R ad P E diametrum: Erit idcirco C R ad C G, ut P R ad P E. Unde dupla C R, hoc eſt, C B ad C G, ut dupla P R ad P E, hoc eſt, ut P R ad P A. Et dividendo, B G ad G C, ut R A ad A P, ſeu A E, hoc eſt, ut R C ad E K, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi R B ad cubum S, hoc eſt, ratio triplicata

R B

R B ad S, quam R C ad E K. Eſt autem S major oſtenſa arcu E C. Ergo omnino major erit ratio triplicata R B ſeu R C ad æqualem arcui E C, quam R C ad E K. Sicut autem R C ad arcum E C, ita eſt perimeter polygoni B C D L, hoc eſt, linea Z ad circumferentiam circuli B D; Et ſicut R C ad E K, ita perimeter polygoni B C D L ad perimetrum polygoni H K M N, hoc eſt, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam B D, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem eſt rationi Z ad T. Itaque major eſt ratio ipſius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonſtrandum.

Sciendum eſt autem ipſam X minorem eſſe duabus tertiis Z & triente T: hoc eſt, duabus tertiis perimetri polygoni inſcripti & triente circumſcripti, quibus alioqui minorem eſſe circuli circumferentiam conſtat ex præcedentibus. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum ſecundum Arithmeticam proportionem, quæ major eſt minore mediarum ſecundum proportionem Geometricam.

Jam vero & de polygono Y demonſtrabimus, ipſum videlicet circulo B D majus eſſe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum ſimile H K M N rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. H K M N ipſi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. H K M N rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eſt, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum H K M N ad circulum B D, ita eſt perimeter ipſius polygoni, hoc eſt, linea T ad circuli B D circumferentiam; quoniam polygonum æquale eſt triangulo baſin habenti perimetro ſuæ æqualem & altitudinem radii A E, circulus autem æqualis ejuſdem altitudinis triangulo cujus baſis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum B D ſicut X ad circumferentiam B D. Eſt autem X major oſtenſa quam B D circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo B D. Quod erat demonſtrandum.

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

Theor. XII. Prop. XV.

SI inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem.

TAB. XXXIX. Fig. 7. Eſto deſcriptus circulus centro C, cujus diameter A B. Hæc autem producatur verſus A, interque ipſam & circumferentiam ponatur E D recta radio A C æqualis. Quæ producta ſecet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem B G majorem eſſe arcu B F. Ducatur enim per centrum recta H L parallela E G, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti vero B G in L. Et jungatur D H, quæ diametrum ſecet in K. Similes itaque ſunt trianguli E D K, C H K, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus E D æquale eſt lateri H C, ſuntque hæc latera æqualibus angulis ſubtenſa. Ergo æquale etiam latus D K lateri K H. Itaque C A ſecat bifariam ipſam D H, itemque arcum D A H. Arcus igitur D H ſive huic æqualis F M duplus eſt ad arcum A H. Ipſi autem A H æqualis eſt arcus M B. Igitur arcus F B triplus erit ad arcum A H. Porro quoniam H K ſinus eſt arcus H A, ejuſdemque tangenti æquatur L B, erunt duæ tertiæ H K & triens
* per 9. huj. L B ſimul majores arcu A H *. Quare ſumptis omnium triplis erit dupla H K, hoc eſt, H D ſive G L una cum L B major arcu A H triplo, hoc eſt, arcu F B. Apparet igitur totam G B arcu F B majorem eſſe.

Hoc

TAB. XXXIX.

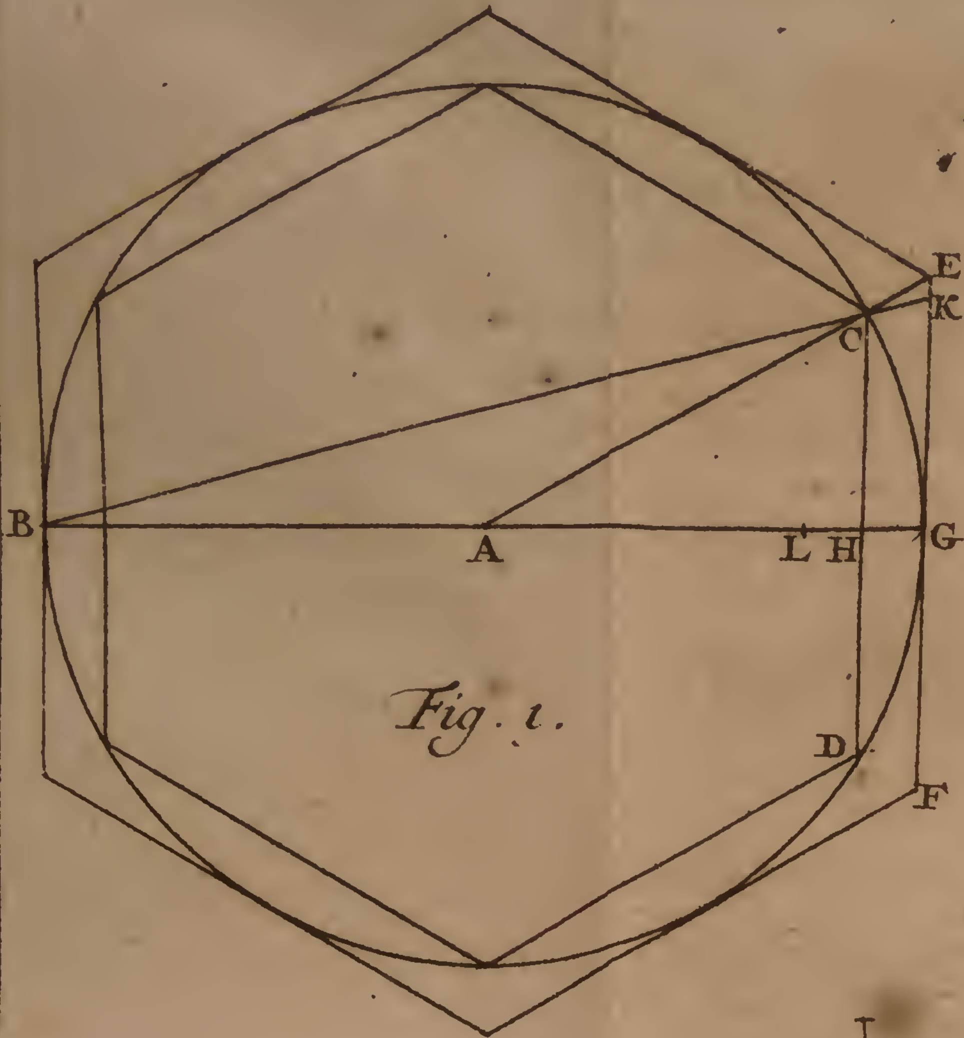


Fig. 1.



Fig. 2.

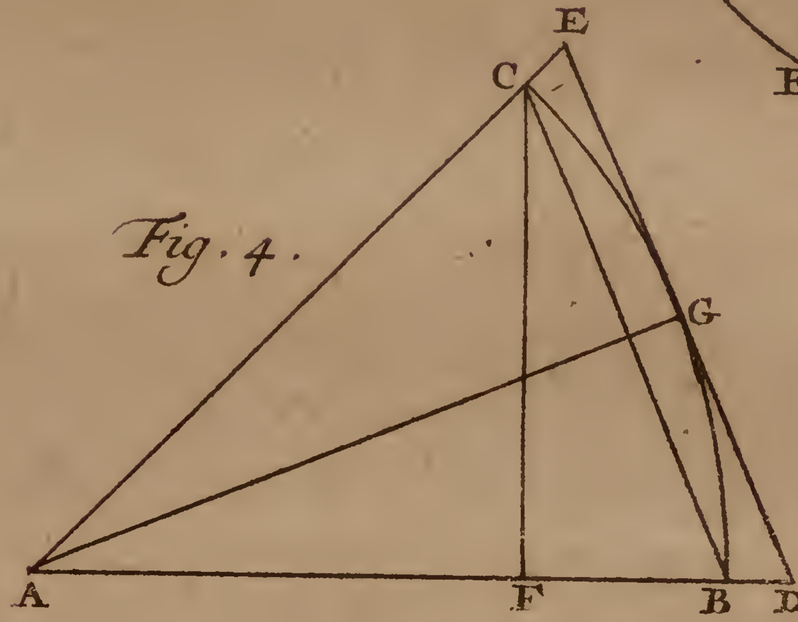


Fig. 4.

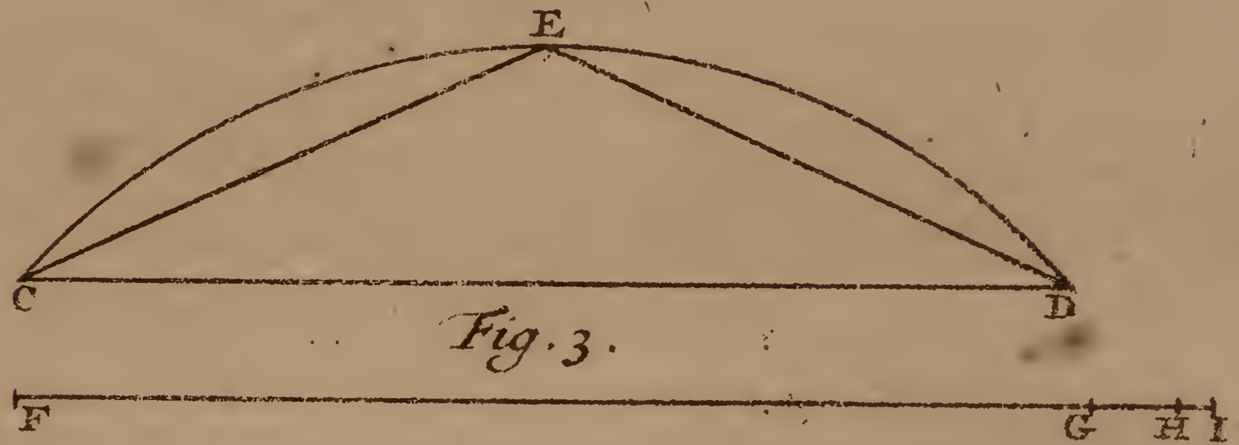
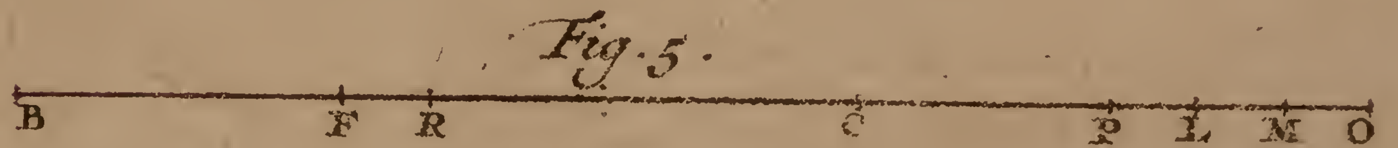


Fig. 3.

Fig. 5.



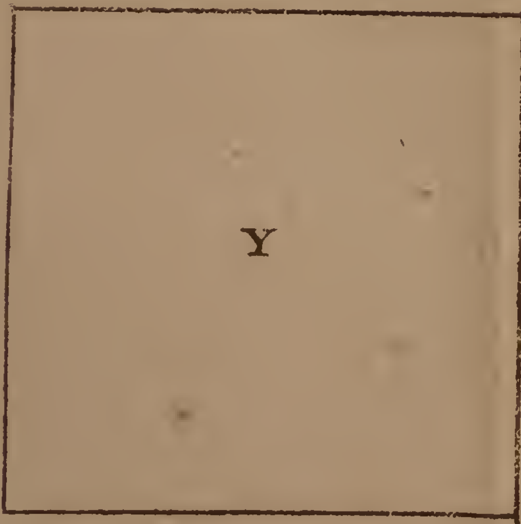
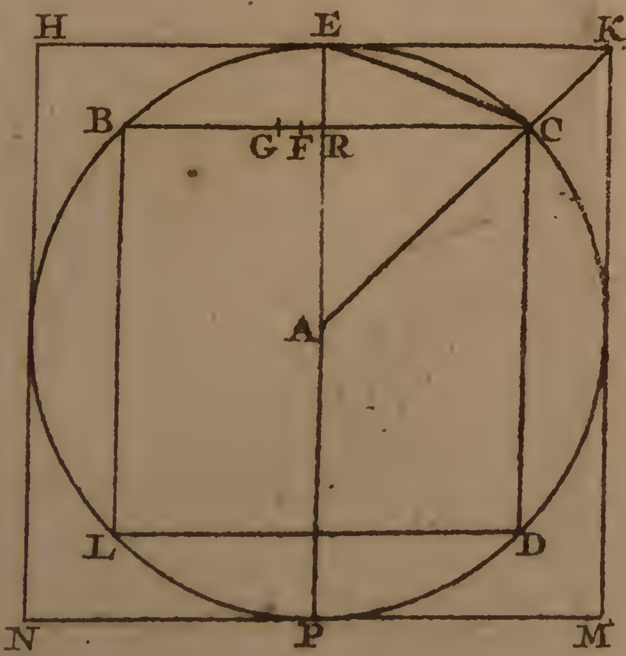


Fig. 6.



Z X V T

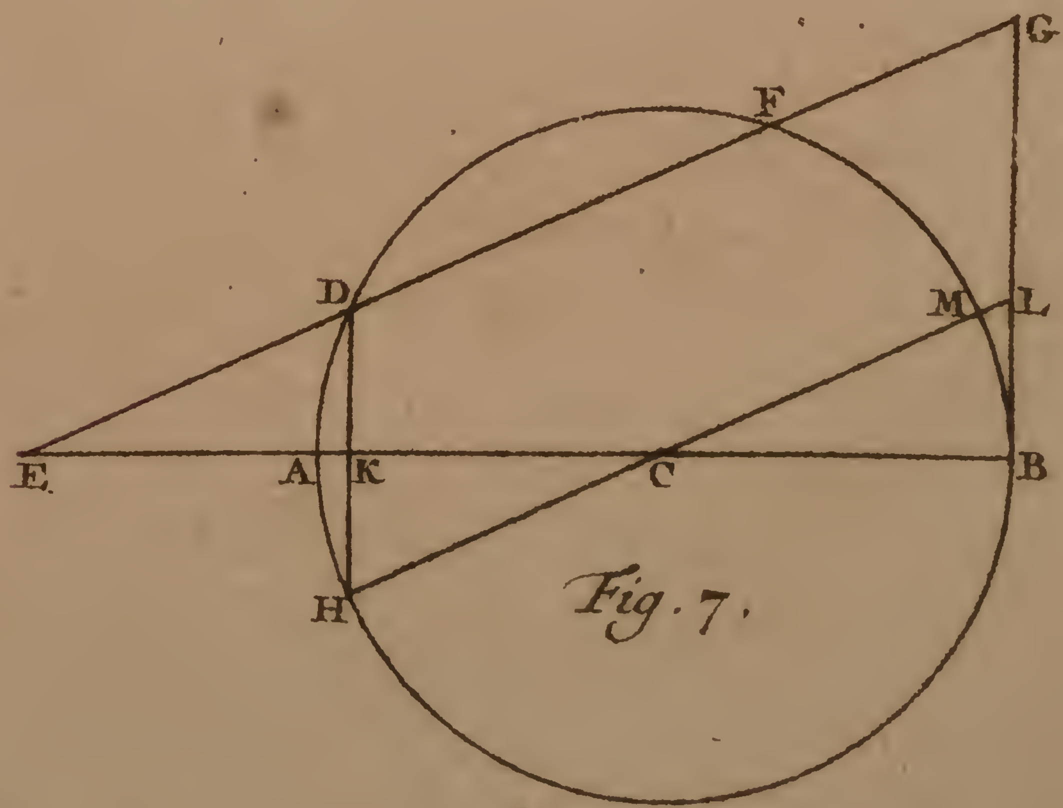
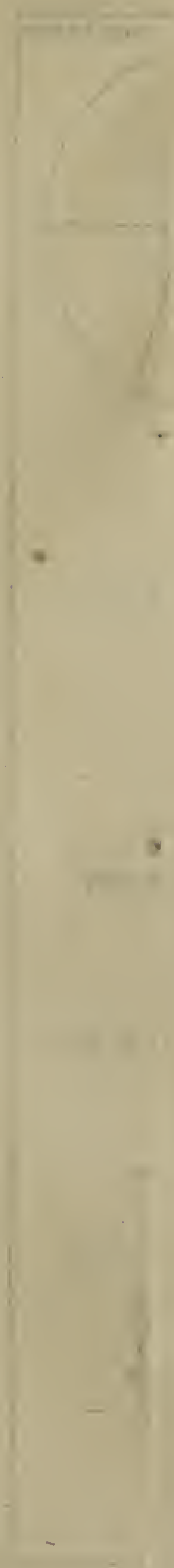


Fig. 7.



Hoc Theorema alterum eſt ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonſtraſſe ipſe videri voluit, argumentatione uſus quæ meram quæſiti petitionem continet. Sed & alterum ſubjungemus, quod utile eſt imprimis & contemplatione digniſſimum.

Theor. XIII. Prop. XVI.

SI diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem.

Eſto circulus, cujus diameter A B; quæ producatur, & ſit A C ſemidiametro æqualis. Et ducatur recta C L, quæ circumferentiam ſecundò ſecet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam B L arcu B E minorem eſſe. Jungantur enim A E, E B, poſitâque A H ipſi A E æquali ducatur H E & producatur, occurratque tangenti in K. Denique ſit E G diametro A B ad angulos rectos, E D vero tangenti B L. Quoniam igitur iſoſceles eſt triangulus H A E, erunt anguli inter ſe æquales H & H E A. Quia autem angulus A E B rectus eſt, etiam recto æquales erunt duo ſimul H E A, K E B. Verùm duo quoque iſti H & H K B uni recto æquantur, quoniam in triangulo H K B rectus eſt angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo H E A, relinquentur inter ſe æquales anguli K E B, H K B. Triangulus igitur iſoſceles eſt K B E, ejuſque latera æqualia E B, B K. Eſt autem B D æqualis E G. Ergo D K differentia eſt quâ B E excedit E G. Porro quoniam eſt A G ad A E, ut A E ad A B, erunt duæ ſimul A G, A B majores duplâ A E*. Ideòque A E, hoc eſt, A H minor quam dimidia utriuſque ſimul

TAB. XL. Fig. 1.

*25.5.Elem.

ſimul A G, A B; hoc eſt, minor quam C A cum dimidia A G. Quare ablatâ utrimque C A, erit C H minor dimidiâ A G. C A vero dimidiâ A G major eſt. Ergo ſi addatur A C ad A G, erit tota C G major quam tripla ipſius C H. Quia autem ut H G ad G E, ita eſt E D ad D K; ut autem G E ad G C, ita L D ad D E: Erit ex æquo in proportione turbata ut H G ad G C, ita L D ad D K. Et per converſionem rationis & dividendo, ut G C ad C H, ita D K ad K L. Ergo etiam D K major quam tripla K L. Erat autem D K exceſſus ipſius E B ſupra E G. Ergo K L minor eſt triente dicti exceſſus. K B autem æqualis eſt ipſi E B ſubtenſæ. Ergo K B unà cum K L, hoc eſt, tota
per 7. huj. L B omnino minor erit arcu B E. Quod erat demonſtrandum.

Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta B A diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ C L fiat tangens intercepta B L ſemper minor arcu abſciſſo B E.

Porro uſus hujus Theorematis multiplex eſt, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita ſint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui ſubtenſa aſſignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata ſunt.

Theorema XIV. Propos. XVII.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera.

TAB. XL. Fig. 2. Esto circuli portio A B C, (ponatur autem ſemicirculo minor, quoniam cæteræ ad propoſitum non faciunt) & diameter portionis ſit B D, quæ biſariam ſecetur in E. Itaque oſten-

ostendendum est primò centrum gravitatis portionis A B distare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro situm sit, alibi ostendimus. Ducatur per E recta basi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur K I, H L basi A C ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, constituant rectangulum K L. Quoniam igitur portio semicirculo minor est, constat rectanguli dicti dimidium F L contineri intra segmentum A F G C, atque insuper spatia quædam A F I, L G C. Alterum vero rectanguli K L semissem K G complecti segmentum F B G unà cum spatiis F B K, B G H. Quæ spatia quum sint tota supra rectam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum supra eandem situm erit. Est autem E punctum in ipsa F G centrum grav. totius rectanguli K L. Igitur spatii reliqui B F I L G B centrum grav. erit infra rectam F G. Sed & spatiorum A F I, L G C commune gravitatis centrum est infra eandem F G. Ergo magnitudinis ex spatiis hisce & dicto spatio B F I L G B compositæ, quæ est portio ipsa A B C, centrum gravitatis infra lineam F G reperiri necesse est; ideoque infra E punctum.

Eadem verò diameter B D secetur nunc in S, ita ut B S sit sesquialtera reliquæ S D. Dico centrum grav. portionis A B C minus distare à vertice B quam punctum S. Sit enim B D P totius circuli diameter. & ducatur per S recta basi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis B D, rectum vero latus æquale S P. Et occurat basi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum F S æquale est rectangulo B S P, hoc est, ei quod sub B S & latere recto parabolæ continetur, transibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ B F, B G intra circumferentiam cadent, sed reliquæ F H, G K erunt exteriores. Hoc enim ostenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ N L, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum N L æquale est rectangulo B L P, quadratum vero TAB. XL. Fig. 3.

M L rectangulo contento lineis B L, S P: rectangulum autem B L P majus eo quod sub B L, S P continetur: erit quadratum N L majus quadrato M L, & N L linea major quam M L. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ B F totam extra parabolam ferri necesse est, eâdemque ratione partem B G. Rursus quia rectangulum B D P æquale est quadrato D A; rectangulum verò sub B D, S P contentum quadrato D H; erit H D major quam A D potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ F A, itemque G C intra parabolam cadent. Fiunt igitur spatia quædam F N B M, & B Q G, itemque alia H F A, G C K. Quorum hæc cum tota sint infra lineam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis H B K centrum grav. est in ipsa F G, nimirum S punctum *. Ergo partis reliquæ A F M B Q G C centrum grav. erit supra rectam F G. Sed supra hanc situm quoque apparet centrum grav. spatiorum F M B N, B Q G, quum tota sint supra ipsam F G. Ergo & spatii ex hisce duobus & A F M B Q G C compositi, hoc est, portionis circuli A B C centrum grav. supra lineam F G reperietur: quumque sit in B D diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat ostendendum.

* 8. lib. 2. Archim. de Æquipond.

THEOR. XV. PROPOS. XVIII.

Circuli portio semicirculo minor ad inscriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam sesquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla sesquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis basin.

SIt portio ſemicirculo minor, cui inſcriptum triangulum maximum A B C. Diameter autem portionis ſit B D; & diameter circuli à quo portio reſecta eſt, B F, centrum E. Oſtendendum eſt primo, portionis A B C ad triangulum inſcriptum majorem eſſe rationem quam ſeſquitertiam. Eſto portionis A B C centrum grav. punctum G, & ſecetur D F in H, ut ſit H D dupla reliquæ H F. TAB. XL. Fig. 4.

Quoniam igitur F B eſt dupla E B; D B autem minor quam dupla G B. Erit major ratio F B ad B D, quam E B ad B G. Et per converſionem rationis, minor B F ad F D, quam B E ad E G. Et permutando minor B F ad B E, (quæ proportio dupla eſt) quam F D ad E G. Igitur F D major eſt quam dupla E G. Ipſius autem F D duas tertias continet H D. Ergo H D major eſt quam ſeſquitertia E G. Sicut autem H D ad E G, ita eſt portio A B C ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperboles Ellipſis & Circuli quadratura *. Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum A B C quam ſeſquitertia. * Vide ſupra p. 324.

Quod autem ad triangulum A B C portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius D F ad diametrum circuli B F unà cum tripla E D, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut B R ſit ſeſquialtera reliquæ R D. Ergo cadit R punctum inter G & D * quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis in portione A B C. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ H D ad E G, ut modo dictum fuit; minor autem ſit ratio H D ad E G, quam H D ad E R: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum ratio quam H D ad E R, ſive quam H D quinquies ſumpta ad quintuplam E R. Atqui H D, (cum ſit æqualis duabus tertiis D F) quinquies ſumpta æquabitur decem tertiis, hoc eſt, triplæ ſeſquitertiæ D F. E R verò quæ continet E D & duas quintas ipſius D B, ſi quinquies ſumatur; æquabitur duplæ B D & quintuplæ E D; hoc eſt, duplæ totius E B atque inſuper triplæ E D. Igitur appa- * per præced.

 ret

ret portionem A B C ad inscriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam sesquitertiam D F ad duplam E B, hoc est, diametrum B F, unà cum tripla E D. Quod erat demonstrandum.

Theor. XVI. Propos. XIX.

Arcus quilibet semicircumferentiâ minor, major est suâ subtensâ simul & triente differentiæ quâ subtensa sinum excedit. Idem verò minor quam subtensa simul cum ea quæ ad dictum trientem sese habeat, ut quadrupla subtensa juncta sinui ad subtensam duplam cum sinu triplo.

TAB. XL. Fig. 5. Esto circulus cujus D centrum, diameter F B. Et sit arcus B A semicircumferentiâ minor, cui subtensa ducatur B A, sinus autem A M: quæ nimirum diametro F B sit ad angulos rectos. Porro ipsi A M sit æqualis recta G H, & G I æqualis subtensæ A B. Excessus igitur est H I; cujus triens I K ipsi G I adjiciatur. Ostendendum est primo, arcum A B totâ G K majorem esse. Hoc autem ex Theoremate 7. est manifestum. At cum ipsi G I additur IO quæ ad I K trientem ipsius H I rationem habeat, quam quadrupla G I una cum G H ad duplam G I cum tripla G H. Dico totam G O arcu A B majorem esse. Constituantur enim super lineis G H, H I, IO, triangula quorum communis vertex sit L, altitudo autem æqualis radio D B. Et jungatur D A, ducaturque diameter circuli C E quæ rectam A B bifariam dividat in N, arcum vero A B in E. Et jungantur A E, E B.

Quoniam igitur O I est ad I K ut quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H; sumptis consequentium triplis erit O I ad I H (hæc enim tripla est I K,) ut quadrupla G I unà cum G H ad sexcuplam G I cum noncupla G H. Et componendo, O H ad H I, ut decupla utriusque

utriusque I G, G H ad sexcuplam I G cum noncupla G H: vel sumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum simul G I, G H ad duplam G I cum tripla G H. Est autem eadem ratio linearum G I ad G H, hoc est, B A ad A M, quæ B D ad D N, propter similes triangulos B A M, B D N. Ergo etiam O H ad H I, ut $\frac{10}{3}$ utriusque simul B D, D N ad duplam B D cum tripla D N; hoc est, ut $\frac{10}{3}$ N C ad diametrum E C cum tripla D N. Hac autem ratione minor est ratio portionis A E B ad A E B triangulum *. * per præced. Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam O H ad H I, hoc est, quam trianguli O H L ad triangulum I H L. Triangulum autem I H L æquale est triangulo A E B. Quod sic ostenditur. Triangulum enim G H L æquale est triangulo D A B, quoniam bases & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam G I æqualis est rectæ A B, erit triangulum G I L æquale duobus simul triangulis D A E, D B E, hoc est, quadrilatero D A E B. Itaque triangulum H I L triangulo A E B æquari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio A E B ad triangulum sibi inscriptum A E B minorem quoque rationem quam triangulum O H L ad idem triangulum A E B. Quamobrem triangulum O H L portione A E B majus erit. Et totum proinde triangulum O G L majus sectore D A E B. Altitudo autem trianguli G L O æqualis est radio D B. Ergo basis G O major erit arcu A B. Quod erat ostendendum.

Ex his autem manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, *Si circulo inscribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, composita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem vero majori perimetro si linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, composita circumferentiam circuli excedet.*

Problema IV. Propos. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem investigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ ſubtenduntur.

TAB. XL. Fig. 6. Esto circulus centro D, cujus diameter C B, & ſit arcus B A ſextans circumferentiæ, cui ſubtenſa ducatur A B, itemque ſinus A M. Poſitâ igitur D B ſemidiametro partium 100000, totidem quoque erit ſubtenſa B A. A M verò partium 86603 non unâ minus, hoc eſt, ſi una pars ſive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito. quippe ſemiſſis lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti.

Hinc exceſſus A B ſupra A M fit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipſi A B 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu A B. Et hic primus eſt minor terminus, quo poſtea alium vero propiorem inveniemus. Prius autem major quoque terminus ſecundum Theorema præcedens inquirendus eſt.

Tres nimirum ſunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus eſt partium duplæ A B & triplæ A M qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque obſervandum ut minor ſit, idemque in cæteris prout dicetur) ſecundus quadruplæ A B & ſimplæ A M qui 486603 vero maj. Et tertius triens exceſſus A B ſupra A M, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad A B 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus A B, peripheriæ ſextans. * Jam igitur invenimus longitudinem arcus A B ſecundum minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longe propior vero eſt, cum vero proximus ſit 104719.

* per præced.

Sed ex utroque iſtorum alius minor terminus habebitur priore accuratior ſi utamur præcepto ſequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inſpectione dependet.

In-

Inventorum terminorum differentia sesquitertia jungatur duplæ subtensæ & sinui triplo, & quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquitertiam seu $\frac{10}{3}$ utriusque simul, sinus, subtensæque, eandem habeat subtensæ supra sinum excessus ad aliam quandam; Hæc ad sinum addita rectam constituet arcu minorem.

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum est $261\frac{1}{3}$. Estque rursus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus est partium duplæ A B & triplæ A M & sesquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriusque simul A B, A M, 622008 vero minor. Tertius denique excessus A B supra A M, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis est 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium A M $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu A B. Quare sexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ sunt arcu A B, earum sexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor est quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde constat minorem utique esse quam triplam sesquiseptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani error per hæc refutatur, qui scripsit peripheriam majorem esse partibus 314185 qualium rad. 100000.

Esto nunc arcus A B $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit A M, semissis lateris quadrati circulo inscripti, partium 7071068, non unâ minus, qualium radius D B 10000000. A B vero latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad similitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus A B 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rursus terminus minor accuratior 7853885. Unde constat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus A B longitu-

gitudine minus diſtet quam partibus 85; (Eſt enim arcus A B, per ea quæ ſupra oſtendimus, major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos ſcrupulos ſecundos, hoc eſt, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifeſtum eſt, ſi trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem iſtum terminum paulò antè, nunquam duobus ſcrupulis ſecundis aberraturos; etiamſi æqualia inter ſe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo D A M.

Si vero ea ſit ratio lateris D M ad M A, ut angulus A D M non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii ſcrupuli error erit. Poſito enim arcu A B $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit A M ſemiſſis lateris octanguli æquilateri circulo inſcripti partium 382683433, non unâ minus. A B vero latus ſexdecanguli 390180644 non unâ amplius, qualium radius D B 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus A B invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rurſus 392699010. Conſtat autem ex ſupra demonſtratis arcum A B $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem eſſe quam 392699081, quas terminus major ſuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno ſcrupulo tertio, hoc eſt, $\frac{1}{7776000000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eſt utique quam 6000000000.

Porro ex noviſſimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam $3141593\frac{1}{5}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod ſi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus A B, ſeu partium 6 qualium tota 360: Erit A M ſemiſſis lateris trigintanguli inſcripti partium 104528463267660, non unâ minus, qualium radius 1000000000000000. Et A B latus ſexagintanguli inſcripti 104671912485 88 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus A B ſecundum primum minorem terminum 104719728891 95. Secundum majorem 104719755125 84. Et ex his minor alter terminus 104719755113 02. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam

3141592653 8,

TAB. XL.

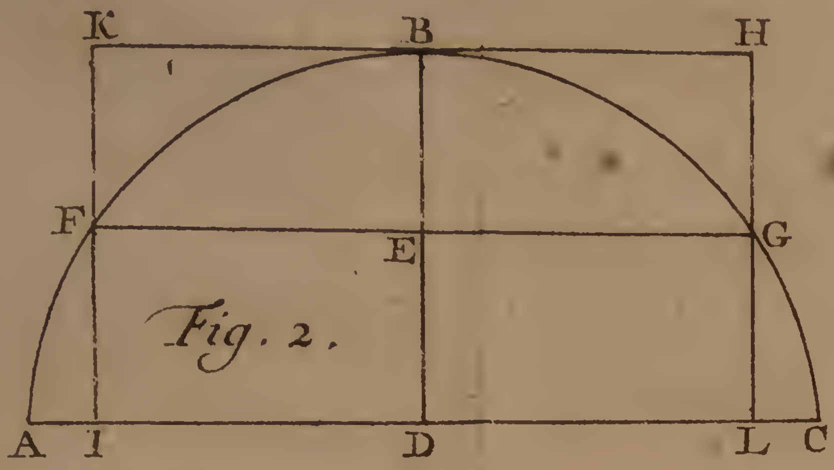


Fig. 2.

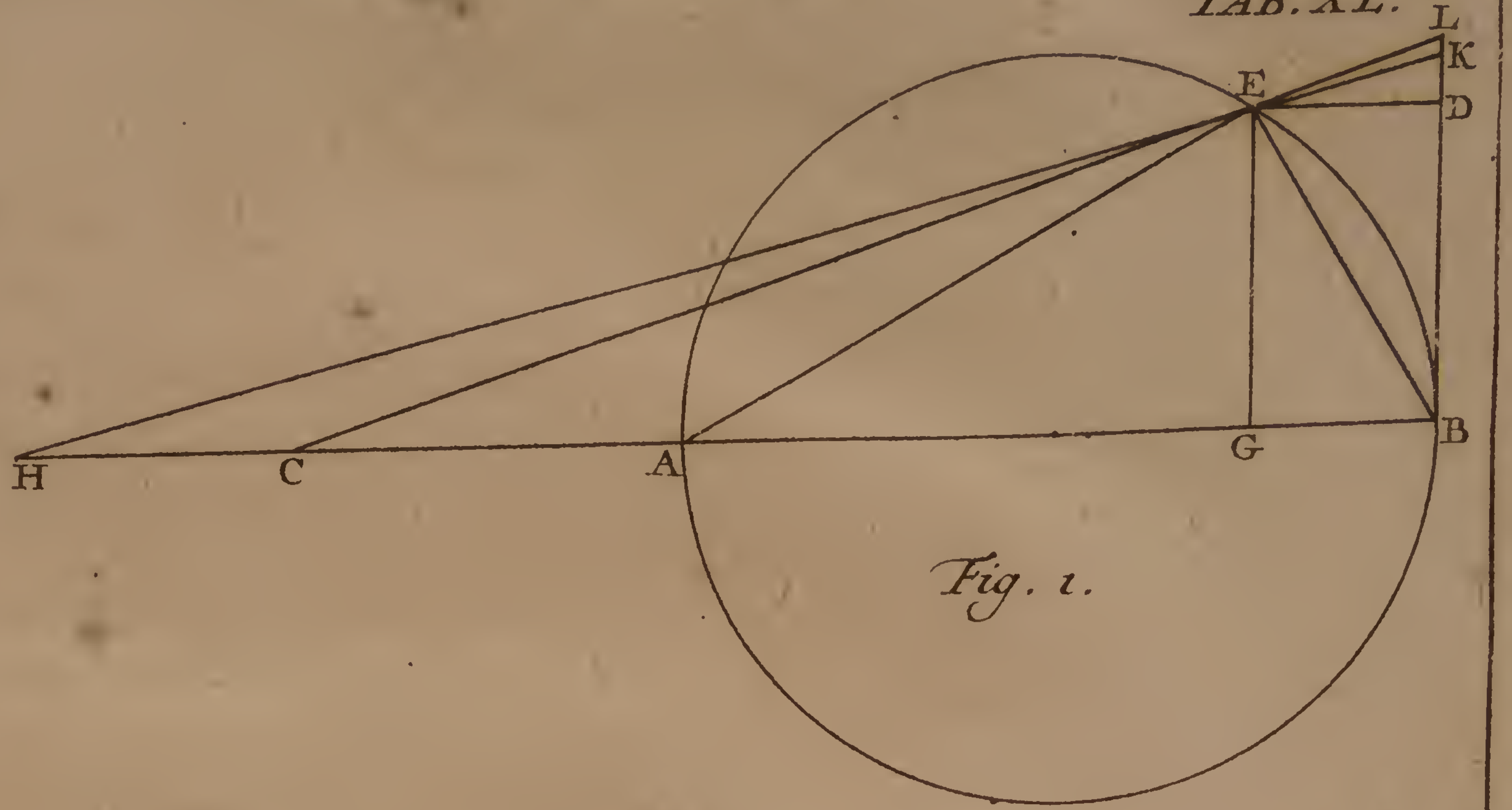


Fig. 1.

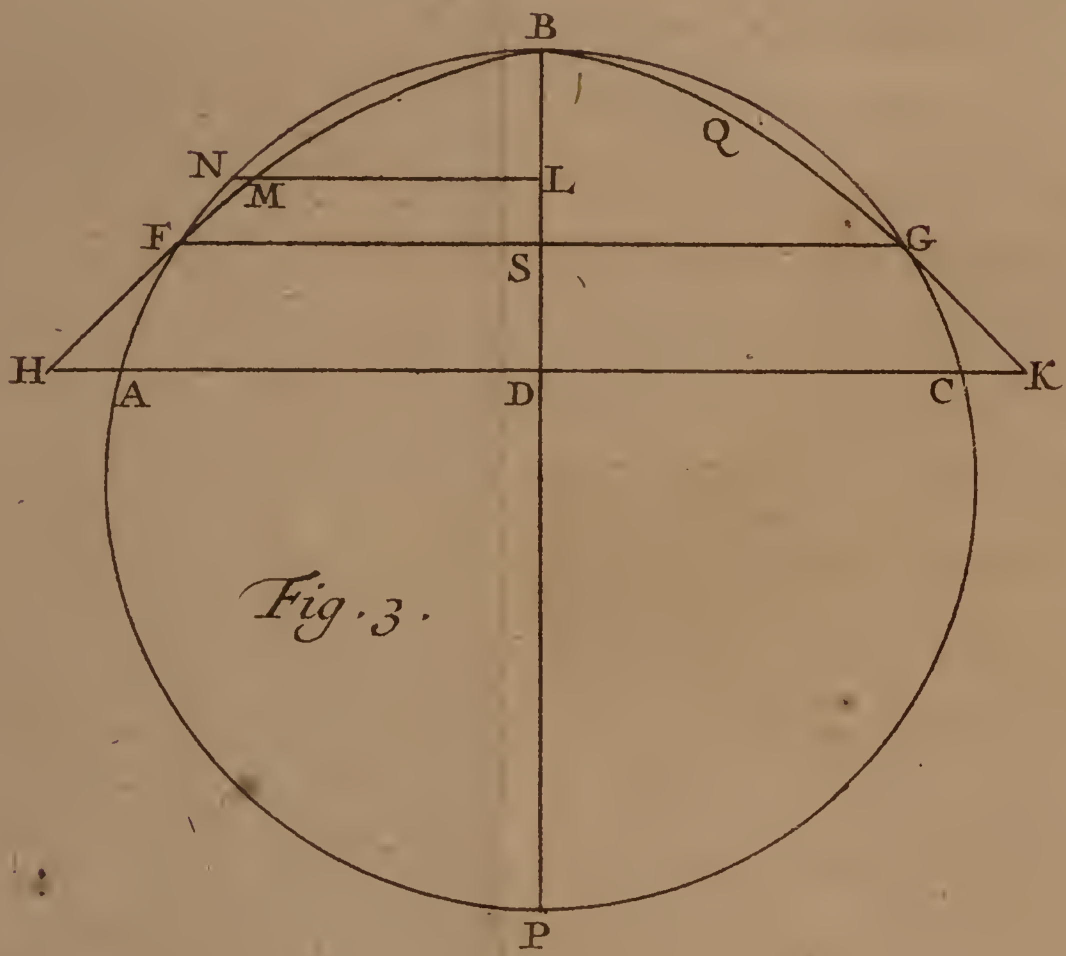


Fig. 3.

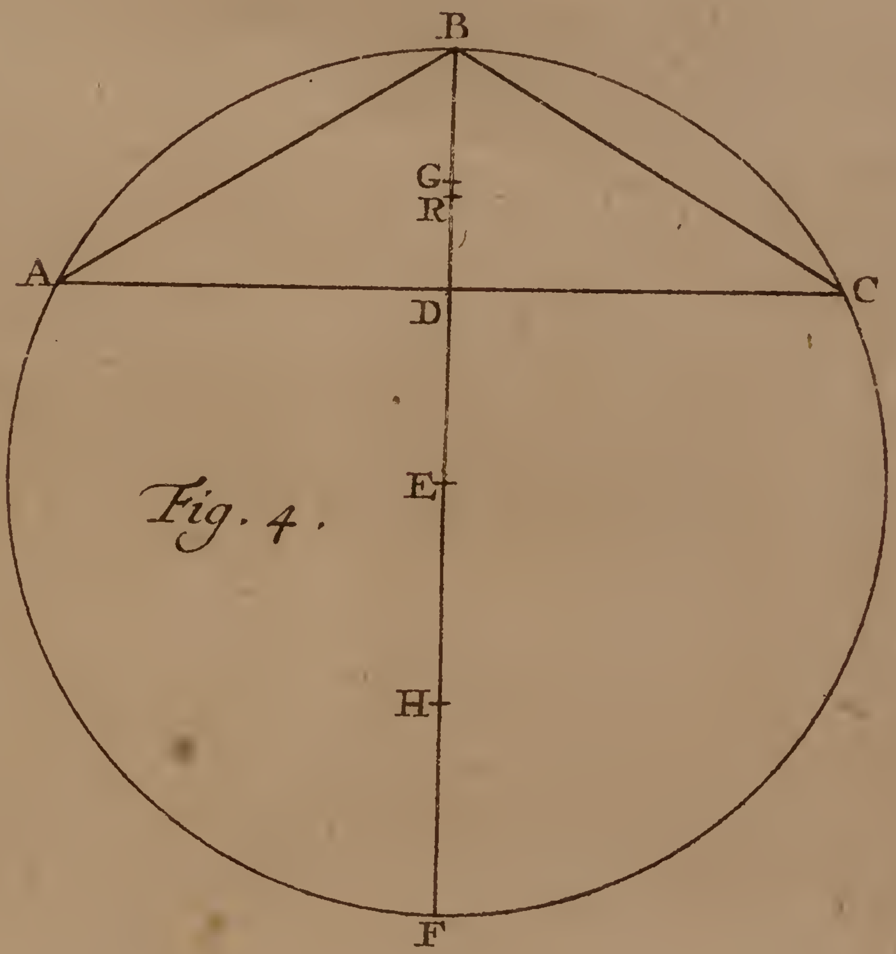


Fig. 4.

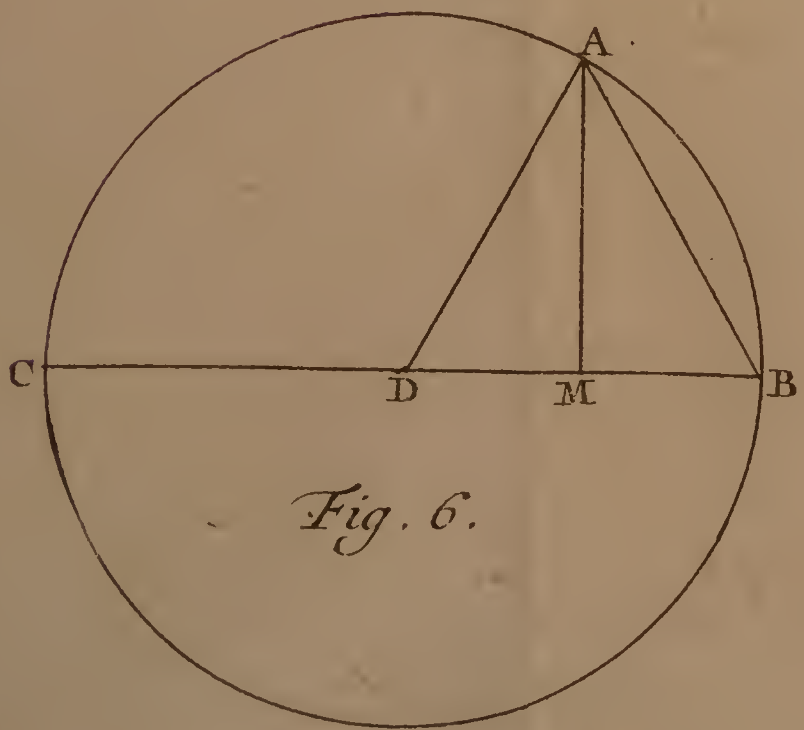
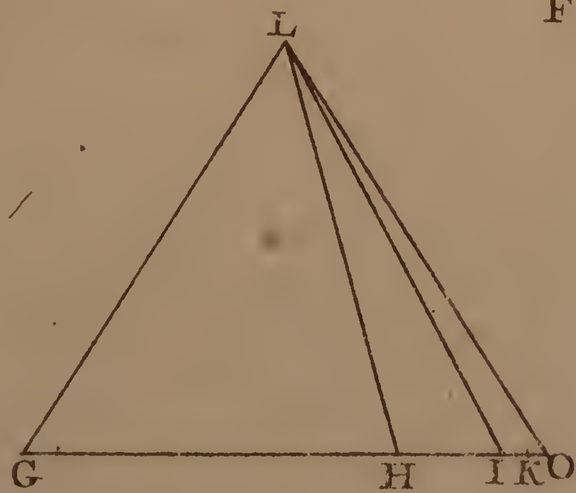


Fig. 6.



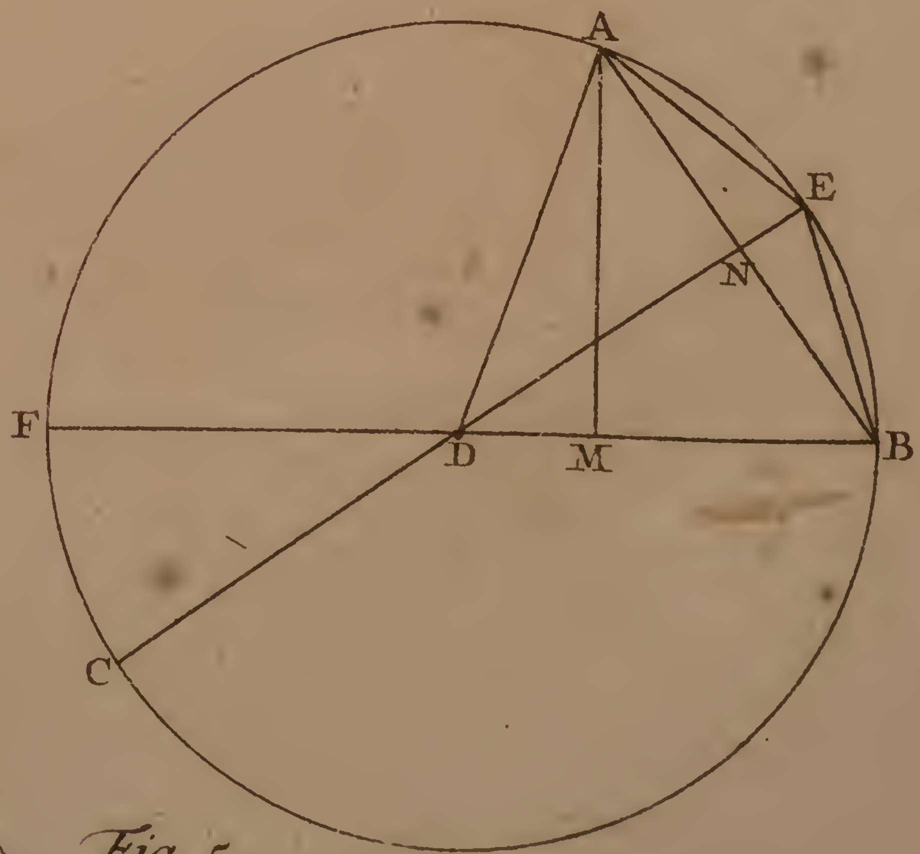


Fig. 5.

31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos si ex additis inscriptorum & circumscriptorum polygonorum lateribus inquirendum esset ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex sexagintangulo inscripto circumscriptoque hoc tantum probatur, minorem esse rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & amplius verarum notarum numerum nostro ratiocinio productum appareat. Idem vero in ulterioribus polygonis si quis experiatur semper evenire cernet: non ignota nobis ratione, sed quæ longiori explicatione indigeret.

Porro autem quomodo, datis quibuscunque aliis inscriptis, arcuum quibus subtenduntur longitudo per hæc inveniri queat satis puto manifestum. Si enim quadrati inscripti latere majores sunt, longitudo arcus ad semicircumferentiam reliqui inquirenda est, cujus tum quoque subtensa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum subtensas inveniri cum totius arcus subtensa data est. Atque hâc ratione si bisectionibus uti placebit, poterimus ad omnem subtensam, arcus ipsius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoscere. Utile hoc ad sinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus subtensâ, etiam ejus qui paulò major minorve sit satis accuratè definiri potest.





CHRISTIANI HUGENII C. F.

ILLVSTRIVM QVORVNDAM
PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

PROBL. I.

Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam.



Oc Archimedes problema reſolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. Compoſitionem autem promiſſam non videtur explicuiſſe, niſi ipſius eſt illa quam Eutocius in vetuſto quodam libro repertam commentariis ſuis inſeruit. Ea vero paraboles & hyperboles interſectione perficitur, uti & illa cujus Dionyſidorus autor eſt, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipſis deſcriptionem requirit. Noſtra autem quam hic conſcribemus anguli triſectionem poſtulat; Et hæc conſtruendi ratio in ſolidis problematibus quodammodo ſimpliciſſima videtur, atque ad uſum maxime accommodata.

TAB. XLI. Fig. 1. Eſto igitur data ſphæra cujus centrum M, diameter C A. Et data ſit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur ſecari ſphæra plano ſecundum A C diametrum, ſitque maximus in ea circulus C B A D. Et producatur utrimque diameter C A, & ponatur ſemidiametro æqualis utraque harum C H, A E. Et dividatur tota H E in Q, ut ſit E Q ad Q H ſicut S ad T. Ipſi autem M Q æqualis ponatur ad circumferentiam recta A R. Et ei quæ tertiam partem ſubtendit arcus A R, æqualis ſumatur M N.

Et

Et per N punctum ducatur planum K L quod diametro C A sit ad angulos rectos. Dico hoc sphæram sic secare, ut portio cujus A vertex est ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T.

Secetur enim sphæra per centrum M plano B D ipsi K L parallelo, & jungantur K M, M L; & intelligatur conus basin habens circulum factum sectione K L, verticem vero M. Et sicut quadratum C M ad quadratum M N, ita sit M N ad N O longitudine. Erit igitur per conversionem rationis ut quadratum C M sive quadr. K M ad quadratum K N (est enim quadr. K N excessus quadrati K M supra quadr. M N) ita linea N M ad M O. Sicut autem quadr. K M, hoc est, quadr. B M ad quadr. K N, ita est circulus circa diametrum B D ad eum qui circa diametrum K L. Ergo quoque ille circulus ad hunc sese habebit ut N M ad M O. Ac proinde conus K M L æqualis erit cono cujus basis circulus circa diametrum B D, altitudo M O *. Hic autem conus ad hemisphæram B C D, hoc est, ad conum qui basin habeat eundem circulum circa B D diametrum, & altitudinem M H *, eam habet rationem quam M O ad M H. Itaque & conus K M L erit ad hemisphæram B C D sicut M O ad M H. Et invertendo.

* 15. 12. Elem.

* 32. 1. Archim. de Sphær. & Cylin.

Porro autem quoniam hemisphæra B C D est ad sectorem solidum M K C L sicut superficies illius sphærica ad sphæricam hujus superficiem *, hoc est, ut M C ad C N †. Erit per conversionem rationis hemisphæra B C D ad partem sui quæ remanet dempto sectore M K C L, sicut C M ad M N: vel sumptis horum duplis ut H M ad O Q. Quod enim O Q dupla sit ipsius M N postea ostendemus. Fuit autem ostensum, quod hemisphæra B C D ad conum K M L sicut H M ad M O. Ergo jam hemisphæra B C D ad totam portionem inter plana B D, K L contentam erit ut H M ad utramque simul Q O, O M *, hoc est, ad M Q. Quare & per conversionem rationis, erit hemisphæra B C D ad portionem K C L, ut M H ad H Q. Et sumptis antecedentium duplis, sphæra tota ad portionem K C L ut E H

* 42. 1. Archim. de Sphær. & Cyl.

† 3. 2. Archim. de Sphær. & Cyl.

* 24. 5 Elem.

ad

ad H Q. Et dividendo, portio K A L ad portionem K C L ut E Q ad Q H, hoc eſt ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit O Q duplam eſſe ipſius M N, ſic fiet manifeſtum. Quia enim ut quadratum C M ad quadr. M N, ita eſt M N ad N O longitudine: Eſt autem Q M æqualis ſubtenſæ arcus A R cujus trienti ſubtenditur M N. Erunt propterea duæ ſimul Q M & N O æquales triplæ M N, uti ſequenti lemmate demonſtratur. Quamobrem ablata communi O N, erit ſola Q M æqualis duplæ N M & ipſi M O. Sed eadem Q M æqualis eſt duabus ſimul his Q O, O M, ergo apparet duplam M N æquari ipſi O Q.

LEMMA.

TAB. XLI. Fig. 2. SI Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris A B C in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ B D, D E, E C; & toti arcui linea B C. Porro jungantur D A, E A, atque interſecent ſubtenſam B C in punctis G & H. Sitque H F parallela G D.

Quoniam igitur circumferentia B D E dupla eſt circumferentiæ E C, angulus autem huic inſiſtens E A C ad centrum conſtitutus, qui vero illi inſiſtit angulus B C E ad circumferentiam. Erit propterea angulus B C E, hoc eſt, angulus H C E in triangulo H C E æqualis angulo C A E in triangulo C A E. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut A E ad E C ita E C ad E H. Ratio igitur A E ad E H hoc eſt D E ad E F, duplicata eſt rationis A E ad E C, ac proinde eadem quæ quadrati A E ad quadr. E C ſeu quadr. E D. Erit igitur invertendo F E ad E D ſicut quadr. E D ad quadr. E A. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul B D, D E, E C æquari ſubtenſæ B C

atque

atque ipsi E F. quod sane manifestum est; nam C E est æqualis C H; B D æqualis B G; D E vero utrisque simul G H, & F E. Ergo constat propositum.

Sumpsimus autem arcum B C semicircumferentiâ minorem quoniam in constructione problematis ejusmodi semper invenitur. Nam lemma ad quosvis arcus pertinet, estque in semicircumferentiâ majoribus demonstratio parum diversa.

PROBL. II.

Cubum invenire dati cubi duplum.

AD hoc imperfectam primò constructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam subjiciemus, quæ tamen non nisi sæpius tentando perficiatur. Etenim solida problemata omnia vel hoc exigunt vel sectionum conicarum descriptionem.

Sit itaque datus cubus cujus latus A B, oporteatque invenire latus cubi dupli. TAB. XLI. Fig. 3.

Radio B A semicirculus describatur A F C. Sitque arcus A F semicircumferentiæ triens, C D vero quadrans; & ducantur C F, A D, quarum intersectio ad E punctum. Erit A E latus cubi quæsiti; exiguo tamen excedens, quodque minus sit $\frac{1}{2000}$ sui parte, ut facile numeris explorari potest. Fit enim A E secans anguli p. 37. scr. 30. quæ proinde major est partibus 12600 qualium A F vel A B 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 sit major quam duplus ejus qui ex A B 10000, erit & cubus A E major duplo cubo ex A B. Rursus quia A E major est partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ A E major part. 6. Tota vero A E minor est quam 12605. Ergo auferendo ab A E partem bismillesimam sui ipsius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim supersunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor est duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque A E diminuta parte sui bismillesima cubum minorem producet quam sit duplus cubus à latere A B.

Porro ad perfectam constructionem, C F quidem uti pri-

 us

us ducenda eſt: A D vero ſic, ut ſubtenſa C D æqualis ſit abſciſſæ E F. Etenim his poſitis dico cubum A E ejus qui ex A B duplum exiſtere.

Producatur enim C A, & ſit ipſi A E æqualis A G. Propter triangulos ſimiles igitur eſt E C ad C D, hoc eſt, E F ut E A ad A F, hoc eſt, ut G A ad A B. Et componendo C F ad F E ut G B ad B A ſive A F. Et permutando C F ad G B ut E F ad F A. Quare ut C F quadratum ad quadr. G B, ita quadr. E F ad quadr. F A. Et componendo ut quadr. C F & G B ad quadr. G B, ita quadr. E F & F A ſimul, hoc eſt, quadr. E A ad quadr. A F. Quadr. autem C F & G B ſimul æquantur rectangulo G C A cum quadr. A G, quod ſic oſtenditur. Quadratum enim G B æquale eſt rectangulo C G A & quadrato A B ſeu A F *. Quare addito utrimque quadrato F C, erunt quadrata G B, F C ſimul æqualia rectangulo C G A & quadrato A C. Rectangulum autem C G A cum quadrato A C æquatur rectangulo G C A cum quadrato G A. Itaque & quadrata C F, G B ſimul æqualia ſunt rectangulo G C A cum quadrato A G, ſicut diximus. Sicut igitur rectangulum G C A cum quadrato A G ad quadr. G B, ita eſt quadr. E A ad quadr. A F, hoc eſt, ita quadratum G A ad quadr. A B. Et permutando, ut rectangulum G C A cum quadrato G A ad quadratum G A ita quadr. G B ad quadr. A B. Dividendo igitur, erit ut rectang. G C A ad quadr. G A, ita quadr. G B dempto quadrato A B, hoc eſt, rectangulum C G A ad quadr. A B. Et permutando rurſus, ut rectang. G C A ad rectang. C G A, hoc eſt, ut C A ad A G ita quadratum G A ad quadr. A B. Quamobrem quod fit ex quadrato G A in ipſam G A, hoc eſt, cubus G A æquabitur ei quod fit ex quadrato A B in A C, hoc eſt, duplo cubo ex A B. Quod erat demonſtrandum.

* 6.2. Elem.

Probl.

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.

VEterum Geometrarum ad hoc Problema constructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, at non omnes inventione diversas, uti recte quoque ipse animadvertit. Heronis enim inventionem secuti videntur Apollonius & Philo Byzantius: quanquam Heronem Apollonio ætate posteriorem nonnulli existiment. Dioclis modum Pappus & Sporus. Nicomedea autem constructio præ cæteris subtilis ibidem extat, quam Fr. Viëta paulò aliter concinnatam suo Geometriæ supplemento inseruit. R. Cartesii egregia est & nova per paraboles & circumferentiæ intersectionem, cujus demonstratio legitur in libris Harmonicôn M. Mersenni. Nostræ autem sequentes.

Sit datarum linearum major A C, quæ bifariam secetur in E. Minor autem sit A B, quæ sic constituatur ut triangulus E A B habeat crura æqualia A E, E B. Et perficiatur parallelogrammum C A B D. Et producantur A C, A B. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quousque positionem habeat G F, abscindens nimirum E F æqualem rectæ E G; (Hoc autem vel sæpius tentando assequemur, vel descriptâ hyperbole, uti postea ostendetur) Dico inter A C, A B medias duas inventas esse B G, C F. TAB. XLI. Fig. 4.

Sit enim E K ipsi A B ad angulos rectos. Quia igitur B E æqualis E A, dividetur A B in K bifariam: adjecta autem est linea B G. Ergo rectangulum A G B cum quadrato ex K B, æquabitur quadrato K G. Et addito utrimque quadrato K E, erit rectangulum A G B unà cum quadratis B K, K E, hoc est unà cum quadrato B E, æquale quadrato E G. Similiter quia A C bifariam dividitur in E, & adjecta

jecta est linea C F, erit rectangulum A F C cum quadrato E C æquale quadrato E F. Quadratum autem E F æquale est quadrato E G. Erit igitur rectangulum A F C cum quadrato C E, æquale rectangulo A G B cum quadrato B E. Atqui quadratum C E seu E A æquale est quadrato E B. Ergo & reliquum rectangulum A F C æquale rectangulo A G B. Quare sicut F A ad A G ita B G ad C F. Ut autem F A ad A G ita est D B ad B G, & ita quoque F C ad C D. Igitur ut D B, hoc est, A C ad B G ita B G ad F C, & F C ad C D, hoc est, A B. Quod erat dem. Quod autem dictum est, etiam descriptâ hyperbole inveniri quomodo linea F D G ducenda sit, hinc constabit: Factum enim sit, ut E F, E G sint æquales, & sumatur G N æqualis D F. Itaque punctum N est ad hyperbolem quæ describetur per D punctum circa asymptotos F A, A G *. Sed idem punctum N est quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius E D: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus F E G est æquicruris, & N G æqualis D F) Itaque datum est punctum N ad intersectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum est. Datur igitur positione linea F G ducenda per puncta N, D. Et compositio manifesta est.

* 8. 2. Conic.

A L I T E R.

TAB. XLI. Fig. 5.

Circa diametrum A C majori datarum linearum æqualem circulus describatur & ponatur A B minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum A D: productâque A B, ducatur ex centro E recta E H G eâ ratione ut H D, H G sint inter se æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus A C, A B duas medias inventas esse B G, G L.

Producatur enim G E usque ad circumferentiam in K, & jungatur A K, eique parrallela ducatur B O. Similes itaque sunt trianguli A E K, B H O; & quia A E æqualis E K, etiam B H, H O æquales erunt. Sed & H G, H D inter se æquales sunt. Igitur tota O G æqualis B D, hoc est,

est, diametro A C vel L K; & ablatâ communi L O, relinquentur æquales L G, O K. Est autem rectangulum K G L æquale rectangulo A G B. Ergo ut K G ad G A ita B G ad G L. Sed ut K G ad G A ita est O G ad G B & ita reliqua O K, hoc est, L G ad B A. Ergo ut O G, hoc est, A C ad G B ita B G ad G L & G L ad A B. Quod erat demonstr. Hujus autem constructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet.

A L I T E R.

Sint datæ A B & Q quibus duas medias proportionales invenire opus sit; A B autem quam Q major. TAB. XLI. Fig. 6.

Dimidiæ Q sumatur æqualis A F, & productâ A B utrimque, sit ipsi æqualis B R. Erigatur autem ad A B perpendicularis F C, & ipsi R A æqualis ponatur R C: & jungatur B C, & huic parallela ducatur A E. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quousque positionem habeat C D, faciens C E æqualem A D. Dico inter A B & Q duas medias esse C E, E D.

Jungatur enim C A. Igitur quia æquales sunt R A, R C & angulus C F A rectus, erit R A ad A C ut A C ad duplam A F, hoc est, Q: ac proinde quadratum A C æquale rectangulo sub R A & Q. Quadratum autem A C cum quadrato A D & duplo rectangulo D A F, hoc est, sub D A & Q contento, æquatur quadrato D C *. Igitur quadratum D C æquabitur quadrato D A unà cum rectangulis sub D A, Q, & sub R A, Q, hoc est, unà cum rectangulo sub D R & Q. Quadratum autem D B æquale rectangulo R D A & quadrato A B *. Igitur ut quadratum D B ad quadratum D C, hoc est, ut quadr. A B ad quadr. A D, (est enim ut D B ad D C sic A B ad E C sive A D) ita erit rectangulum R D A cum quadrato A B ad rectangulum sub R D, Q, cum quadrato A D. Quamobrem & rectangulum R D A ad rectangulum sub R D, Q, sicut quadr. A B ad quadr. A D *. Est autem ut quadratum A B ad quadr. A D, ita A B ad E D longitudine: nam ut B A ad A D

* 12. 2. Elem.

* 6. 2. Elem.

* 19. 5. Elem.

ſic C E, hoc eſt, ipſa A D ad E D. Ergo rectangulum R D A ad rectangulum ſub R D, Q, hoc eſt, A D ad Q ſicut A B ad E D. Et permutando & invertendo, B A ad A D ut E D ad Q. Atqui ut B A ad A D, hoc eſt, C E ita C E ad E D. Ergo ut A B ad C E ita C E ad E D, & E D ad Q. Itaque inter A B & Q mediæ proportionales ſunt C E, E D. Quod erat oſtendendum.

P R O B L. IV.

Quadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat.

TAB. XLI. Fig. 7. Eſto quadratum B A cujus productum ſit latus F A. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & E B ſit æquale quadratum E G; & ſuper B G diametro deſcribatur ſemicirculus B C G ſecans rectam F A productam in C, & ducatur B D C. Dico D C æqualem eſſe ipſi K. Jungantur enim C G, G D; ſitque C H ipſi B G ad angulos rectos.

Quia igitur ſimiles ſunt trianguli B E D, C H G, & latera B E, C H circa angulos rectos inter ſe æqualia, erit & latus D B æquale lateri G C, & D E ipſi G H. Sunt autem quadrata D C, C G, hoc eſt, quadrata D C, C H, & H G æqualia quadrato D G*, hoc eſt, quadratis G E, E D. Ergo dempto hinc quadrato E D, inde vero quadrato H G; erunt duo quadrata D C & C H æqualia quadrato E G, hoc eſt, quadratis ex K & E B*. Quadratum autem E B æquale eſt quadrato C H. Ergo & reliquum quadratum D C æquabitur K quadrato; & recta D C ipſi K. Quod erat oſtendendum.

*47.1.Elem.

* Ex conſtruct.

Demonſtratio hæc ab ea diverſa eſt quæ apud Pappum Alex. legitur lib 7. prop. 72. Conſtructio verò non differt. Cæterum eandem ad caſum quoque ſequentem pertinere invenimus.

PROBL.

PROBL. V.

Dato quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla.

Datum ſit quadratum A B, productaque latera A F, A E. Data verò linea K, non minor duplâ A B diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam D C ipſi K æqualem. TAB. XLI. Fig. 8.

Si K æqualis fuerit duplæ A B, conſtructio manifeſta eſt; tunc enim per B ducenda eſt quæ ſit ipſi A B ad angulos rectos, eaque propoſitum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla A B, conſtructio iiſdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonſtratio quoque eſt eadem.

Quod autem circumferentia B C G ſecabit productam A F hinc manifeſtum eſt. Etenim quia K major eſt duplâ diametro A B, erit K quadratum majus octo quadratis E B. Itaque quadratum E G majus quam quadrata novem ex E B; ac proinde E G major quam tripla E B. Dimidia igitur B G, hoc eſt, radius deſcripti ſemicirculi major quam E B vel B F; unde neceſſe eſt rectam A C ſecari à circumferentia B C G.

PROBL. VI.

Rhombo dato, & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppoſitum angulum pertineat.

Sit datus rhombus A B, cujus productum latus F A. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C ſit ipſi K æqualis. TAB. XLII. Fig. 1.

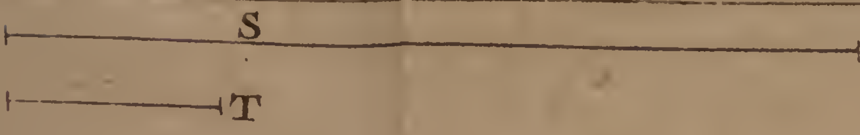
Ducatur diameter A B, & latus B E producatur; & quadratis ex K & A B ſit æquale quadratum A G. Et ſuper B G

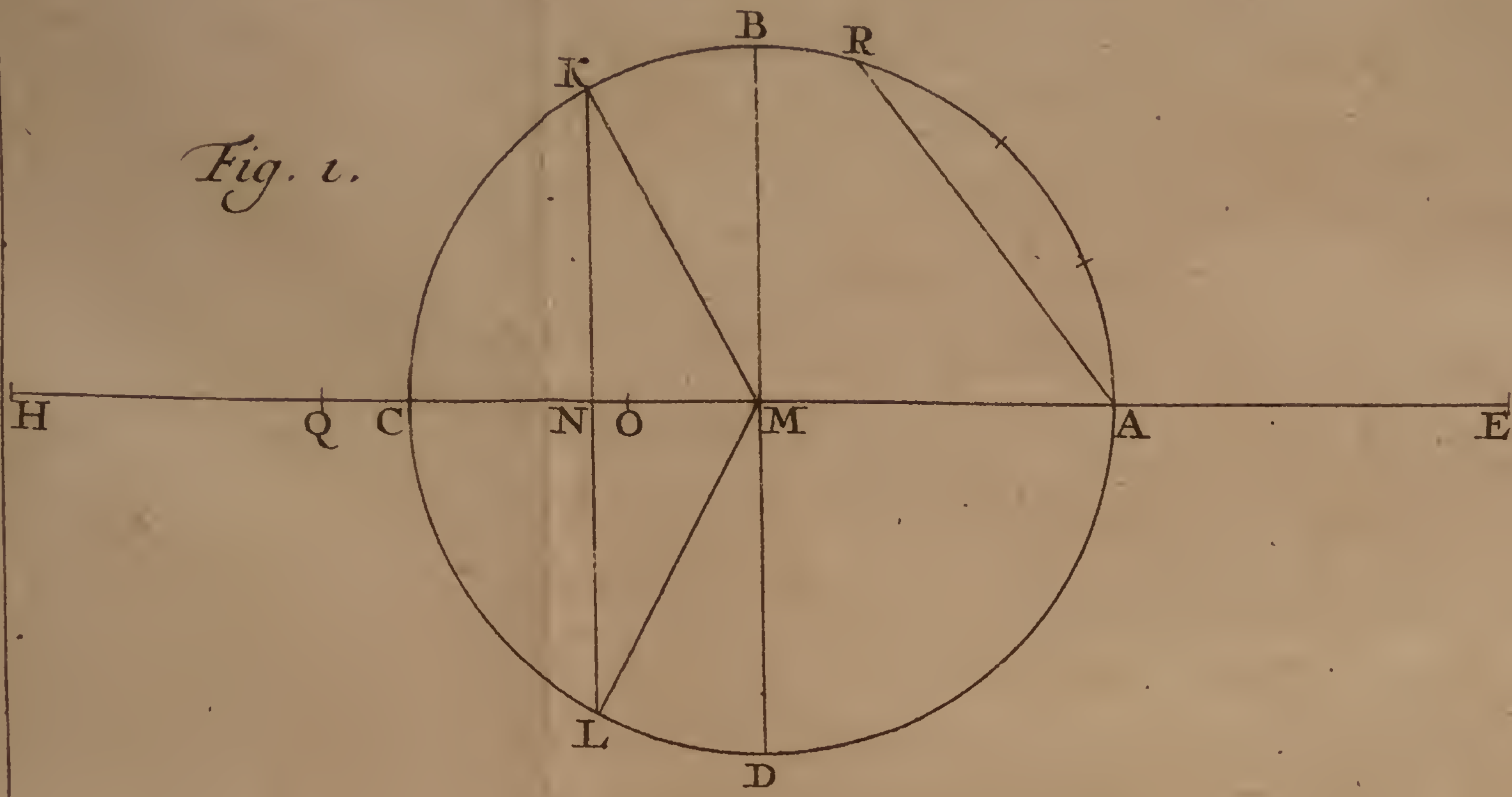
 cir-

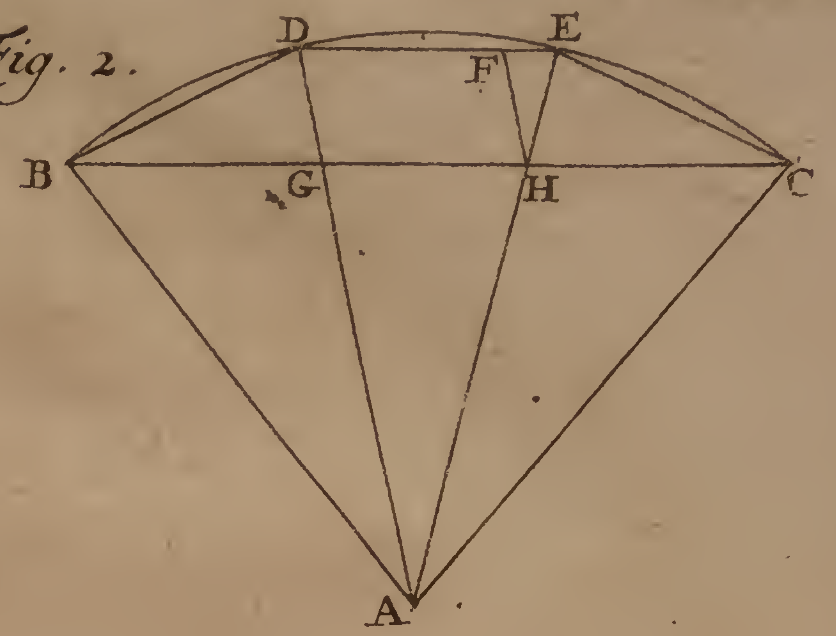
circumferentiæ portio deſcribatur quæ capiat angulum ipſi B F A æqualem. Secabit ea productum latus F A, ut modo oſtendetur. Itaque ad interſectionis punctum C ducatur B C. Dico hujus partem interceptam D C lineæ datæ K æqualem eſſe. Quod autem circumferentia deſcripta latus F A productum ſecabit, ſic primùm oſtenditur. Ducatur A N ita ut ſit angulus B A N angulo B F A vel B E A æqualis. Itaque triangulus B A N triangulo B E A ſimilis eſt, ac proinde iſoſceles quoque. Quare ſi ſuper B N circumferentia deſcribatur quæ capiat angulum B F A, ea continget latus F A in A puncto. Sed B G major eſt quam B N: nam quadratum A G majus eſt quadrato A N vel A B, cum ſit æquale quadratis ex K & A B. Quare A G cadet extra triangulum iſoſcelem B A N. Itaque manifeſtum eſt circumferentiam ſuper B G deſcriptam capientemque angulum ipſi B F A vel B A N æqualem ſecare lineam F A C. Eſto alterum interſectionis punctum M & jungantur B M, G C, & cadat in B E ex A perpendicularis A L.

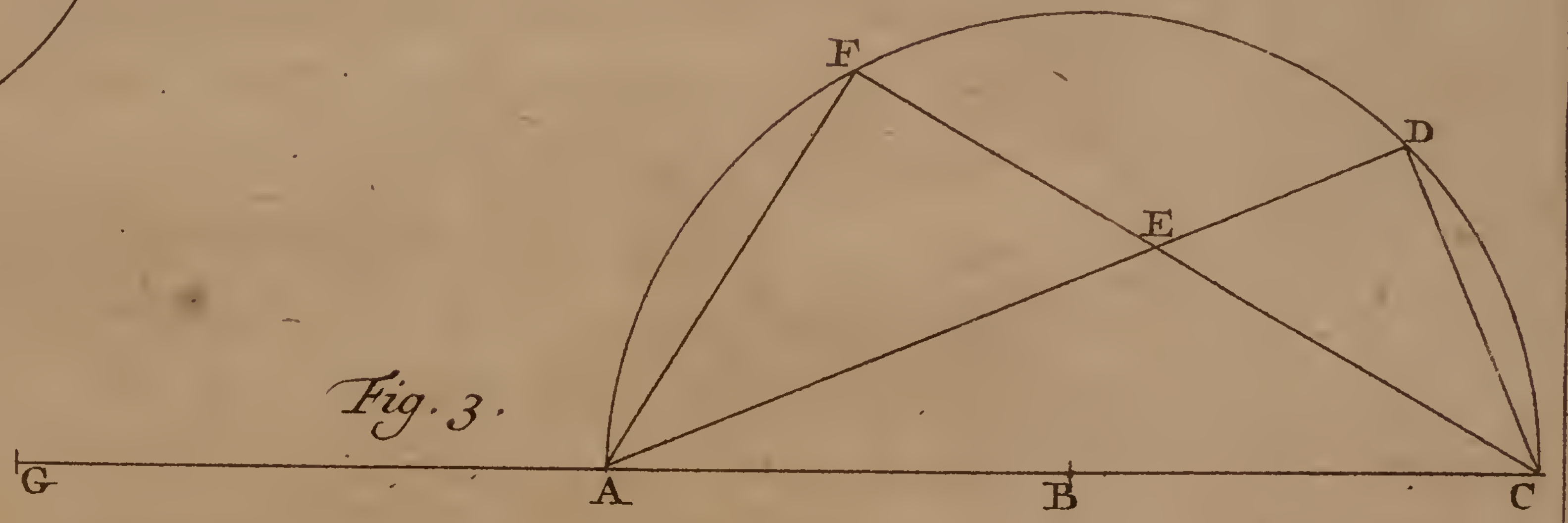
Quia igitur quadratum A G æquale eſt quadratis ex K & A B: atque idem quadratum A G æquale quadratis A B & B G minus duplo rectangulo G B L, hoc eſt, minus rectangulo G B N; erit K quadratum æquale quadrato B G minùs rectangulo G B N, hoc eſt, rectangulo B G N. Eſt autem ut rectangulum B G N ad rectang. B E, G N, ita B G ad B E. Ergo ut B G ad B E ita quoque quadratum K ad rectangulum G N, B E, hoc eſt, rectangulum G B E minùs rectangulo N B E. Eſt autem rectangulo G B E æquale rectang. C B D, quoniam G B ad B C ut D B ad B E propter triangulos ſimiles G B C, D B E; habent enim angulum ad B communem, & angulus B C G ipſi B E D eſt æqualis. Item rectangulo N B E æquale eſt quadratum A B quia propter triangulos ſimiles eſt N B ad B A ut A B ad B E. Ergo erit G B ad B E ut quadratum K ad rectangulum C B D minùs quadrato A B. Eſt autem rectangulo C B D minùs quadr. A B æquale rectangulum D A, A C; quod ſic oſtenditur. Etenim quia quadrilaterum C G B M

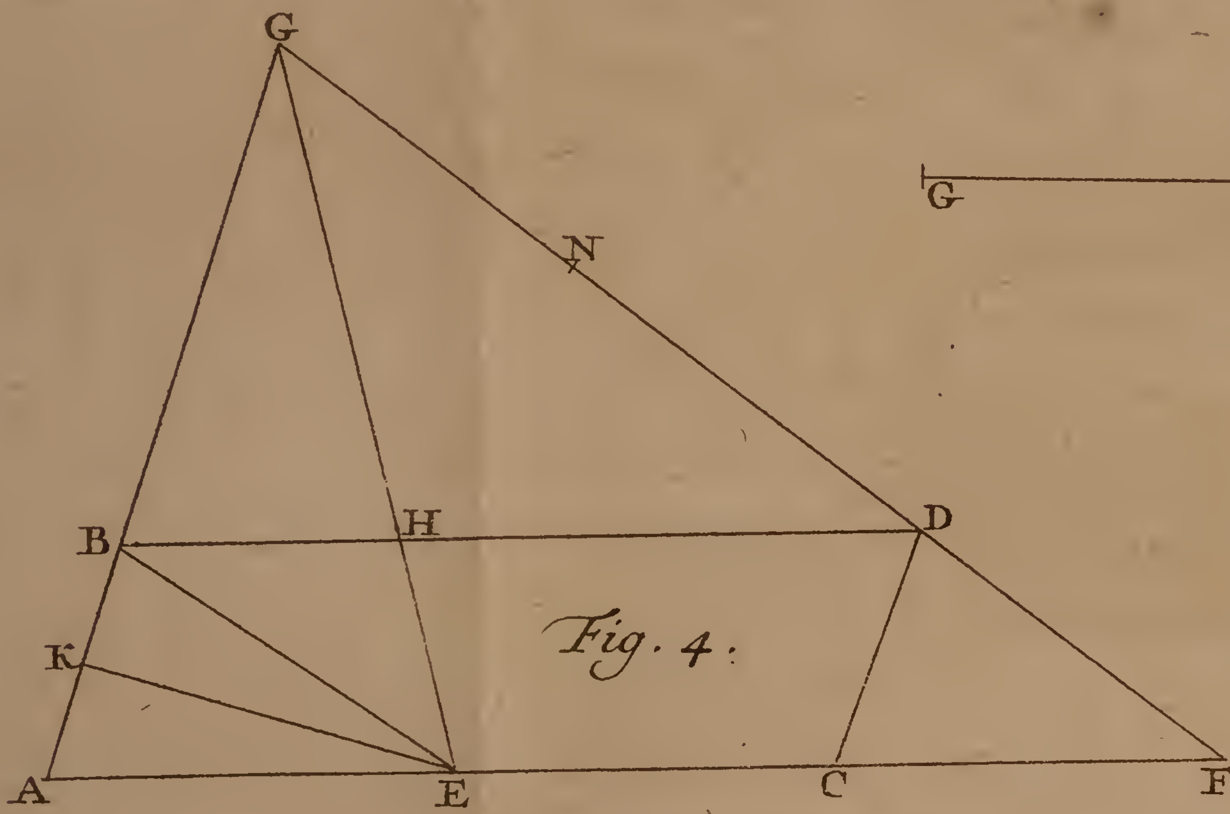
eſt

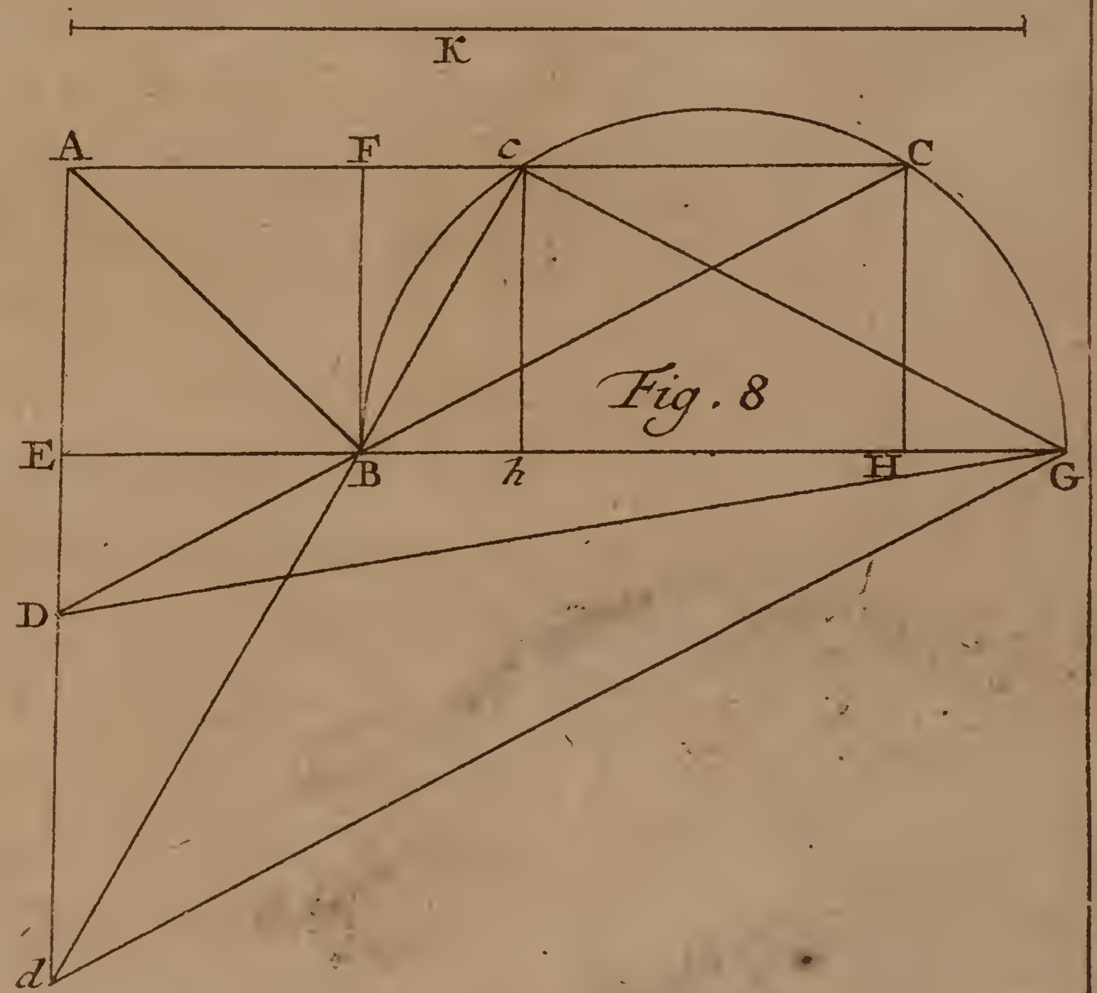

S
T

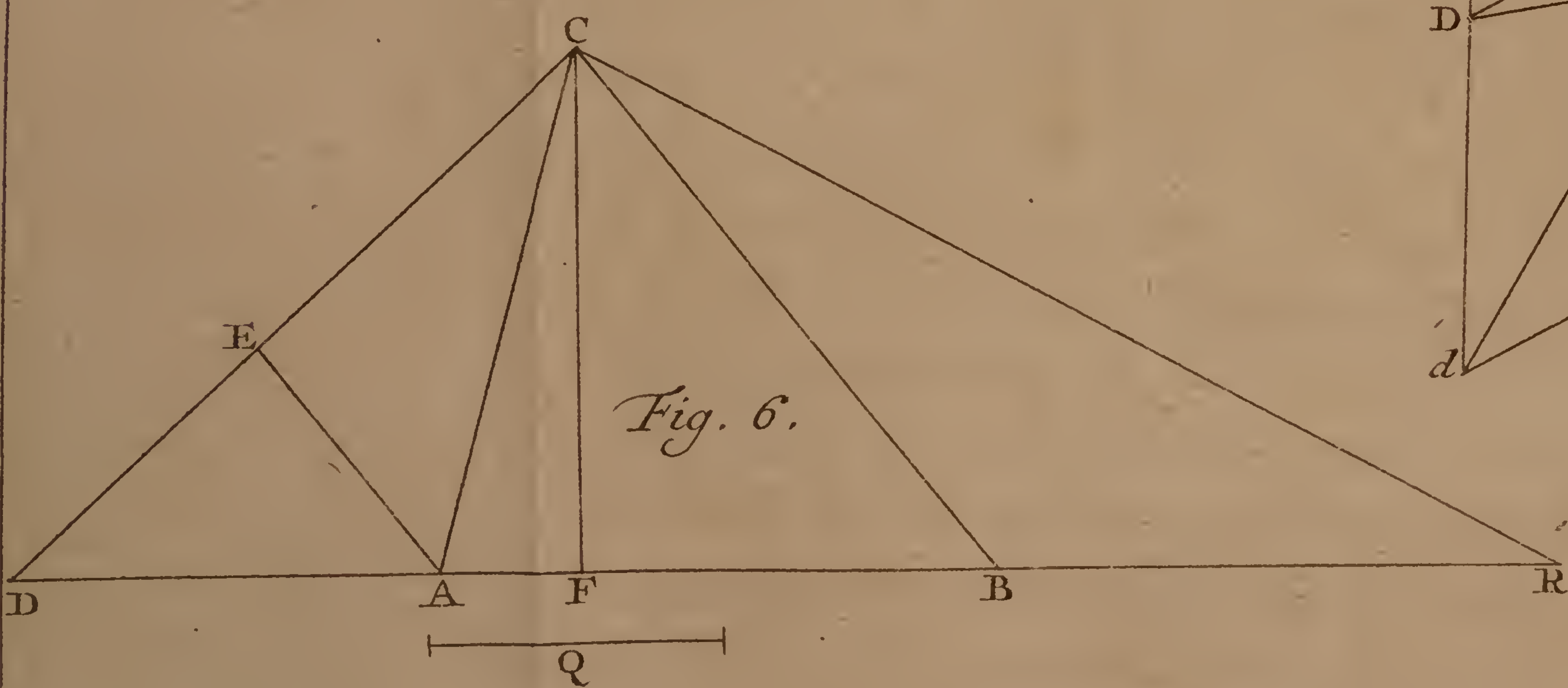

Fig. 1.
K
B
R
H
Q
C
N
O
M
A
E
L
D

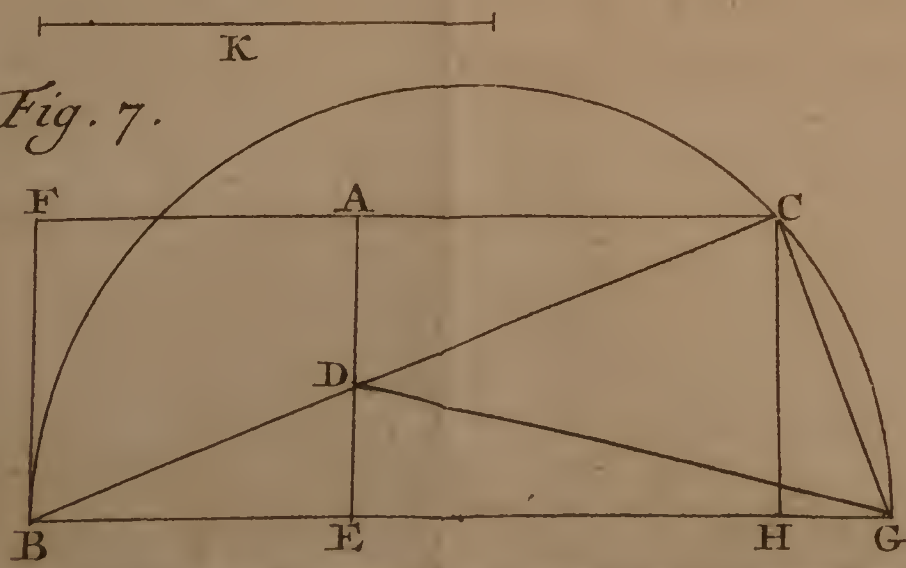

Fig. 2.
D
E
F
B
G
H
C
A

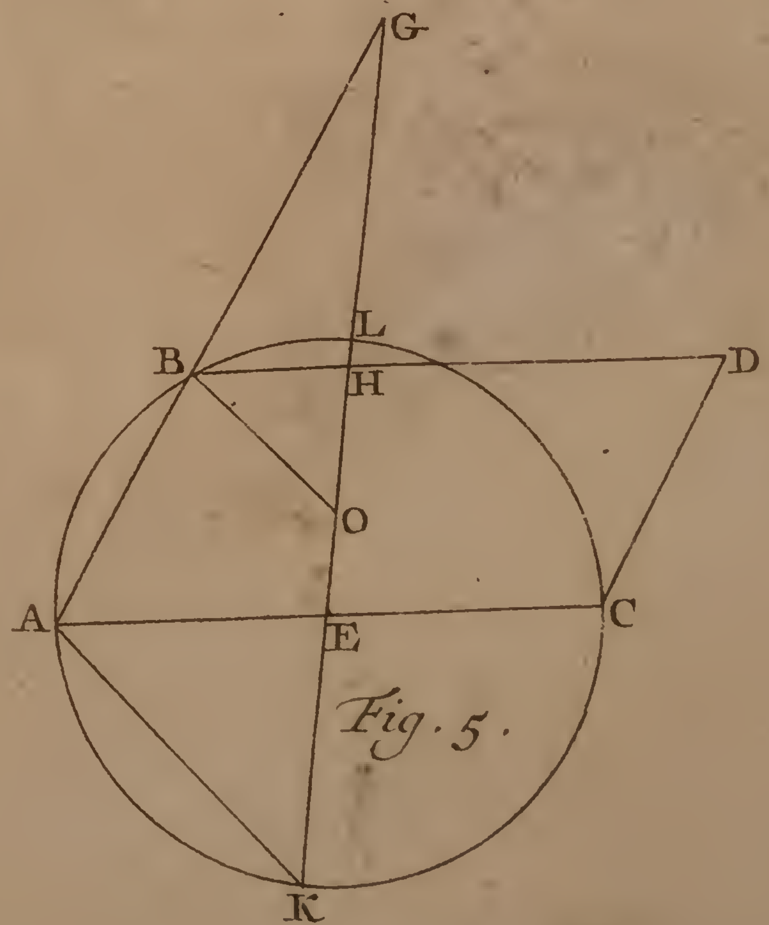

F
D
E
Fig. 3.
G
A
B
C


G
N
B
H
D
K
Fig. 4.
A
E
C
F


K
A
F
c
C
Fig. 8
E
B
h
H
G
D
d


C
E
Fig. 6.
D
A
F
B
R
Q


K
Fig. 7.
F
A
C
D
B
E
H
G


G
L
B
H
D
O
A
E
C
Fig. 5.
K

est in circulo, sunt anguli C G B & B M C simul duobus rectis æquales. Sed & anguli E D B, A D B. Quorum E D B æqualis angulo C G B propter similitudinem triangulorum G B C, D B E. Ergo & angulus B M C æqualis erit angulo A D B. Trianguli igitur A B M, A B D angulos M & D inter se æquales habent. Verum & angulos ad A, & latus A B commune. Itaque dicti trianguli similes sunt & æquales. Quare A M æqualis A D, & M B æqualis B D, & angulus M B A æqualis A B D. In triangulo igitur M B C angulus B in duo æqualia dividitur à recta B A, ideoque rectang. M B C minus quadrato B A æquatur rectangulo M A C. Sed rectangulo C B M æquale est rectangulum C B D; & rectangulo M A C æquale rectang. D A C. Igitur rectang. C B D minus quadrato B A æquale rectangulo C A D, uti dictum fuit. Est itaque G B ad B E ut quadr. K ad rectangulum D A C. Sicut autem G B ad B E ita est rectang. G B E, hoc est, rectang. C B D ad quadratum B E. Ergo ut quadratum K ad rectang. D A C ita rectang. C B D ad quadratum B E. Ratio autem rectanguli C B D ad quadr. B E composita est ex ratione D B ad B E, hoc est, D C ad C A, & ex ratione C B ad B E sive B F, hoc est, C D ad D A. Ergo & quadr. K ad rectang. D A C eam habet rationem quæ componitur ex ratione D C ad C A & D C ad D A, hoc est, eam quam quadratum D C ad rectang. D A C. Quamobrem quadr. K. quadrato D C æquale est: Et D C ipsi K longitudine. Quod erat demonstrandum.

PROBL. VII.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.

TAB. XLII. Fig. 2.

Sit datus rhombus A B cujus producantur latera A F, A E; data autem sit recta K cui æqualem ponere oporteat C D, per angulum B transeuntem. Ducatur diameter A B, eique ad angulos rectos linea S B R, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro F E. Igitur K non minor debet esse quam S R. Si vero æqualis, factum est quod proponebatur. Sed ponatur K major data esse quam S R. Erit jam in schemate hoc prout propositum est constructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonstratio autem nonnihil diversa. Etenim hoc primò aliter ostenditur quod circumferentia super B G descripta secat productam A F. Sit A L ad E B perpendicularis & ducatur S T ut sit angulus B S T æqualis angulo E A F vel B F S. Est itaque triangulus B S T triangulo B F S similis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus B S T. Apparet igitur lineam A S æquari ipsi L B cum dimidia B T. Quare dupla A S æquabitur duplæ L B & toti B T. Sed dupla A S est quadrupla A F vel E B. Ergo quadrupla E B æqualis duplæ L B & B T. Sumptâque communî altitudine B T, erit rectangulum sub quadrupla E B & B T contentum, æquale duplo rectangulo L B T & quadrato B T. Et addito utrimque quadrato B L, erit rectangulum E B T quater cum quadrato L B æquale rectangulo L B T bis cum quadratis B T, B L, hoc est quadrato L T. Quia vero propter triangulos similes est T B ad B S ut B S ad B F sive B E, æquale erit rectang. E B T quadrato B S; & quater sumptum quadrato R S. Itaque quadr. S R cum quadrato L B æquale quadrato L T. Quadratum vero K (quod majus est quam R S quadr.) unà cum eodem quadrato L B æquale est quadrato L G, uti ex constructione manifestum est, quia scilicet quadr. A G æquale positum fuit quadratis ex K & A B. Itaque majus est quadr. L G quam L T, & L G major quam L T, & B G quam B T. Quamobrem circumferentia super B G descripta capax anguli E A F secabit rectam A S; nam similis circumferentia, si super B T describatur, ea continget ipsam in S puncto, quoniam angulus

gulus B S T ipsi E A F æqualis est triangulusque B S T æquicruris.

Porrò quod C D ipsi K æqualis est, sic demonstrabitur. Quia quadratum A G æquale est quadratis ex K & A B: idemque quadratum A G æquale quadratis A B, B G cum duplo rectangulo G B L. Erit propterea quadratum K æquale quadrato B G cum duplo rectangulo G B L. Sicut autem B G ad B E ita est quadratum B G cum duplo rectangulo G B L ad rectangulum G B E cum duplo rectanctulo E B L; singula enim ad singula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L ut B G ad B E. Est autem rectangulo G B E æquale rectangulum C B D, quoniam C B ad B G ut E B ad B D, propter triangulos similes C B G, E B D; habent enim angulos ad B æquales & angulum B C G angulo B E D. Item duplo rectangulo E B L æquale est quadratum A B, quia propter triangulos similes ut S A, hoc est, dupla B E ad A B ita A B ad B L. Igitur ut B G ad B E ita erit quadratum K ad rectangulum C B D cum quadrato A B. Sed hisce duobus æquale est rectangulum C A D; quoniam in triangulo C A D angulus A bifariam dividitur à linea A B. Ergo ut B G ad B E ita est quadr. K ad rectangulum C A D. Atque hinc porrò eodem modo ut in casu præcedenti concludemus lineam D C ipsi K æqualem esse, repetendo ista: Sicut autem G B ad B E, &c.

Utrumque præcedentium Aliter.

Sit datus rhombus A D B C cujus productum latus D B. Et data sit linea G. Oportet ducere rectam A N F, ut pars intercepta N F sit datæ G æqualis. TAB. XLII. Fig. 3.

Ducatur diameter A B, & quadratis ex G & A B sit æquale quadratum A H, & ducatur H E ipsi B A parallela. Et A E ipsi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico N F ipsi G æqualem esse.

Quod autem ad H E poni potest A E ipsi G æqualis, hinc

hinc manifestum est. Etenim quadratum A H majus est quadratis A X & X H, quum sit angulus A X H obtusus. Sed idem quadratum A H æquale ponitur quadratis A B seu H X & G. Itaque quadratum G seu A E majus est quadrato A X. Unde apparet intersectionem E accidere inter puncta H & X.

Producatur B D & ponatur ipsi æqualis D R. & sit R K parallela D A vel B C, eique occurrant productæ F A, B A, H E, in punctis M, Q, K: & jungatur R A, & producatur ad P.

Quoniam igitur D R æqualis est D B, & R Q K parallela D A, erit & M A æqualis A N, & Q A æqualis A B; angulus autem B A R rectus, quum sit in semicirculo, nam tres hæ æquales sunt D B, D A, D R. Parallelæ autem sunt B Q, H E K, ergo & anguli ad P recti, & erit H P æqualis P K. Est itaque quadratum A H æquale quadrato A E unà cum rectangulo H E K*. Sed idem quadratum A H æquale est etiam quadratis ex G seu A E, & ex A B. Itaque quadr. A B æquale erit rectangulo K E H. Ac propterea K E ad A B ut A B ad E H. Verum ut K E ad A B seu Q A ita est E M ad M A: & ut A B ad E H ita A F ad F E. Igitur E M ad M A ut A F ad F E: Et proinde E A ad A M ut E A ad E F. Æqualis est igitur E F ipsi A M; quare & ipsi A N. Ideoque & F N ipsi A E, hoc est, datæ G. Quod erat demonstrandum.

* 12. 2 Elem.

TAB. XLII. Fig. 4.

Sit denuo datus rhomdus A D B C, cujus producta latera B D, B C; & data sit linea G. Oportet ducere rectam N F transeuntem per angulum A, quæque æqualis sit ipsi G.

Ducatur diameter B A, eique ad angulos rectos R A L. Si igitur G minor detur quam R L, problema construi nequit, uti supra quoque dictum fuit. Si vero æqualis, jam factum est quod quærebatur. Sit igitur G major quam R L. Erit in schemate adjecto, sicut propositum est, constructio & demonstratio eadem quæ in casu præcedenti.

Illud

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam H E poni poteſt A E ipſi G æqualis. Sit R S æqualis R B, & jungatur A S. Quoniam igitur in triangulo B A S à vertice ad mediam baſin ducta eſt A R, erunt quadrata B R & R A ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum B A cum duplo quadrato A R, ſubdupla quadratorum B A, A S*. Itaque quadratum A B duplum cum quadruplo quadrato A R, hoc eſt, cum quadrato R L, æquabitur quadratis B A, A S. Quare ablato utrimque quadrato B A, erit quadratum A S æquale quadratis B A & R L, ac proinde minus quam quadr. A H; nam hoc æquale eſt quadratis A B & G. Eſt igitur A S minor quam A H. Sed major eſt quam A R. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim A R H obtuſus eſt. Major itaque eſt R H quam R S vel R B. Et quum propter triangulos ſimiles ſit R H ad H P ut R B ad B A, erit quoque H P major quam B A; & quadratum H P majus quadrato A B. At quadratum H P cum quadrato P A æquatur quadrato A H, hoc eſt, quadratis B A & G. Ergo cum quadratum H P ſit majus quadrato A B, erit invicem quadr. P A minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio A E ipſi G æquali, ea lineam H E ſecabit.

* per 122. lib. 7. Pappi.

PROBL. VIII.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam, & duas medias invenit proportionales. Eſto ea C Q D, polus G, regula autem A B cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet G Q ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam A B intercepta ſit ipſi A Q æqualis. TAB. XLII, Fig. 5.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto C Q D verſus polum G cavam eſſe, lineam

verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diversum curvari; quæsitum est qua ratione puncta ea determinari possent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc sequentem invenimus constructionem.

Sit duabus A G, A Q tertia proportionalis A E, sumenda versus G. Et ponatur G F æqualis G E. Porro sit G R ipsi G Q ad angulos rectos, & æqualis duplæ G A. Et describatur parabole R O, cujus vertex sit R axis R G, latus rectum ipsi A G æquale. Centro autem F radio F R circumferentia describatur, quæ parabolen secet in O; & ducatur O C parallela A B occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæsita in confinio flexionis contrariæ.

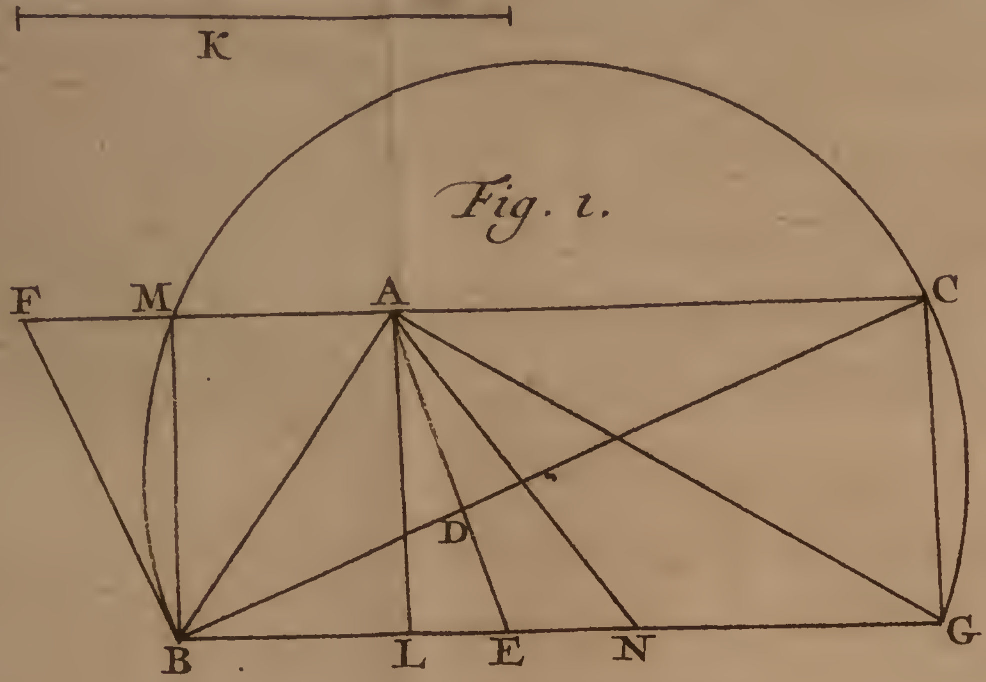
TAB. XLII. Fig. 6. Ista autem Universalis est constructio. At quando quadratum ex A Q non majus est quam duplum quadrati A G, arcus trisectione propositum quoque efficiemus. Et diversè quidem prout A Q major vel minor erit quam A G. Etenim si minor, describenda est circumferentia centro A radio A G, in eaque ponenda G K æqualis duplæ G E, inventæ ut priùs. Et rectæ G H quæ subtendit trientem circumferentiæ K H G æqualis sumenda G M, & per M ducenda ut ante D C ipsi

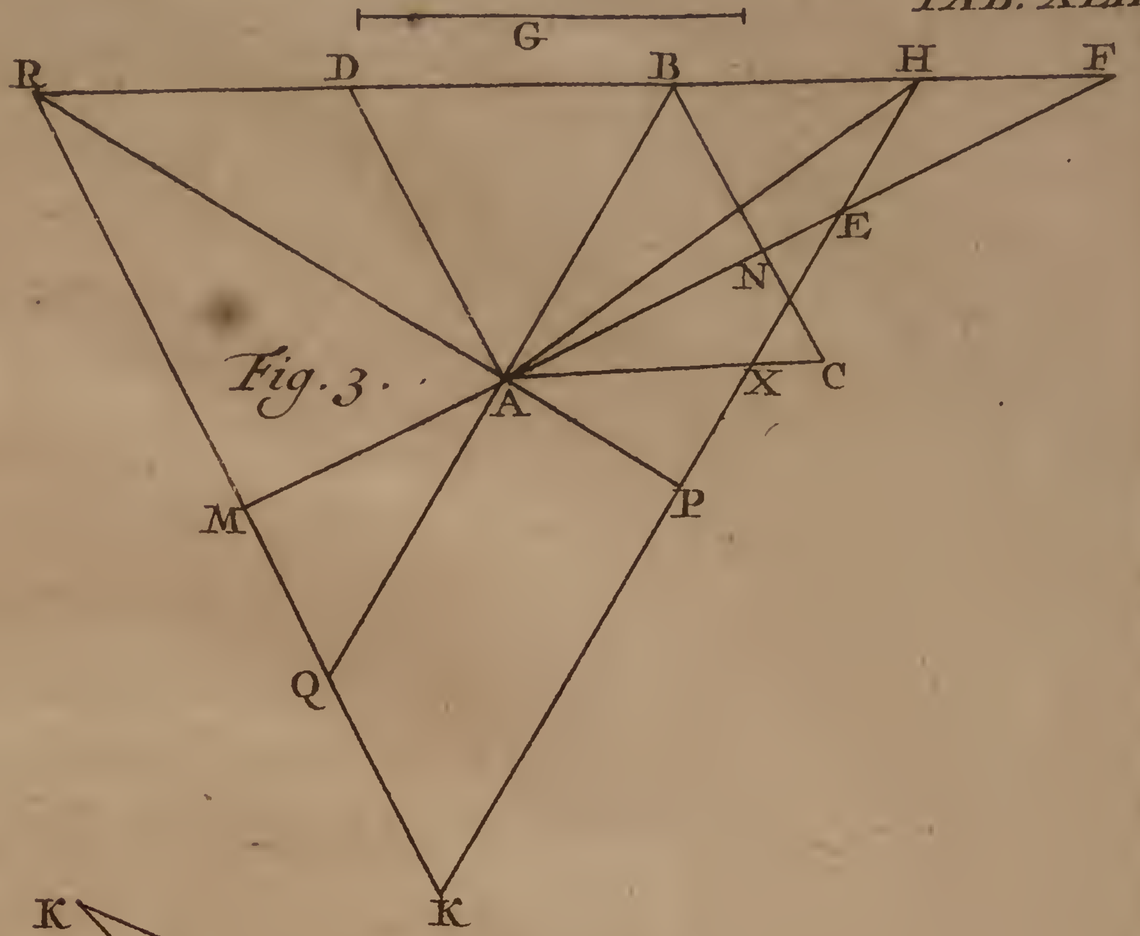
TAB. XLII. Fig. 7. A B parallela. Cum verò A Q major est quam A G, cæteris ad eundem modum compositis, hæc tantum differentia erit quod arcum K P, qui unà cum arcu G K semicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam constituere P H, & subtensæ G H æqualem sumere G M.

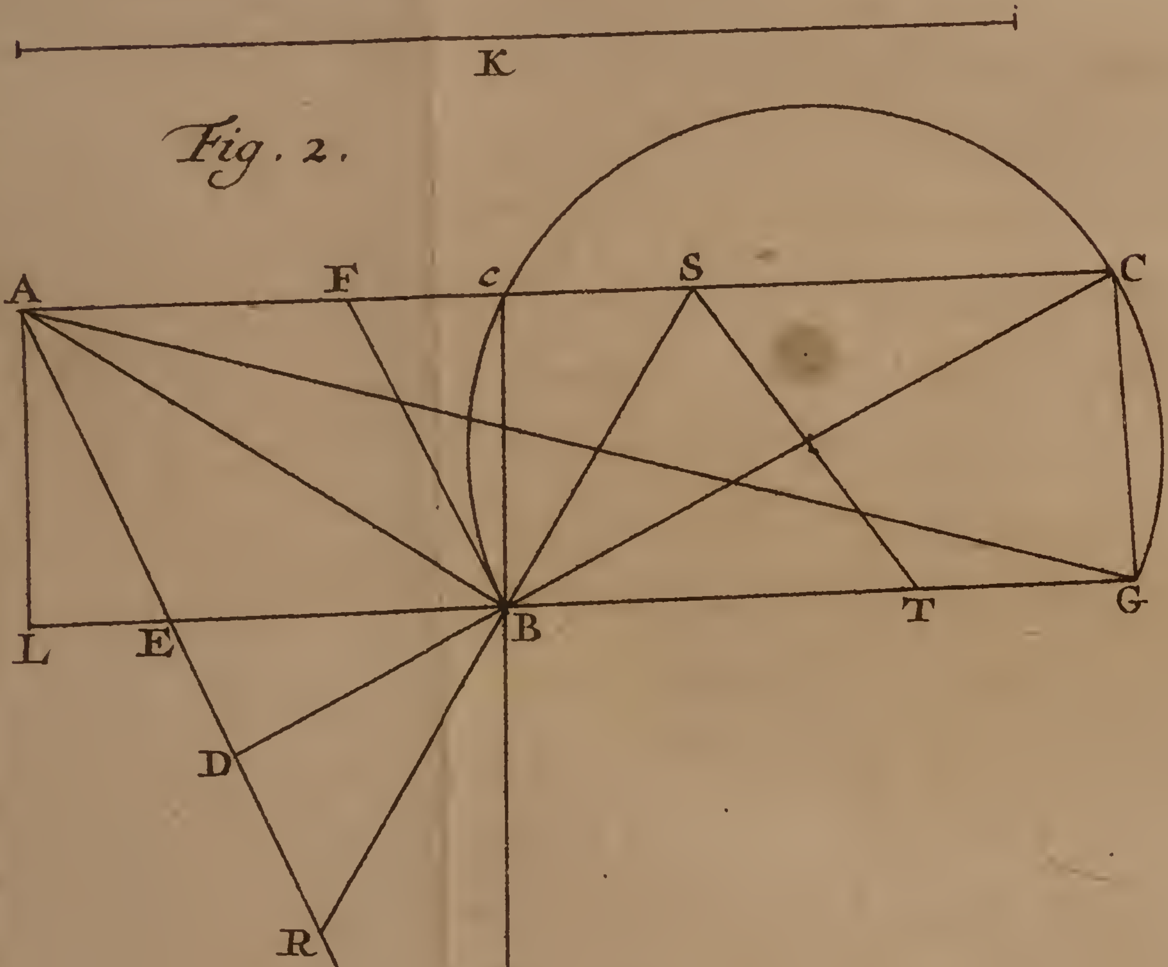
Porro planum est Problema cum A G æqualis A Q. Tunc enim G M fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inscripti. Item cum quadratum A Q duplum est quadrati A G: fit enim G M dupla ipsius G A.

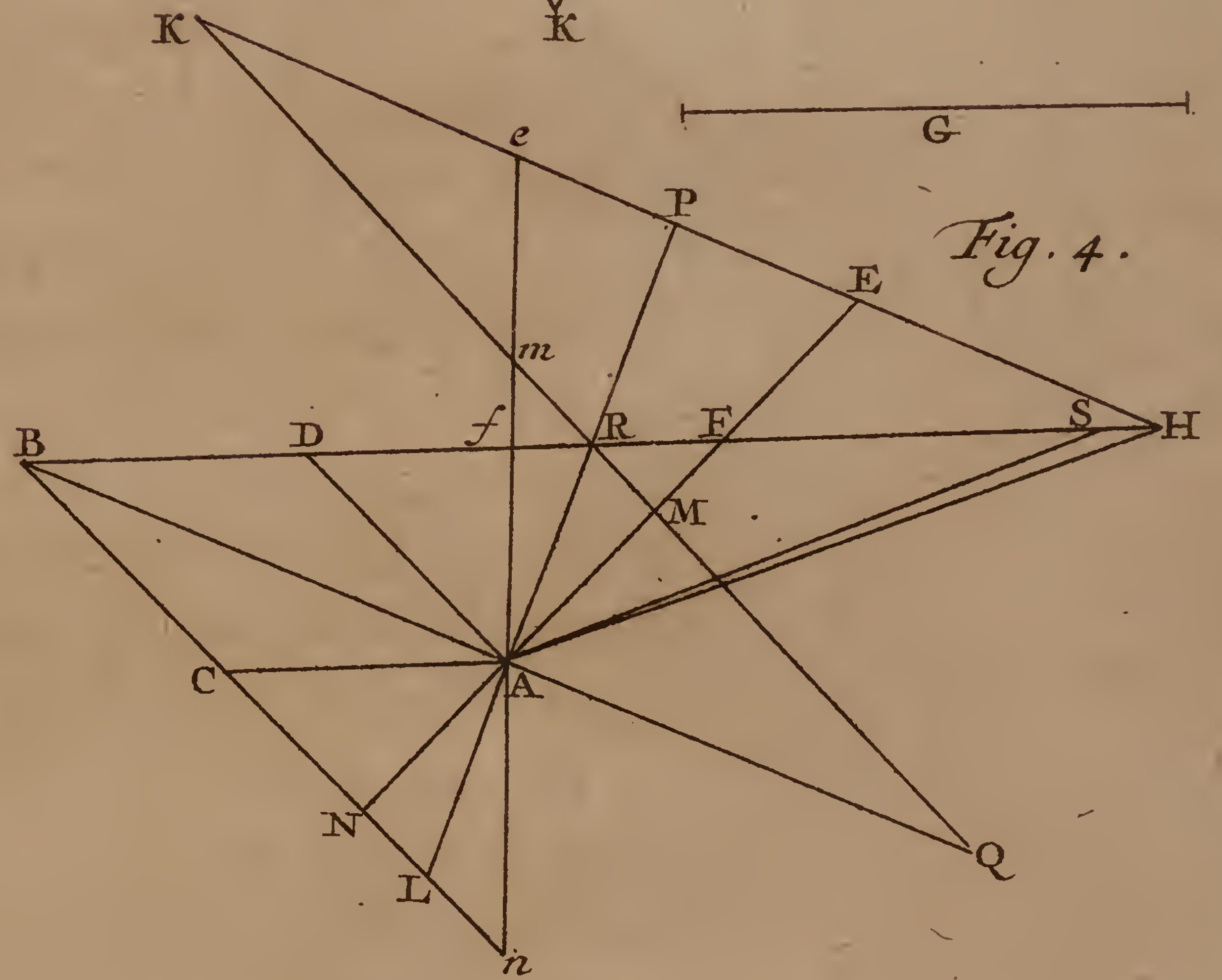
Sed & aliis casibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè discerni poterunt, qui ad anguli trisectionem reducuntur.

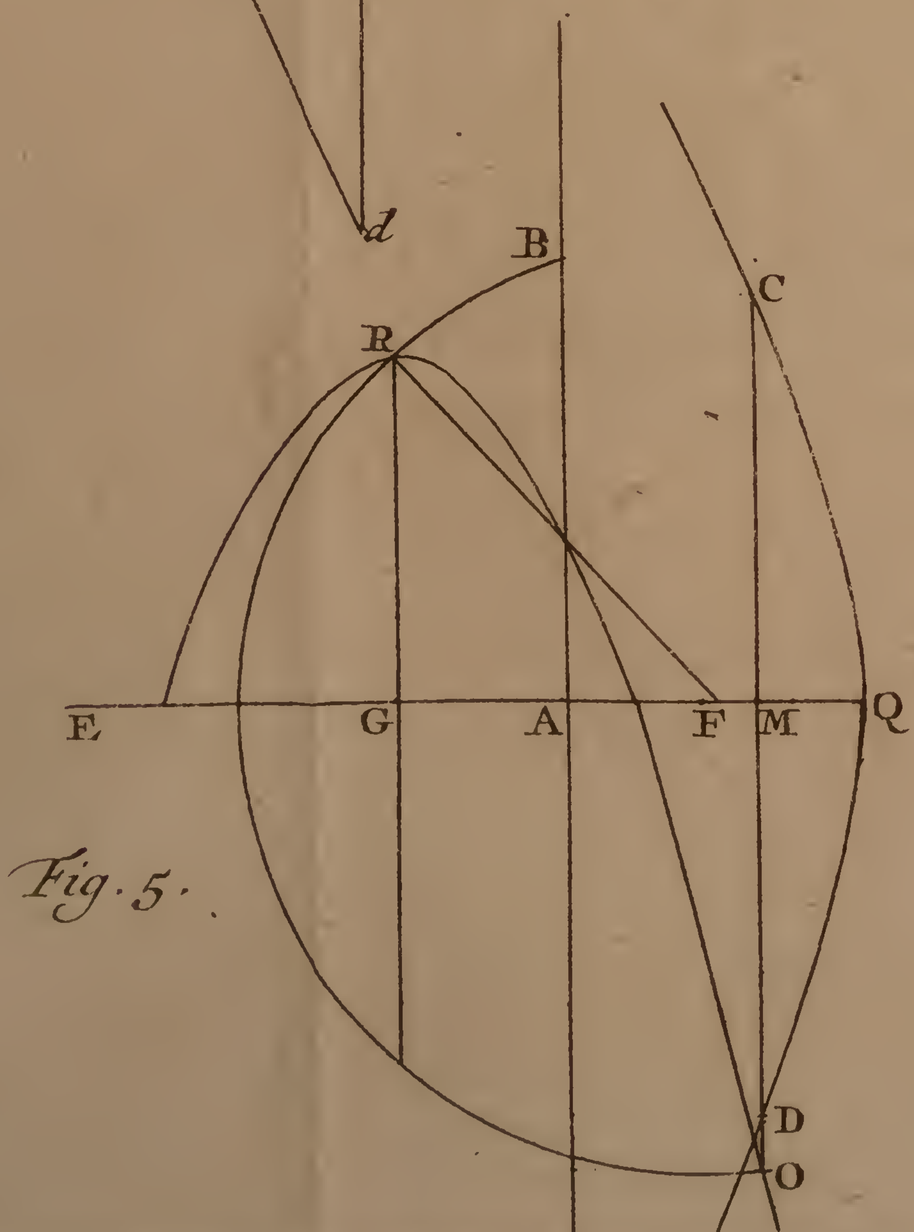
F I N I S.

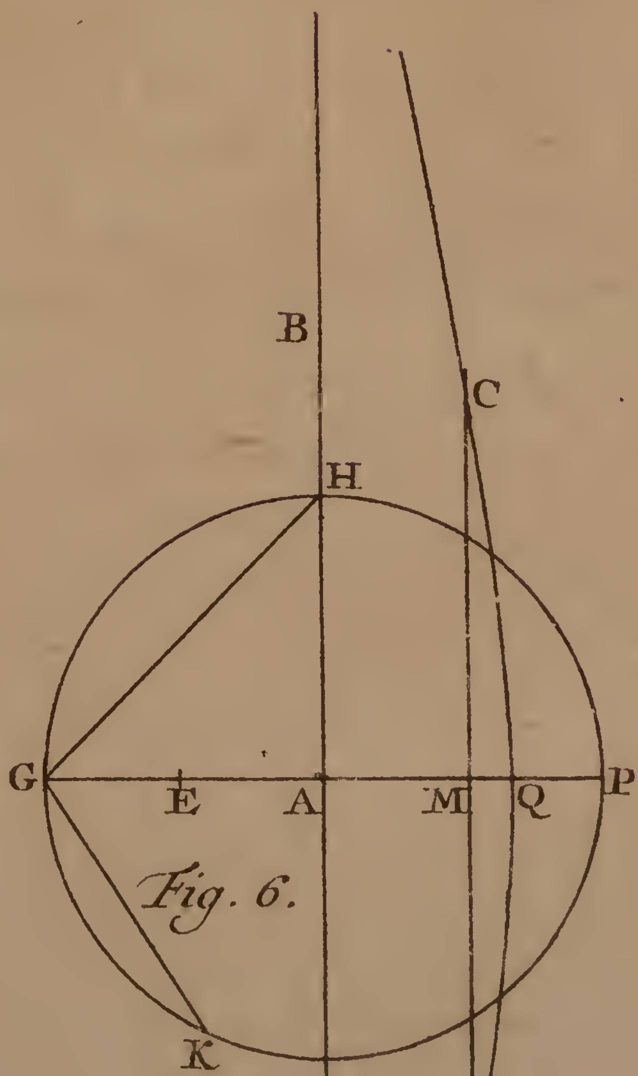

K
Fig. 1.
F M A C
D
B L E N G

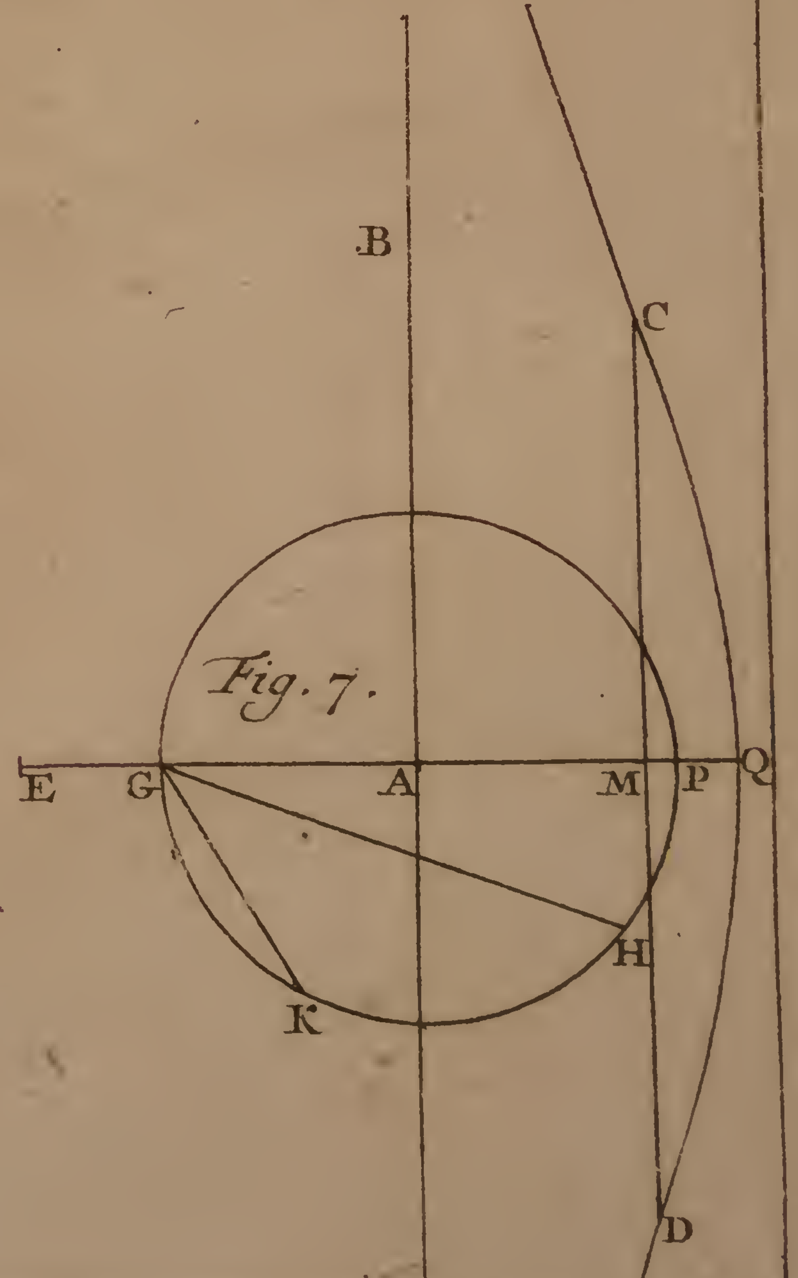

G
R D B H F
E
N
Fig. 3.
A X C
M P
Q
K


K
Fig. 2.
A F c S C
L E B T G
D
R
d


K
G
e
P
Fig. 4.
E
m
B D f R F S H
M
C A
N
L
Q
n


B
C
R
E G A F M Q
Fig. 5.
D
O


B
C
H
G E A M Q P
Fig. 6.
K
D


B
C
Fig. 7.
E G A M P Q
H
K
D

DE
CIRCULI
ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA
CONTROVERSIA.



VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA

AUTHORE

JACOBO GREGORIO.

LECTORI GEOMETRÆ SALUTEM.



Ecum aliquando cogitabam, amice Lector, num Analytica cum suis quinque operationibus esset sufficiens, & generalis methodus investigandi omnes quantitatum proportiones, ut in initio suæ Geometriæ affirmare videtur Cartesius; si enim ita esset, possibile foret ejus ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumque hæc mente revolverem, facile percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam posse analysin institui tali structuræ inservientem: deinde mihi alias quærenti incidit in mentem hujus secunda, prima enim in circulo vulgo est cognita: ex hisce percepi seriem polygonorum convergentem, cujus terminatio est circuli sector; ubi statim vidi

aliquod analyſios veſtigium. deinde ſerierum convergentium naturis non ſolum in facilioribus quibusdam caſibus, ſed etiam in genere conſideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipſim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium ſectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc converti ut polygonorum ſeriem convergentem terminarem, inſuperabilem difficultatem in ejus terminatione invenienda poſt omnes artis & aleæ conatus deprehendi: Sed animo revolvens analyſios officium eſſe ſicut algebræ communis, non ſolum problemata reſolvere, ſed etiam eorum impoſſibilitatem (ſi opus ſit) demonſtrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus eſſem, ad ſecundum me converti, quod certe ſupra votum ſucceſſit; non enim ſolius circuli (quam mihi ab initio propoſueram) ſed omnium ſectionum conicarum veram & legitimam in ſua proportionum ſpecie quadraturam, & integram proportionis ſpeciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem ſaltem in relatione ad dimenſionem ſectionum conicarum ad commenſurabilem veræ quam proximam reduco, praxi facili, demonſtrabili, & extractione radicis ſurde ſolidæ (ni fallor) multo breviore; in omni enim proportione incommenſurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: ut autem melius concipiamus hujus proportionis naturam, loquamur de proportione quatenus ortum habet à quinque

ope-

operationibus analyticis, seu arithmeticæ vulgaris, proportio enim nobis notior est in numeris seu in quantitate discreta, quam in continua, neque vereor post Cartesium has operationes in geometriam adducere. Primo itaque sciendum est nos semper nobis proponere quantitates commensurabiles, seu quæ inter se sunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incommensurabilem nisi relativè ad commensurabilem nullo modo percipimus, habet enim in se nescio quid infiniti, mentem nostram obtundens & simplicem perceptionem impediens: deinde ex illis quinque operationibus arithmeticis, duæ sunt tantum simplices, additio & substractio; multiplicatio enim est composita ex additione, & divisio ex substractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam incommensurabilem, componitur ex præcedentibus quatuor; & nostra sexta operatio quæ in genere nihil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, quam proximè accedentis ad nostram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Advertendum quoque est sicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, subductione, multiplicatione, sed tantum ex divisione; & numeri incommensurabiles nunquam procedunt ex commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, divisione, sed tantum ex radicum extractione;
ita

ita numeros, vel quantitates non analyticas nunquam provenire ex analyticarum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione, ſed ex ſexta hac operatione; ita ut hæc noſtra inventio addat arithmeticæ aliam operationem, & geometriæ aliam rationis ſpeciem, idem enim eſt (ſicut in hoc tractatulo demonſtro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica ſeu illa rationis ſpecie hactenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & ejuſdem diametrum in commenſurabilibus: verum certè eſt me hanc demonſtrationem integram ad phraſem geometricam non reduxiſſe, nam ut hoc perficiatur, opus eſt non parvo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter ſe relatione & incommenſurabilitate in genere, quod miror nullum unquam ſcripſiſſe, cum in his tam latè pateant inventionum campi; nam ex his petenda eſt demonſtratio, quod meſolabium non poſſit perfici ope regulæ & circini, item quod non ſemper & quando æquationes affectæ poſſunt reduci ad puras, item quod neceſſaria ſit ad minimum talis generis curva ad mechanicam talium æquationum reſolutionem, cum talibus innumeris, quæ à præſtantioribus geometris impoſſibilia eſſe deprehenduntur ex analyſi, & à rudioribus quotidie & fruſtra quæruntur. Scripſit Euclides decimum ſuum librum ſolummodo (niſi in paucis quibuſdam propoſitionibus generalibus) de incommenſurabilitate facta ab extractione radicis quadratæ;

tæ ; neque quantum scio ab ullo alio tractata est hæc materia, etiamsi geometriæ speculativæ non solum utilissima sit, sed etiam maxime admirabilis; in ipso enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fuerit progressio geometrica cujus unus terminus fuerit propositæ quantitati commensurabilis longitudine vel potestate quacunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quodcunque, impossibile est duos totius progressionis terminos in infinitum continuatæ esse inter se commensurabiles longitudine vel potestate quacunque: alia multa possem afferre, sed pro commodiore fortassis tempore hæc reservo, satis existimans pro præsenti hæc analyticè demonstrasse; etsi enim analysis assensum adeo violenter non cogat ac geometria, nunquam tamen respuit nec respuere potest geometria, quod probavit semel analysis geometrica. Ex hac inventione deduco quoque novam sectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem quidem, in praxi expeditissimam & geometrica demonstratione munitam; hactenus enim logorithmorum constructio prolixissima, conjectura potius quam scientia videbatur, & divisio anguli in partes æquales ultra quinque numero primo numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia summa (qua possum) brevitate & perspicuitate demonstro; neque scrupulosus sum in citationibus, utpote peregrinus, & libris ad tale opus destitutus, te enim suppono in geometricis non mediocriter versatum, alioquin nul-

lum hinc fructum colliges.

DEFINITIONES.

1 Si in circulo, ellipse vel hyperbola ducantur è centro in ejus perimetrum duæ rectæ, appellamus planum ab illis rectis & perimetri segmento comprehensum, sectorem.

2 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcumque subtendatur, ita ut triangula rectilinea (quorum communis vertex est sectionis centrum & bases rectæ subtendentes) sint æqualia; vocamus rectilineum illud ab istis triangulis conflatum, polygonum regulare inscriptum, si sectio conica fuerit circulus vel ellipsis; quod si fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumscriptum.

3 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcunque tangatur & à tactibus ad sectionis centrum ducantur rectæ; si inquam omnia trapezia, a tangentibus proximis & rectis ad centrum comprehensa, fuerint æqualia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumscriptum, si sectio conica sit ellipsis vel circulus, & polygonum regulare inscriptum si fuerit hyperbola.

4 Si omnes anguli (excepto illo ad sectionis centrum) polygoni regularis à subtendentibus comprehensi insistant omni-

omnibus contactum punctis polygoni regularis à tangentibus comprehensi, appello hæc polygona complicata.

5 Quantitatem dicimus à quantitatibus esse compositam; cum à quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.

6 Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.

7 Quando quantitates à quantitatibus inter se commensurabilibus analyticè componi possunt, dicimus illas esse inter se analyticas.

8 Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eâdem omnino methodo & iisdem omnino operationibus quibus antè componebatur X, positis quantitatibus F, G, loco quantitatum A, B, si inquam hoc fiat: dicimus quantitatem X eodem modo componi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

9 Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia sit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D; &

A	B
C	D
E	F
G	H

eodem modo quo E componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitaiibus A, B; componatur G à quantitatibus E, F; & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F; atque ita continuetur series: appello hanc ſeriem, ſeriem convergentem.

10 Ejus termini juxta ſe poſiti nempe A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini convergentes.

PETITIONES.

1 Petimus quantitates, à quantitatibus datis inter ſe analyticis analyticè compoſitas, eſſe inter ſe & cum quantitatibus datis analyticas.

2 Item quantitates, quæ à quantitatibus datis inter ſe analyticis non poſſunt analyticè componi, non eſſe cum quantitatibus datis analyticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortaſſis obſcuræ videbuntur, ſed tamen ex analyſeos elementis ſunt ſatis manifeſtæ.

VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

Sit circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſegmentum B I P cujus centrum A: compleatur triangulum A B P, & ſegmentum in punctis, B, P, tangentes ducantur rectæ B F, P F, ſe invicem ſecantes in puncto F; producatur (ſi opus ſit) recta A F ſegmentum interſecans in puncto I & rectam B P in puncto Q; deinde jungantur rectæ B I, P I. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

PROP. I. THEOREMA.

Dico trapezium B A P I *eſſe medium proportionale inter trapezium* B A P F, *&* *triangulum* B A P.

Quoniam recta A Q ducitur per F concurſum duarum rectarum F B, F P, ſegmentum in punctis B, P, tangentium; igitur recta A Q rectam B P contactuum puncta jungentem bifariam ſecabit in puncto Q; & proinde triangulum A B Q eſt æquale triangulo A Q P, & triangnlum F B Q triangulo F Q P; & igitur triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; eſt ergo triangulum A B F dimidium trapezii A B F P: eodem modo probatur triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P; & triangulum A B Q eſt dimidium trianguli A B P: cumque triangula A B F, A B I, A B Q, eandem habeant altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes, ſed eorum baſes nempe A F, A I, A Q, ſunt continuè proportionales; & igitur ipſa quoque triangula ſunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia A B F P, A B I P, & triangulum A B P ſunt continuè proportionalia in ratione A F ad A I, quod demonſtrare oportuit.

Ducatur recta D L segmentum tangens in puncto I, & rectis B F, F P, occurrens in punctis D, L, ita ut compleatur polygonum A B D L P.

PROP. II. THEOREMA.

TAB.XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico trapezia* A B F P, A B I P *simul, esse ad duplum trapezii* A B I P, *sicut trapezium* A B F P *ad polygonum* A B D L P.

Quoniam recta A F, ducta per contactum rectæ D L cum segmento, ducitur etiam per concursum duarum rectarum F B, F P, rectam D L terminantium & segmentum in duobus punctis tangentium; igitur recta D L bifariam secatur in puncto I; & proinde triangulum F D I æquale est triangulo F I L, at triangulum A B F æquale est triangulo A P F; & igitur trapezium A B D I æquale est trapezio A P L I; trapezium ergo A P L I dimidium est polygoni A B D L P. ducatur recta A L: manifestum est ex præcedentis demonstratione triangulum A I L esse æquale triangulo A L P; sed ut triangulum A L F ad triangulum A L I ita F A ad A I, & ut F A ad A I ita trapezium A B F P ad trapezium A B I P; & igitur ut trapezium A B F P ad trapezium A B I P; ita triangulum A L F ad triangulum A L I; & componendo, ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad trapezium A B I P, ita triangulum A F L & triangulum A I L simul, hoc est triangulum A F P, ad triangulum A I L: & consequentes duplicando, ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad duplum trapezii A B I P, ita triangulum A F P, ad trapezium A I L P: at triangulum A F P est dimidium trapezii A B F P, & trapezium A I L P est dimidium polygoni A B D L P; & igitur ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad duplum trapezii A B I P, ita trapezium A B F P ad polygonum A B D L P, quod demonstrare oportuit.

PROP.

PROP. III. THEOREMA.

Dico triangulum B A P, *& trapezium* A B I P *simul,* *esse ad trapezium* A B I P, *ut duplum trapezii* A B I P *ad polygonum* A B D L P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

In antecedente demonstratum est trapezia A B F P, A B I P simul, esse ad duplum trapezii A B I P, sicut trapezium A B F P ad polygonum A B D L P: & permutando trapezia A B F P, A B I P simul, sunt ad trapezium A B F P, ut duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P. & quoniam trapezium A B F P, trapezium A B I P & triangulum A B P, sunt continuè proportionalia; erit trapezium A B I P ad trapezium A B F P, ut triangulum A B P ad trapezium A B I P; & componendo, ut trapezia A B I P, A B F P simul, ad trapezium A B F P, ita triangulum A B P & trapezium A B I P simul, ad trapezium A B I P: erat autem, ut trapezia A B I P, A B F P, simul, ad trapezium A B F P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P; & igitur ut triangulum A B P & trapezium A B I P simul, ad trapezium A B I P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P; quod demonstrare oportuit.

Producantur (si opus sit) rectæ A D, A L, segmentum secantes in punctis E & O, & rectas B I, I P, in H & M: deinde jungantur rectæ B E, E I, I O, O P, ut compleatur polygonum A B E I O P.

PROP. IV. THEOREMA.

Dico polygonum A B E I O P *esse medium proportionale inter polygonum* A B D L P *& trapezium* A B I P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ex hujus prima manifestum est trapezium A I L P, trapezium A I O P & triangulum A I P esse continuè pro-

proportionalia, & ex prædictis satis facile colligi potest trapezium A I L P esse dimidium polygoni A B D L P & trapezium A I O P esse dimidium polygoni A B E I O P & triangulum A I P esse dimidium trapezii A B I P: & proinde terminos duplicando, polygonum A B D L P, polygonum A B E I O P & trapezium A B I P sunt continuè proportionalia, quod demonstrare oportuit.

Ducantur rectæ C G, K N, segmentum tangentes in punctis E, O, & rectis D L, D B, L P, occurrentes in punctis C, G, K, N, ut compleatur polygonum A B C G K N P.

PROP. V. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Dico trapezium A B I P *& polygonum* A B E I O P *simul, esse ad polygonum* A B E I O P, *ut duplum polygoni* A B E I O P *ad polygonum* A B C G K N P.

Ex hujus tertia manifestum est triangulum A B I & trapezium A B E I simul, esse ad trapezium A B E I, ut duplum trapezii A B E I ad polygonum A B C G I: & ex prædictis facile concludi potest triangulum A B I esse dimidium trapezii A B I P, & trapezium A B E I esse dimidium polygoni A B E I O P, & polygonum A B C G I esse dimidium polygoni A B C G K N P; & proinde terminos duplicando, trapezium A B I P & polygonum A B E I O P simul, erunt ad polygonum A B E I O P ut duplum polygoni A B E I O P ad polygonum A B C G K N P, quod demonstrandum erat.

Hinc facile colligi potest polygonum A B C G K N P esse medium harmonicum inter polygona A B E I O P, A B D L P, quod hic admonuisse sufficiat, in sequentibus enim demonstrabitur.

SCHO-

S C H O L I U M.

Duæ præcedentes propoſitiones eodem modo demonſtrari poſſunt de duobus quibuſcunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, AB DLP; polygonum enim à tangentibus comprehenſum tot continet æqualia trapezia, quot continet polygonum à ſubtendentibus comprehenſum æqualia triangula: atque hinc evidens eſt has polygonorum analogias ita ſe habere in infinitum, ducendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intra & extra ſemper ſcribendo: notandum nos appellare hanc polygonorum inſcriptionem & circumſcriptionem, inſcriptionem & circumſcriptionem ſubduplam, ex prædictis patet (ſi ponatur triangulum A B P $= a$, & trapezium A B F P $= b$) trapezium A B I P eſſe $vq\,ab$ & polygonum A B D L P $\frac{2ab}{a + vq\,ab}$: eodem modo poſito trapezio A B I P $= c$, & polygono A B D L P $= d$, erit polygonum A B E I O P $= vq\,cd$ & polygonum A B C G K N P $= \frac{2cd}{c + vq\,cd}$, ita ut evidens ſit hanc polygonorum ſeriem eſſe convergentem; atque in infinitum illam continuando, manifeſtum eſt tandem exhiberi quantitatem ſectori circulari, elliptico vel hyperbolico A B E I O P æqualem; differentia enim polygonorum complicatorum in ſeriei continuatione ſemper diminuitur, ita ut omni exhibita quantitate fieri poſſit minor, ut in ſequentis theorematis Scholio demonſtrabimus: ſi igitur prædicta polygonorum ſeries terminari poſſet, hoc eſt, ſi inveniretur ultimum illud polygonum inſcriptum (ſi ita loqui liceat) æquale ultimo illi polygono circumſcripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: ſed quoniam difficile eſt, & in geometria omnino fortaſſe inauditum tales ſeries terminare; præmittendæ ſunt quædam propoſitiones è quibus inveniri poſſint hujuſmodi aliquot ſerierum terminationes, & tandem (ſi

 fieri

fieri poſſit) generalis methodus inveniendi omnium ſerierum convergentium terminationes.

PROP. VI. THEOREMATA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico differentiam inter triangulum* ABP *& trapezium* ABFP *majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium* ABIP *& polygonum* ABDLP.

Sit triangulum A B P, A; trapezium A B F P, B; trapezium ABIP, C, & polygonum ABDLP, D: quoniam A eſt ad C ut C ad B, igitur ut differentia inter A & C ad A, ita differentia inter C & B ad C; & permutando, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & B ita A ad C; & componendo, ut differentia inter A & C & differentia inter C & B ſimul, hoc eſt differentia inter A & B, ad differentiam inter C & B, ita A † C ad C; ſed ut A † C ad C ita 2 C ad D, & ideo differentia inter A & B eſt ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D. quoniam A † C eſt ad C ut 2 C ad D, erit permutando ut A † C ad 2 C ita C ad D; & dividendo, ut differentia inter A & C ad 2 C ita differentia inter C & D ad D; & permutando, differentia inter A & C eſt ad differentiam inter C & D ut 2 C ad D; ſed demonſtratum eſt differentiam inter A & B eſſe ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D; & proinde differentia inter A & B eſt ad differentiam inter C & B, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & D; ſed differentia inter A & B eſt major differentia inter C & B, & ideo differentia inter A & C eſt major differentia inter C & D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A & B eſt ad differentiam inter A & C, ut differentia inter C & B ad differentiam inter C & D; at differentia inter A & B eſt major differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B eſt major differentia inter C & D; atque differentia inter A & B æqualis eſt differentiis, inter A & C, inter C & B; cumque earum utravis ſit major differentia inter

ter C & D, manifeſtum eſt differentiam inter A & B majorem eſſe duplo differentiæ inter C & D, hoc eſt differentiam inter triangulum A B P & trapezium A B F P majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium A B I P, & polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

SCHOLIUM.

Eodem prorſus modo demonſtratur differentiam inter trapezium A B I P & polygonum A B D L P majorem eſſe duplo differentiæ inter polygonum A B E I O P & polygonum A B C G K N P. denique eodem modo demonſtrari poteſt hic differentiarum exceſſus in ſubdupla noſtra polygonorum complicatorum deſcriptione in infinitum; differentia enim priorum nempe inſcripti & circumſcripti major ſemper erit duplo differentiæ immediatè ſequentium nimirum inſcripti quoque & circumſcripti, & proinde aufertur majus quam dimidium a priorum differentia ut fiat differentia immediatè ſequentium; & igitur continuando ſubduplam polygonorum deſcriptionem, inveniri poſſunt duo polygona complicata, quorum differentia ſit minor qualibet exhibita quantitate, ut in præcedentis Scholio aſſumpſimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ a minor b major, ſintque datæ duæ rationes majoris inæqualitatis c ad d, & c ad e; deinde ſit ut c ad d ita $b-a$ ad $\frac{bd-ad}{c}$ cui addatur quantitas a ut fiat $\frac{ca+bd-ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediate ſub a: fiatque ut c ad e ita $b-a$ ad $\frac{be-ae}{c}$, quæ quantitas ſubſtrahatur ex b & relictum nempe $\frac{bc-be+ae}{c}$ ponatur ſub b. continuetur deinde ſeries convergens cujus primi termini convergentes ſunt a, b, & ſecundi termini convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. manifeſtum eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ majorem

$$\begin{array}{cccc} c & \begin{matrix} d \\ e \end{matrix} & \begin{matrix} a \\ \frac{ca+bd-ad}{c} \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ \frac{bc-be+ae}{c} \end{matrix} \end{array}$$

eſſe

esse termino a, quoniam termino a additur $\frac{bd-ad}{c}$ ut fiat terminus $\frac{ca+bd-ad}{c}$: manifestum quoque est terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ minorem esse termino b, quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter a & $\frac{ca+bd-ad}{c}$ in ratione majoris inæqualitatis: evidens quoque est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ minorem esse termino b. quoniam ex b substrahitur $\frac{be-ae}{c}$ ut fiat $\frac{bc-be+ae}{c}$; manifestum etiam est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ majorem esse termino a, quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter $\frac{bc-be+ae}{c}$ & b in ratione majoris inæqualitatis: evidens igitur est differentiam inter terminos convergentes a & b majorem esse differentiâ inter terminos convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$. sed quoniam termini convergentes a & b ponuntur indefiniti, possunt a & b sumi loco quorumlibet terminorum convergentium totius hujus seriei; & positis a & b pro terminis hujus seriei convergentibus quibuscunque, sequitur necessario ex seriei compositione $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$ esse terminos convergentes immediatè sequentes: cumque differentia terminorum a & b major sit differentia terminorum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, evidens est differentiam terminorum convergentium priorum semper esse majorem differentia terminorum convergentium immediatè sequentium; & igitur quò magis continuatur hæc series convergens eò minor fit differentia terminorum convergentium: & quoniam hæc differentiarum diminutio semper fit proportionaliter nempe in ratione $b-a$ ad $\frac{bc-be+ae-ca-bd+ad}{c}$; igitur possunt inveniri hujus seriei termini convergentes quorum differentia sit omni exhibita quantitate minor; & igitur imaginando hanc seriem in infinitum continuari, possumus imaginari ultimos terminos convergentes esse æquales,

quos

quos terminos æquales appellamus ſeriei terminationem.

PROP. VII. PROBLEMA.

Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.

Ut huic problemati ſatisfiat, oportet primò invenire quantitatem quæ eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo ex terminis convergentibus $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$, hoc autem facile fit hoc modo: inveniatur quantitas quæ multiplicata in a & addita b multiplicata in quantitatem datam m, eandem quantitatem facit ac ſi multiplicaretur in $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & adderetur $\frac{bc - be + ae}{c}$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam m. ſit quantitas illa z, & proinde $za + bm$ æquatur $\frac{zca + zbd - zad + mbc - mbe + mae}{c}$, & æquatione reducta invenitur $z = \frac{mae - mbe}{ad - bd}$; quæ quantitas ſive multiplicata in a & addita m, ſive multiplicata in $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & addita $\frac{mbc - mbe + mae}{c}$ efficit eandem in utroque caſu quantitatem nempe $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{cd - bd}$: & proinde prædicta quantitas eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo componitur ex terminis convergentibus $\frac{ca + bd - ad}{c}$, $\frac{bc - be + ae}{c}$. atque a & b quoniam ſunt quantitates indefinitæ poſſunt eſſe quilibet totius ſeriei termini convergentes, modò termini convergentes immediatè ſequentes ſint $\frac{ca + bd - ad}{c}$ & $\frac{bc - be + ae}{c}$, & proinde quantitas $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{cd - bd}$ eodem modo componitur ex quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis convergentibus a, b; & igitur prædicta

dicta quantitas eodem etiam modo componitur ex ultimis ejus terminis convergentibus, qui æquales sunt: sit ultimus ille terminus x qui multiplicatus in $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ & in m efficit xm & $\frac{xmae - xmbe}{ad - bd}$, quorum factorum summa nempe $\frac{xmae - xmbe + xmad - xmbd}{ad - bd}$ æquatur $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{ad - bd}$ & æquatione reducta invenitur x seu seriei terminatio $\frac{aae - bae + bad - bbd}{ae - be + ad - bd}$, quam invenire oportuit.

Ne minus exercitatis obscurum videatur hoc problema, illud in numeris illustrabimus: sit c 7, d 2, e 3, a 28, b 42, erunt secundi termini convergentes 32, 36, tertii $33\frac{1}{7}$, $34\frac{2}{7}$, & ejus terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moveat, quod (etiamsi a sit minor quam b) $\frac{ca + bd - ad}{c}$ possit esse major quam $\frac{bc - be + ae}{c}$, analyticè enim major à minore potest subtrahi, cujus tamen exemplum non gravabimus exhibere, sit c 7, d 5, e 4, a 28, b 42; erunt secundi termini convergentes 38, 34, & tertii $35\frac{1}{7}$, $36\frac{2}{7}$, ejusque terminatio $35\frac{7}{9}$.

Animadvertendum est hujus problematis solutionem eodem modo se habere, etiamsi loco a ponatur cyphra seu merum nihil, Ex. Gr; sit c 8, d 3, e 4, a 0, b 24; erunt secundi termini convergentes 9, 12, & tertii $10\frac{1}{8}$, $10\frac{1}{2}$, & seriei terminatio $10\frac{2}{7}$,

Harum etiam serierum terminationes possunt inveniri ex Gregorii à S. Vincentio lib. de progress. geometrica, etiamsi methodo longe ab hac diversa.

PROP.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Sint duæ quantitates datæ A, B, *& ratio quælibet data* C *ad* D: *oportet invenire aliam quantitatem, ut ratio ejus ad* A *ſit multiplicata rationis* B *ad* A *in ratione* C *ad* D.

EDC AFBG

Sit primò ratio C ad D commenſurabilis, ſitque inter C & D communis menſura E; & quoties E continetur in D toties ſit ratio F ad A ſubmultiplicata rationis B ad A; & quoties E continetur in C toties ſit ratio G ad A multiplicata rationis F ad A: dico G eſſe quantitatem illam quæſitam. ratio G ad A eſt multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ratio F ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D; & igitur ex æqualitate, ratio G ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D, quod demonſtrare oportuit.

Quod ſi ratio C ad D ſit incommenſurabilis, geometricam hujus problematis praxim eſſe impoſſibilem mihi perſuadeo; approximatione tamen fieri poteſt, aſſumendo rationem commenſurabilem ejus loco, quæ quàm proximè ad illam accedat.

		G H	A B
	N	I K	C D
M		R S	E F
	O	T V	X Y
		L	Z

Sit ſeries convergens, cujus primi termini convergentes ſint A, B, ſecundi C, D, tertii E, F; ſintque ſecundi termini ita facti à primis, ut ratio B majoris ad A minorem ſit multiplicata rationis C ad A in ratione data mojoris inæqualitatis M ad N, & ut ratio B ad A ſit multiplicata rationis D ad A in ratione data majoris inæqualitatis M ad O: ſintque tertii termini eodem modo facti ex ſecundis quo ſecundi facti ſunt ex primis; atque ita continuetur ſeries.

PROP.

PROP. IX. PROBLEMA.

Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.

Ponatur G cyphra ſeu nihil hoc eſt exponens rationis æqualitatis, ſeu rationis A ad A; ſitque H ad libitum exponens rationis B ad A: ſit ut M ad N ita differentia inter G & H, hoc eſt ipſa H vel exponens rationis B ad A ad exceſſum quo I ſuperat G hoc eſt ipſam I, ſed ut M ad N ita ratio B ad A eſt multiplicata rationis C ad A; & igitur Exceſſus quo I ſuperat G hoc eſt ipſa I eſt exponens rationis C ad A. ſit ut M ad O ita differentia inter G & H hoc eſt H ad exceſſum quo K ſuperat G hoc eſt ipſam K, ſed ut M ad O ita ratio B ad A eſt multiplicata rationis D ad A, cumque H ſit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: ſi igitur I ſit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit exceſſus quo K ſuperat I exponens rationis D ad C. deinde ſit ut M ad N ita exceſſus quo K ſuperat I ſeu exponens rationis D ad C ad exceſſum quo R ſuperat I, ſed ut M ad N ita ex ſeriei compoſitione ratio D ad C eſt multiplicata rationis E ad C, atque exceſſus quo K ſuperat I eſt exponens rationis D ad C; & proinde exceſſus quo R ſuperat I eſt exponens rationis E ad C, atque I eſt exponens rationis C ad A, & proinde R eſt exponens rationis E ad A. deinde ſit ut M ad O ita exceſſus quo K ſuperat I ad exceſſum quo S ſuperat I, ſed ut M ad O ita ex ſeriei compoſitione ratio D ad C eſt multiplicata rationis F ad C, cumque exceſſus quo K ſuperat I ſit exponens rationis D ad C; erit exceſſus quo S ſuperat I exponens rationis F ad C, atque I eſt exponens rationis C ad A, & proinde S eſt exponens rationis F ad A: cum igitur R ſit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit exceſſus quo S ſuperat R exponens rationis F ad E: & utramque ſeriem continuando, demonſtratur ut antè T eſſe exponentem rationis X ad A, & V eſſe expo-

exponentem rationis Y ad A; denique ſemper demonſtrabitur terminos convergentes ſeriei exponentium eſſe exponentes rationum, terminorum convergentium ſeriei propoſitæ ad primam ſeriei quantitatem A, modò utriuſque ſeriei termini convergentes ſint in eodem ab initio ordine: & proinde terminatio ſeriei exponentium per hujus 7 inventa, quæ Ex: Gr: ſit L, erit exponens rationis, terminationis ſeriei propoſitæ ad primum terminum A: inveniatur igitur ratio Z ad A quæ ſit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæſita, quam invenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illuſtrandum ſit M 4, N 2, O 1, A 6, B 10; erunt ſecundi termini convergentes √q60, √qq2160, tertii termini convergentes √qqq7776000, √qqq10077696000000. & ſeriei terminatio √c360.

Aliud exemplum, ſit M 6, N 2, O 3, A 5, B 10; erunt ſecundi termini convergentes √c250, √q50, tertii termini convergentes √qcc488281250000000, √qqc78125000000, & ſeriei terminatio √ſ12500. hactenus terminavimus omnes ſeries convergentes quæ fieri poſſunt vel à ſola proportione arithmetica vel a ſola proportione geometrica, nunc vero methodum aggredimur, cujus ope omnium ſerierum convergentium terminationes (ſi modò ſint in rerum natura) inveniri poſſunt.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate, eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediatè ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint a, b, & termini convergentes immediatè

ſequentes $\sqrt{q\,ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{q\,ab}}$ ſumma terminorum convergentium $a + b$ multiplicata in terminum convergentem primum a efficit $aa + ab$: & ſumma terminorum convergentium immediate ſequentium nempe $\sqrt{q\,ab} + \frac{aa}{\sqrt{q\,ab}}$ multiplicata in primum terminum convergentem $\sqrt{q\,ab}$ efficit etiam $aa + ab$; ex his invenienda ſit ſeriei propoſitæ terminatio. manifeſtum eſt quantitatem $aa + ab$ eodem modo fieri à terminis convergentibus a, b, quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\sqrt{q\,ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{q\,ab}}$: & quoniam quantitates a, b, indefinitæ ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt ſummam quorumcunque terminorum convergentium propoſitæ ſeriei multiplicatam in primum terminum convergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à ſumma terminorum convergentium immediatè ſequentium multiplicata etiam in primum ſuum terminum convergentem; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequuntur, manifeſtum eſt ſummam duorum quorumlibet terminorum convergentium multiplicatam in primum ſemper efficere eandem quantitatem nempe $aa + ab$, atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus ſeu ſeriei terminatio z, quæ ſibi addita & in ſummam multiplicata efficit $2zz$, quæ quantitas debet eſſe æqualis quantitati $aa + ab$, & æquatione reſoluta dabitur z ſeu ſeriei terminatio $\sqrt{q\,\frac{aa + ab}{2}}$ quam invenire oportuit.

Et proinde ad inveniendam cujuscunque ſeriei convergentis terminationem; opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in problemate ſive termini convergentes a, b, ſint primi, ſecundi, vel tertii &c; manifeſtum eſt omnes

omnes ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis quo ex terminis convergentibus ſecundis, tertiis, vel quartis, &c.

PROP. XI. THEOREMA.

Dico ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ABIP *non eſſe compoſitum analyticè à triangulo* ABP *&* *trapezio* ABFP. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ponatur triangulum ABP [a] & trapezium ABFP [b]: manifeſtum eſt ex prædictis trapezium ABIP eſſe $Vq\,ab$ & polygonum ABDLP $\frac{2ab}{a + Vq\,ab}$, item ſectorem ABIP eſſe hujus ſeriei convergentis terminationem. ut ex ſeriei terminis auferantur ſigna radicis & fractionis, pro [a] & [b] primis ſeriei terminis convergentibus, hoc eſt pro triangulo ABP & trapezio ABFP ponantur $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$; eruntque ſecundi ſeriei termini convergentes, hoc eſt trapezium ABIP & polygonum ABDLP, $ba^2 + b^2a$ & $2b^2a$, dico ſeriei convergentis (cujus primi termini convergentes ſunt $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b_3$ & ſecundi ſunt $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$) terminationem non eſſe compoſitam analyticè a terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$: ſi enim componatur prædicta terminatio analyticè a terminis convergentibus $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$; componetur etiam eadem terminatio analyticè & eodem omnino modo à terminis convergentibus $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; & proinde eadem quantitas, nempe prædicta terminatio, eodem modo componitur analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$,

ſed nulla quantitas poteſt eodem modo analyticè componi ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, quod ſic demonſtro.

$a^3 + a^2b$	$ab^2 + b^3$.
$ba^2 + b^2a$	$2b^2a$

ſi analyticè componeretur quantitas ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$,

 eo-

eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, ſubtrahendo, multiplicando & dividendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur & dividerentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b_2a$, & radices eædem ex factis extraherentur, ſed poſterius fieri non poteſt, ergo nec prius; minorem ſic probo, ſi eadem fieret quantitas ex additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quantitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis ſive ipſorum factis æquales quantitates ſubducendo, vel illos ſive ipſorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel dividendo, vel denique illos ſive ipſorum factos eodem modo in ſe multiplicando, vel ex iiſdem eaſdem radices extrahendo, hasce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo, fieri poſſent duo ultima producta, nempe unum à termino $ab^2 + b_3$ & alterum à termino $2b^2a$; ita ut ultimum productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum ultimo producto ex termino $ab^2 + b_3$ additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto radice aliqua extracta (haſce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem quam efficit ultimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum ultimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto eadem etiam radice extracta, haſce analyticas operationes eodem omnino modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo; ſed poſterius eſt abſurdum ergò & prius: ſequela majoris patet ex octava definitione hujus, minorem ſic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur poteſtas ipſius a nempe a^3, quæ eſt altior ulla poteſtate ejuſdem a in termino $ba^2 + b^2a$; & proinde terminos $a^3 + a^2b$, $ba_2 + b^2a$, cum æqua-

æqualibus quantitatibus addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, &c: ſicut ſuperius dictum eſt, ſemper manet poteſtas ipſius a in ultimo producto ex termino $a^3 + a^2 b$ altior poteſtate ulla ipſius a in ultimo producto termini $ba^2 + b^2 a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, ſubſtrahendo, &c, ſemper manent in factis eædem poteſtates, & illos in ſe eodem modo multiplicando ſemper magis elevatur altior poteſtas in termino $a^3 + a^2 b$ quam elevatur depreſſior poteſtas in termino $ba^2 + b^2 a$, & ex illis eaſdem radices extrahendo, ubi a fuerat elevatior in poteſtate erit etiam elevatior in radice: & quoniam eadem reperitur altiſſima poteſtas ipſius a in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2 a$, demonſtratur ut antè altiſſimam poteſtatem ipſius a in ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem eſſe cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto ex termino $2b^2 a$: in ultimo igitur producto termini $a^3 + a^2 b$ reperitur altior poteſtas ipſius a quam in ultimo producto termini $ba^2 + b^2 a$, & in ultimo producto termini $ab^2 + b^3$ altiſſima poteſtas ipſius a eadem eſt cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto termini $2b^2 a$; & igitur ultima producta ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter ſe addita, ſubducta, multiplicata, diviſa, &c. ſemper efficient quantitatem, in qua reperitur altior poteſtas ipſius a quam ulla quæ reperiri poteſt in quantitate facta ex eadem prorſus additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, &c, productorum à terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam altior poteſtas cum altera poteſtate ſemper altiorem facit poteſtatem quam depreſſior poteſtas cum eadem altera poteſtate; & igitur iſtæ duæ quantitates non poſſunt eſſe indefinitè æquales, cum reperiatur altior poteſtas ipſius a in una quam in altera: atque hinc evidens eſt quod ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ A B I P non poſſit componi analyticè à triangulo A B P & trapezio A B F P, quod demonſtrandum erat.

Ut autem evidentius fiat propoſitum, aliam demonſtrationem breviorem faciliorem & ex alio medio petitam hic ſubjun-

jungo: quantitas non poteſt componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam addendo, ſubſtrahendo, multiplicando, dividendo duo binomia $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex ultimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in ultimo producto, quam ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur, dividerentur, binomium $ba^2 + b^2 a$ & ſimplex quantitas $2b^2 a$, & eædem quoque radices ex facto extraherentur; & ſi plura ſint nomina in uno producto quam in altero, impoſſibile eſt ut ſint indefinitè æqualia, quod eſt propoſitum, reliqua enim ex priore demonſtratione haberi poſſunt.

SCHOLIUM.

Obſcurum fortaſſis videbitur hoc theorema ob multas inuſitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa ſuppoſita lemmata, quæ demonſtrare pigebat, quoniam cuivis analyſtæ vel prima lectione ſunt obvia, ex natura enim operationum analyticarum omnino dependent.

Locus hic requirit ut aliquid dicam de proportione inter triangulum A B P & ſectorem A B I P; quod ut fiat, advertendum eſt veriſſimum philoſophorum axioma, nempe omnem noſtram cognitionem à ſenſu ortum habere: inter proportiones enim, ſola commenſurabilis ſenſu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommenſurabilis enim à mathematicis ſolummodo adhuc contemplatur, quatenus commenſurabilis cujuſdam rationis eſt ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. vel ex talium additione, ſubductione, &c. genita: hoc eſt, quantitas quæ quantitati propoſitæ eſt incommenſurabilis ex eo ſolummodo ab humana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum cognitarum & propoſitæ quantitati commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi poſſit: at ex hactenus demonſtratis manifeſtum eſt ſectorem A B I P non poſſe componi ex additione, ſubductione, multiplicatione,

tione, divisione, & radicum extractione trianguli A B P & trapezii A B F P: triangulum autem A B P & trapezium A B F P supponimus esse quantitates inter se analyticas; & proinde sector A B I P illis analytica esse non potest, hoc est ex quantitatum ipsis A B P, A B F P analyticarum additione, subductione, multiplicatione, divisione & radicum extractione componi non potest; & proinde ex hoc capite nulla potest exhiberi ratio inter triangulum A B P & sectorem A B I P, cum evidens sit illam non esse analyticam. sed dicet fortè aliquis rationem inter triangulum A B P & sectorem A B I P omnifariam variari posse; & proinde posse esse inter se in ratione qualibet data sive analytica sive etiam commensurabili: respondeo hoc esse verissimum, sed in hoc casu ratio inter triangulum A B P & trapezium A B F P non erit analytica; & proinde ex dato circulo ellipse vel hyperbola nunquam dabitur in analyticis triangulum A B P, quod ex prædictis clarissimè patet. etiamsi ex prædicto capite non possimus comprehendere rationem inter triangulum A B P & sectorem ABIP, possumus tamen ejus aliquam habere cognitionem, ex eo quod sector A B I P sit terminatio seriei convergentis datæ; & ex hac consideratione possibile est invenire quantitatem datæ commensurabilem cujus differentia à sectore A B I P minor fuerit quacunque quantitate proposita, ad hoc enim semper recurrendum est, cum de quantitatibus quibuscunque incommensurabilibus tractant practici, & in hac nostra approximatione praxis non erit operosior quam in multis aliis etiam quantitatum analyticarum approximationibus, immo multo brevior, facilior & paratior erit illis Vietæ sectionibus angularibus, quæ tamen summæ matheseos utilitati in praxem reducuntur. non video ergo quare circuli quadratura diutius æstimetur ignorari: cum enim demonstratum sit rationem circuli ad diametri quadratum non esse analyticam, vanum certè erit & ineptum illam sicut talem imposterum quærere: at rejectis quantitatibus analyticis, vix credo ullam posse esse notiorem hisce nostrarum serierum convergentium terminationibus, sicut ex sequentibus plenissimè apparebit.

PROP.

PROP. XII. THEOREMA.

TAB.XLIII. Fig. 1. 2. 3. Sit trapezium ABIP, A; polygonum ABEIOP, C; polygonum ABCG KNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D eſſe medium harmonicum inter C & B. ex hujus 4, A: C: : C: B, & componendo A † C: C: : C † B: B, ſed ex hujus 5, A † C: C: : 2 C: D; & ideo C † B: B: : 2 C: D, & permutando B † C: 2 C: : B: D, & dividendo, differentia inter B & C eſt ad 2 C, ut differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C eſt ad differentiam inter B & D ut 2 C ad D, hoc eſt, ut C † B ad B, & dividendo, differentia inter D & C eſt ad differentiam inter B & D ut C ad B; & proinde D eſt medium harmonicum inter C & B, quod demonſtrare oportuit.

A C D B

Hæc propoſitio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, ut patet ex ſcholio 5 hujus.

PROP. XIII. THEOREMA.

Inter duas quantitates A, B, ſit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, eſſe continuè proportionales. quoniam A, E, B, ſunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B ut A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiam inter E & B, ut A † B ad B; deinde permutando & componendo 2 A: A † B: : E: B, ſed 2 A eſt duplum ipſius A & A † B duplum ipſius C; & ideo A: C: : E: B; & proinde CE = AB, & AB = DD, ideoque CE = DD; & igitur C: D: : D: E, quod demonſtrare oportuit.

A B
C D E

PROP. XIV. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipseos sectorem & B extra: continuetur series convergens horum polygonorum complicatorum secundum nostram methodum subduplam descriptorum, ita ut polygona intra circulum sint A, C, E, &c, & extra circulum B, D, F, &c; dico A + E minorem esse quam 2 C: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ; prima quoniam A, C, B, sunt continue proportionales; & secunda quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales: & proinde excessus C supra A, hoc est C − A, est ad excessum D supra C seu D − C in ratione composita ex proportione A ad C & ex proportione A + C ad A, hoc est in ratione A + C ad C; at A + C est major quam C, & ideo excessus C supra A est major quam excessus D supra C; est autem D major quam E, & proinde excessus C supra A multò major est quam excessus E supra C; est igitur A + E minor quam 2 C; quod demonstrare oportuit.

A	B
C	D
E	F

C − A : B − C :: A : C

B − C : D − C :: A + C : A

PROP. XV. THEOREMA.

Iisdem positis: dico excessum C supra A minorem esse quadruplo excessus E supra C. ex prædictis manifestæ sunt sequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, sunt continuè proportionales; secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, sunt continuè proportionales; & ideo excessus C supra A (hoc est) C − A est ad excessum E supra C seu E − C, ut AC + EC + AE + CC ad CC; at B ma-

C − A : B − C :: A : C

B − C : D − C :: A + C : A

D − C : E − C :: E + C : C

jor eſt quam E, & ideo A B ſeu C C major eſt quam A E, & igitur A E † C C minor eſt quam 2 CC: atque A C † E C eſt ad 2 CC ut A † E ad 2 C, ſed A † E minor eſt quam 2 C; & ideo A C † E C minor eſt quam 2 CC; proinde A C † E C † A E † CC minor eſt quam 4 CC; & igitur C – A minor eſt quadruplo ipſius E – C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XVI. THEOREMA.

Sint duo Polygona complicata A, B; nempe A extra hyperbolæ ſectorem & B intra: Continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolem ſint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A † E majorem eſſe quam 2 C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; &

A	B
C	D
E	F

proinde exceſſus A ſupra C, hoc eſt A – C, eſt ad exceſſum C ſupra D ſeu C – D; In ratione

A – C: C – B: : A: C
C – B: C – D: : A † C: A

compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A hoc eſt in ratione A † C ad C, at A † C eſt major quam C & ideo exceſſus A ſupra C eſt major exceſſu C ſupra D, eſt autem E major quam D; & proinde exceſſus A ſupra C multo major eſt exceſſu C ſupra E; manifeſtum eſt igitur A † E majorem eſſe quam 2 C, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

PROP. XVII. THEOREMA.

IIsdem poſitis: dico exceſſum A ſupra C majorem eſſe quadruplo exceſſus C ſupra E. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ; prima, quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus A ſupra C, hoc eſt A ⊣ C, eſt ad exceſſum C ſupra E, hoc eſt C ⊣ E in ratione compoſita ex proportionibus A ad C, A † C ad A & E † C ad C; & ideo A ⊣ C eſt ad C ⊣ E, ut A C † E C † A E † CC ad CC; at B minor eſt quam E,

A ⊣ C : C ⊣ B : : A : C
C ⊣ B : C ⊣ D : : A † : CA
C ⊣ D : C ⊣ E : : E † C : C

& ideo A B, ſeu CC minor eſt quam A E; & igitur A E † CC major eſt quam 2 CC. atque A C † E C eſt ad 2 CC ut A † E ad 2 C; ſed A † E major eſt quam duo C, & ideo A C † E C major eſt quam 2 CC; & proinde A C † E C † A E † C C major eſt quam 4 CC; & igitur A ⊣ C major eſt quadruplo ipſius C ⊣ E, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XVIII. THEOREMA.

SInt duæ quantitates inæquales; A minor, B major, C media geometrica, D media arithmetica. dico D majorem eſſe quam C, quoniam B, C, A, ſunt continuè proportionales; erit dividendo, permutando, & componendo; ut exceſſus B ſupra A ad exceſſum C ſupra A, ita A † C ad A, atque A † C major eſt duplo ipſius A; & proinde exceſſus B ſupra A major eſt duplo exceſſus C ſupra; ſed exceſſus B ſupra A duplus eſt exceſſus D ſupra A, & ideo exceſſus D ſupra A major eſt exceſſu C

E
A C B
D

ſupra A; eſt igitur D major quam C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XIX. THEOREMA.

Iisdem poſitis; ſit inter A & B media harmonica E. dico C majorem eſſe quam E. ex hujus 13, D eſt ad C ut C ad E, ſed D major eſt quam C; & ideo C major eſt quam E, quod demonſtrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Ex duabus præcedentibus manifeſtum eſt D majorem eſſe quam E, hoc eſt mediam arithmeticam inter duas quantitates inæquales majorem eſſe media harmonica inter eaſdem.

PROP. XX. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem, B extra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum;

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; ſitque ſeriei convergentis terminatio ſeu circuli vel ellipſeos ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C una cum triente exceſſus C ſupra A. ſit exceſſus G ſupra C quarta pars exceſſus C ſupra A, & exceſſus H ſupra G quarta pars exceſſus G ſupra C; continueturque hæc ſeries in infinitum, ut ejus terminatio ſit X. Exceſſus C ſupra A minor eſt quadruplo exceſſus E ſupra C; & ideo exceſſus E ſupra C major eſt exceſſu G ſupra C, eſt ergo E major quam G. deinde exceſſus E ſupra C minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, & ideo exceſſus G ſupra C multo minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, eſt igitur exceſ-

ceſſus K ſupra E major exceſſu H ſupra G; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E; A, C, G, continuatione, terminum quemcunque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempe X, at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C una cum triente exceſſus C ſupra A, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXI. THEOREMA.

Iisdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B ſit media Arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H; item

A B		A B
C D		G H
E F		M N
K L		O P
Z		X

inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſed media Arithmetica N; continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C, atque H media Arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G, B; media autem harmonica inter G & B major eſt quam D media harmonica inter C & B, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B, hoc eſt H, major eſt quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H: & quoniam G eſt major quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. deinde N media arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem, & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N

eadem F major eſt. eadem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei. A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempe X; atque ex hujus 7, terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X æqualis eſt majori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrandum erat.

PROP. XXII. THEOREMA.

Iisdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B ſit media geometrica H; Item inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continuetúrque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, &c., in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, item H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media Geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter G & D. deinde N media Geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H major quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; & ideo N media Geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempè X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X, æqualis eſt majori duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

A B	A B
C D	G H
E F	M N
K L	O P
Z	X

SCHO-

SCHOLIUM.

NOn opus eſt ut hic demonſtrem majorem duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates majorem eſſe quam major duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter eaſdem, & igitur hujus propoſitionis approximationem præcedentis eſſe exactiorem, quod etſi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius utimur.

PROP. XXIII. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempè A extra hyperbolæ ſectorem, B intra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolam ſint A, C, E, K, &c, & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque ſeriei convergentis terminatio ſeu hyperbolæ ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C dempto triente exceſſus A ſupra C. ſit exceſſus C ſupra G quarta pars exceſſus A ſupra C, & exceſſus G ſupra H quarta pars exceſſus C ſupra G, continueturque hæc ſeries in infinitum ut ejus terminatio ſit X. exceſſus A ſupra C major eſt quadruplo exceſſus C ſupra E, & ideo exceſſus C ſupra E minor eſt exceſſu C ſupra G, eſt ergo E major quam G. Deinde exceſſus C ſupra E major eſt quadruplo exceſſus E ſupra K, & ideo exceſſus C ſupra G multò major eſt quadruplo exceſſu E ſupra K, & igitur exceſſus G ſupra H major eſt exceſſu E ſupra K; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K etiam majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C,

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z, major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempè X; at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C dempto triente exceſſus A ſupra C, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXIV. THEOREMA.

Isdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H, Item inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſit media Arithmetica N: continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C; atque H media arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G & B; media autem harmonica inter G & B; major eſt media harmonica inter C & B, nempe D, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B nempe H major eſt quam D media harmonica inter C & B eodem modo M media Arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H; & quoniam G eſt major quam C & H quam D, media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. Deinde N media Arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F major eſt. eodem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminum ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z, minor erit terminatione ſeriei A B,

GH,

GH, nempe X; atque ex hujus 7 terminatio ſeriei AB, GH, nempe X, æqualis eſt minori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXV. THEOREMA.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

Iisdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H; Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometriea N; continueturque hæc ſeries convergens AB, GH, MN, OP, &c. in infinitum ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, & H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei AB, CD, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei AB, GH; & igitur terminatio ſeriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio ſeriei AB, GH, nempe X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei AB, GH, ſeu X, æqualis eſt minori duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

Ex dictis manifeſtum eſt hanc approximationem exactiorem eſſe illa, in antecedenti propoſitione, demonſtrata, etiamſi hæc ſit paulò laborioſior. ſed non diſſimulandum eſt duas poſſe eſſe ſeries æquales terminationes habentes, ita

ut ſemper quilibet terminus unius ſeriei ſit major quam idem numero terminus alterius ſeriei; ſed in talibus ſeriebus quò longius producuntur, eò minor eſt eorundem numero terminorum differentia: ſed è contra noſtræ ſeries quò longius producuntur, eò magis differunt iidem numero termini, ſicut facillimè demonſtrari poteſt.

Experientia obſervo differentiam inter ſecundam duarum mediarum arithmetice proportionalium & ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium ſemper eſſe multò majorem differentia inter ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium & ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ; quod notatu dignum exiſtimo, hinc enim colligitur ſectorem differre vix ultra unitatem à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum ultra unitatem, quod ſummopere notandum, nam ex hoc evidens eſt approximationem audacter eſſe adhibendam, quando ita continuatur ſeries ut medietas prima notarum ſit eadem in utroque termino convergente, quod experientia etiam evincit; nunquam enim in hoc caſu differt ſector unitate à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium.

Eſt etiam alia approximatio omnium breviſſima & maximè admiranda, etiamſi mihi non contingat illam demonſtratione geometrica munire; nempe ſi primus notarum triens in utroque termino convergente ſit eadem, ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſemper differt infra unitatem à maximo quatuor arithmeticè continuè proportionalium inter terminos noſtræ approximationis.

PROP. XXVI. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Sit hyperbola quæcunque C F N cujus centrum A, aſymptota A B, A O; ſitque ejus ſector A F G L cum triangulo circumſcripto A F L: aſymptotorum uni A B parallelæ ducantur rectæ F D, I M; & compleantur parallelogramma F D M K,

FDMK, PLMD. dico triangulum AFL esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Gregorius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonstrat triangulum AFL esse æquale trapezio DFLM, sed manifestum est trapezium DFLM esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD; & ideo patet propositum.

PROP. XXVII. THEOREMA.

Isdem positis: ducatur AI rectam FL bifariam dividens in I & hyperbolam intersecans in puncto G, fiatque trapezium sectori circumscriptum AFGL, quod dico esse medium geometricum inter parallellogramma FDMK, PLMD. ex demonstratis Gregorii à S. Vincentio evidens est trapezium AFGL æquale esse rectilineo DFGLM. & quoniam AGI recta secat rectam FL bifariam in I, ex ejusdem Gregorii à S. Vincentio Lib. de hyperbola, manifestum est rectas LM, GH, FD, esse continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD, AH, AM. asymptoto AO per punctum G ducatur parallela recta RGS rectis FD, MK, occurrens in punctis R, S. quoniam rectæ FD, GH, LM, sunt continuè proportionales, erit dividendo & permutando FR ad SL ut GH ad LM: & quoniam rectæ MA, HA, DA, sunt continuè proportionales, erit etiam dividendo & permutando MH ad HD hoc est SG ad GR ut HA ad DA, vel ut GH ad LM; & proinde FR est ad SL ut SG ad GR, cumque anguli FRG, GSL, sint æquales ob parallelas FR, SL, erunt triangula FRG, GLS, æqualia; & proinde parallelogrammum RDMS æquale est rectilineo DFGLM seu trapezio AFGL; sed parallelogrammum RDMS est medium geometricum inter paralelogramma PDML, FDMK, quoniam eandem habentia altitudinem eorum bases nempe LM, SM, KM, sunt continuè proportionales; & ideo trapezium AFGL est medium geo-

TAB. XLVIII. fig. 4.

metricum inter parallelogramma PDML, FDMK, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXVIII. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Iisdem poſitis ducantur rectæ FE, LE, hyperbolam tangentes in punctis F, L, ut compleatur trapezium AFEL, quod dico eſſe medium harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK; triangulum AFL, trapezium AFGL, & medium harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK, ſunt continuè proportionalia, quoniam triangulum AFL eſt medium arithmeticum & trapezium AFGL medium geometricum inter eadem parallelogramma, ut patet ex hujus 13; ſed triangulum AFL, trapezium AFGL, & trapezium AFEL ſunt continuè proportionalia ex hujus 1; & proinde trapezium AFEL eſt medium harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Dato circulo æquale invenire quadratum.

Sit quadratum circulo circumſcriptum 4000000000000000; erit ergo eidem inſcriptum 2000000000000000, inter quæ quadrata ſit medium geometricum 2828427124746190 octagonum nempe intra circulum: deinde inter octagonum intra circulum & quadratum extra ſit medium harmonicum, quod levi labore invenitur dividendo duplum quadrati octagoni intra circulum ſeu duplum rectanguli à quadratis intra & extra circulum per ſummam quadrati & octagoni intra; eritque inventum medium harmonicum, octagonum circumſcriptum, nempe 3313708498984760. continuetur hæc ſeries convergens polygonorum complicatorum donec prima medietas notarum ſit eadem in utroque termino

con-

convergente, nimirum usque ad polygona laterum 16384; inscriptum enim est 3141592576586860 & circumscriptum 3141592692091258; non consideratur nota ultima, quoniam in divisionibus & radicum extractionibus semper à vera quantitate paululum aberramus, quod ultimam notam imperfectam plerumque reddit. adhibeatur deinde approximatio in hujus 20 & 21 demonstrata, & invenientur termini intra quos est vera circuli mensura, posito diametri quadrato 4000000000000000, 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792 eodem major, & proinde non latet circuli mensura, quam invenire oportuit. polygonorum seriem hic appono.

	Intra circulum	extra circulum
4	2000000000000000	4000000000000000
8	2828427124746190	3313708498984760
16	3061467458920718	3182597878074527
32	3121445152258051	3151724907429255
64	3136548490545938	3144118385245904
128	3140331156954752	3142223629942456
256	3141277250932772	3141750369168965
512	3141513801144299	3141632080703181
1024	3141572940367090	3141602510256808
2048	3141587725277158	3141595117749588
4096	3141591421543029	3141593269613390
8192	3141592345578073	3141592807595664
16384	3141592576586860	3141592692091258

Circulus intra sequentes terminos consistit:

3141592653589789. 3141592653589792.

eodem omnino modo reperitur rectilineum æquale cuicunque sectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inscripto & trapezio circumscripto.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Ex dato ſinu invenire arcum.

TAB. XLIII. fig. 5. Sit arcus circuli A E deſcriptus ex centro B. hujus arcus datur radius nempe A B & ſinus nempe A D: oportet invenire quam proportionem habet ipſe arcus ad integram circuli circunferentiam. ſit arcus chorda A E & ejus ſemiſſis tangens A C vel C E. ex quadrato radii A B auferatur quadratum ſinus A D & relinquetur quadratum ſinus complementi B D, datur igitur B D; & ideo datur area trianguli rectanguli A B D; datur quoque area trianguli A B E nempe rectangulum ſinus dati A D in ſemiſſem radii B E. deinde fiat ut ſumma triangulorum A B D, A B E, ad triangulum A B E ita duplum trianguli A B E ad trapezium A B E C, ut conſtat ex hujus 5. & ex dato triangulo inſcripto A B E & trapezio circumſcripto A B E C, inveniatur per præcedentem ſector ipſe A B E, qui ad circulum integrum datum quæſitam habet proportionem arcus A E ad totam circumferentiam, quam invenire oportuit.

PROP. XXXI. PROBLEMA.

Ex dato arcu invenire ſinum.

TAB. XLIII. fig. 5. Ex dato arcu manifeſtum eſt dari ſectoris aream; hoc igitur ſectore dato conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet ſinus totus: deinde ſumatur ſectoris dati talis pars aliquota nempe ſector A B E, ut trianguli inſcripti A B E & trapezii circumſcripti A B E C toties multiplicia, quoties ſector datus multiplex eſt ſectoris A B E, concordent in tot notis arithmeticis quot continet radix quadrata ſinus totius; hoc enim facile fieri poteſt ex ſpeculatione tabellæ hujus 29: non enim requiritur in hoc praxis præciſa, nam nihil refert etiamſi in magnis radiis diſcrepantia ſit notarum aliquot. Sectoris cogni-

cogniti A B E, cujus arcus A E etiam innotescit, datur radius B A: sit ejus sinus A D, z; & proinde è dato sinu & radio, dabitur ut in antecedente triangulum sectori inscriptum A B E & eidem trapezium circumscriptum A B E C; atque ipse sector datus, est secunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter triangulum sibi inscriptum & trapezium circumscriptum; & proinde datur æquatio inter duplum trapezii A B E C unà cum triangulo A B E & triplum sectoris cogniti A B E, cujus resolutio manifestat valorem quantitatis ignotæ z, hoc est sinum A D: at dato arcu A E & ejus sinu, dantur etiam ex vulgata sectionum angularium doctrina sinus omnium multiplicium ejusdem arcus A E; & proinde non latet sinus arcus in initio propositi, cum sit ad arcum A E in data ratione multiplici, quem invenire oportuit.

PROP. XXXII. PROBLEMA.

Invenire quadratum æquale spatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno asymptoto & duabus rectis alteri asymptoto parallelis; quod spatium æquale est sectori hyperbolico cujus basis est eadem curva.

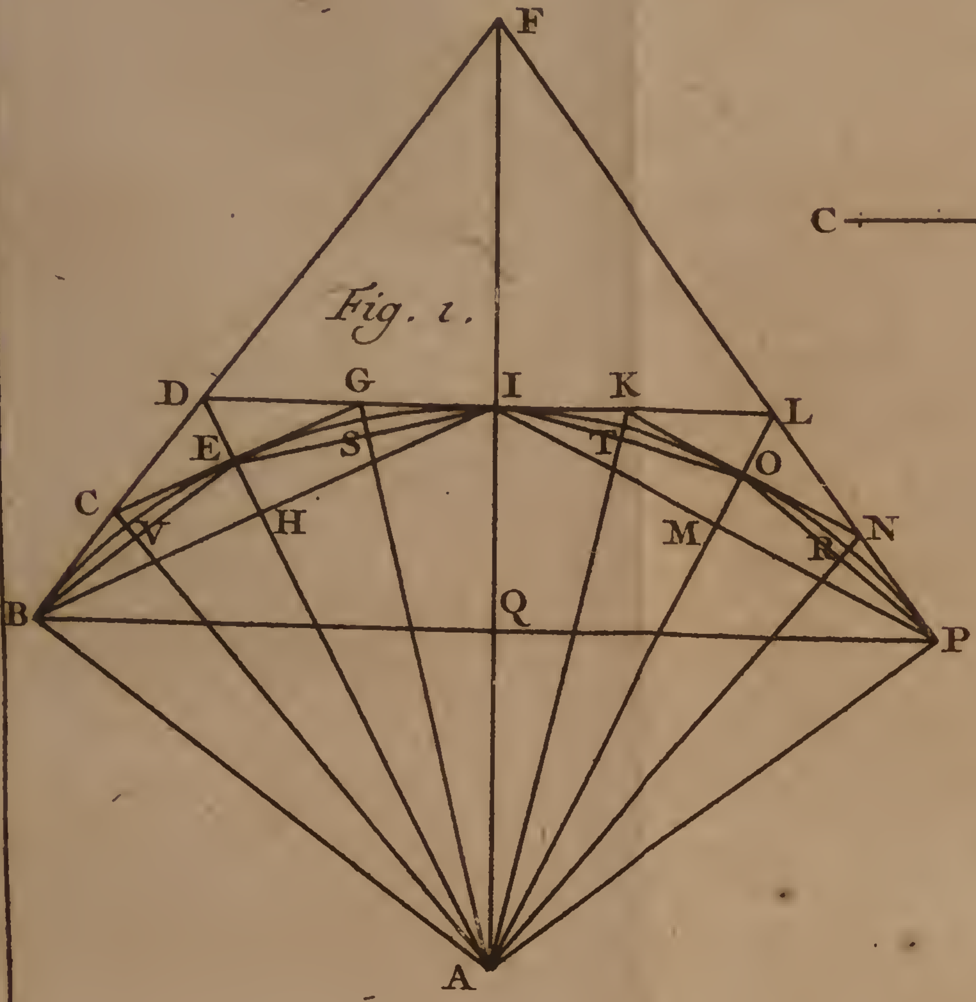
Sit hyperpola D I L, cujus asymptota A O, A K, sibi occurrunt in angulo recto O A K. proponitur hujus hyperbolæ spatium I L M K, contentum à curva hyperbolica I L, asymptoto K M & duabus rectis I K, L M, alteri asymptoto A O parallelis. oportet è datis recti I K 10 0000000000, L M 1000000000000, A M 100000000000, & proinde recta quoque K M 90000000000, invenire mensuram spatii I L M K. Producantur rectæ I K, O L, & ducatur recta I P, ut compleantur rectangula L N K M, Q I K M; manifestum est rectangulum L N K M esse 9000000000000000000000000 & Q I K M 9000000000000000000000000 & tra- TAB. XLIV. fig. 1.

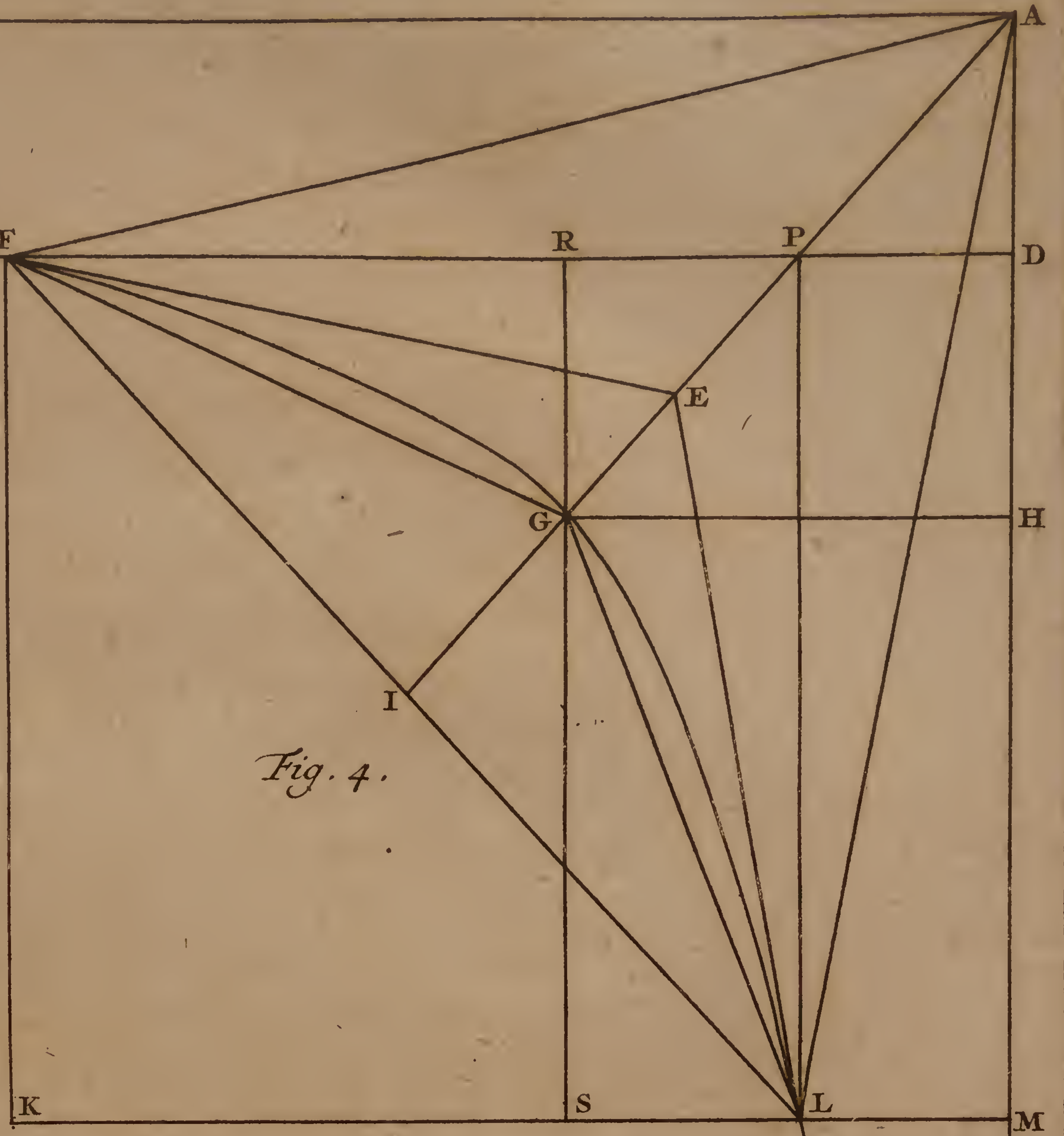
pezium

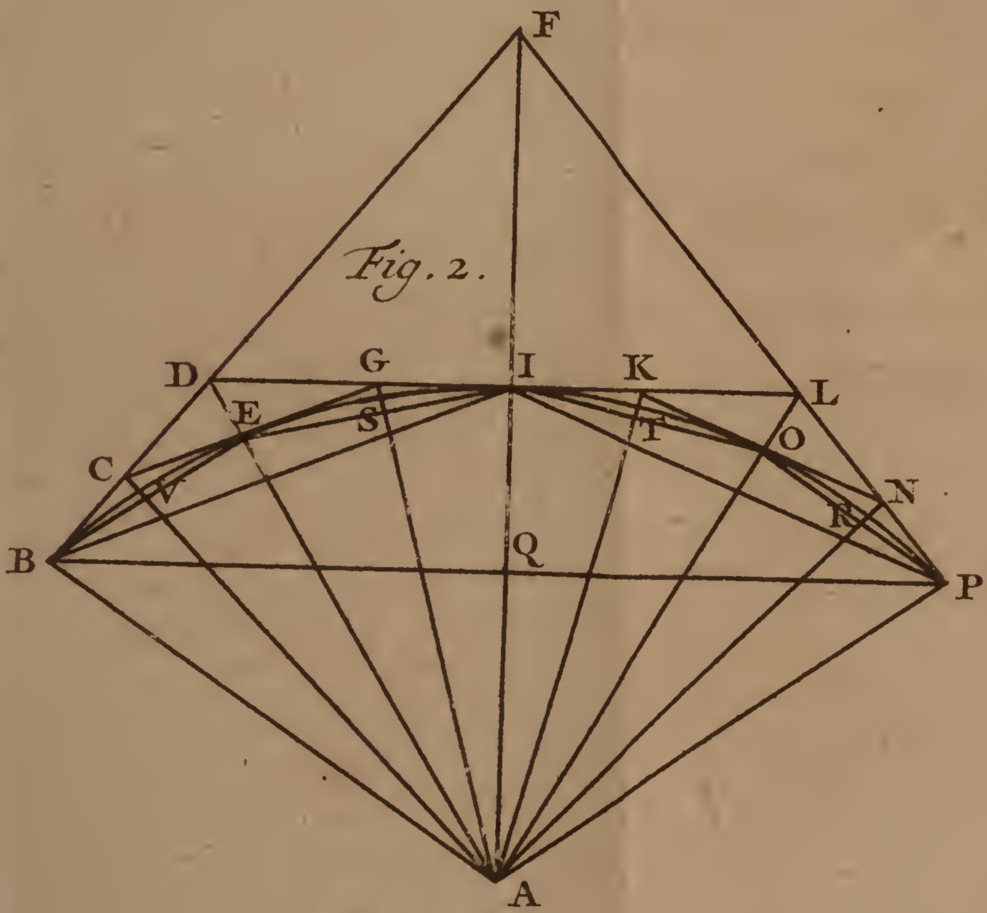
pezium LIKM esse medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc est 49500000000000000000000000. inveniatur inter rectangula LNKM, QIKM, medium geometricum 28460498941515413987990042 quod erit pentagonum spatio hyperbolico LIKM regulariter circumscriptum. Sitque ut trapezium LIKM unà cum dicto pentagono circumscripto ad dictum pentagonum, ita duplum dicti pentagoni ad hexagonum spatio hyperbolico LIKM regulariter inscriptum, nempe 207797541318366281600009835; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos seriei terminos convergentes: inter quæ sit medium geometricum cujus quadrati duplum dividatur per idem medium geometricum unà cum majori termino seu pentagono circumscripto; eruntque medium geometricum & quotus, secundi termini convergentes: atque ita continuetur series hæc convergens polygonorum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem sit in utroque termino convergente, nempe ad terminum vigesimum; polygonum enim circumscriptum est 230258509299589615341-73864, & inscriptum 23025850929931203593181124: adhibeatur deinde approximatio in hujus 23 & 24 demonstrata, & invenientur termini intra quos consistit vera spatii hyperbolici LIKM mensura, nempe 2302585092994045624-0178681, minor spatio, & 2302585092994045624017870 4 eodem major, & ideo non latet spatii mensura, quam invenire oportuit: totam polygonorum seriem hic appono unà cum numero rectarum curvam hyperbolicam subtendentium in unoquoque polygono circumscripto.

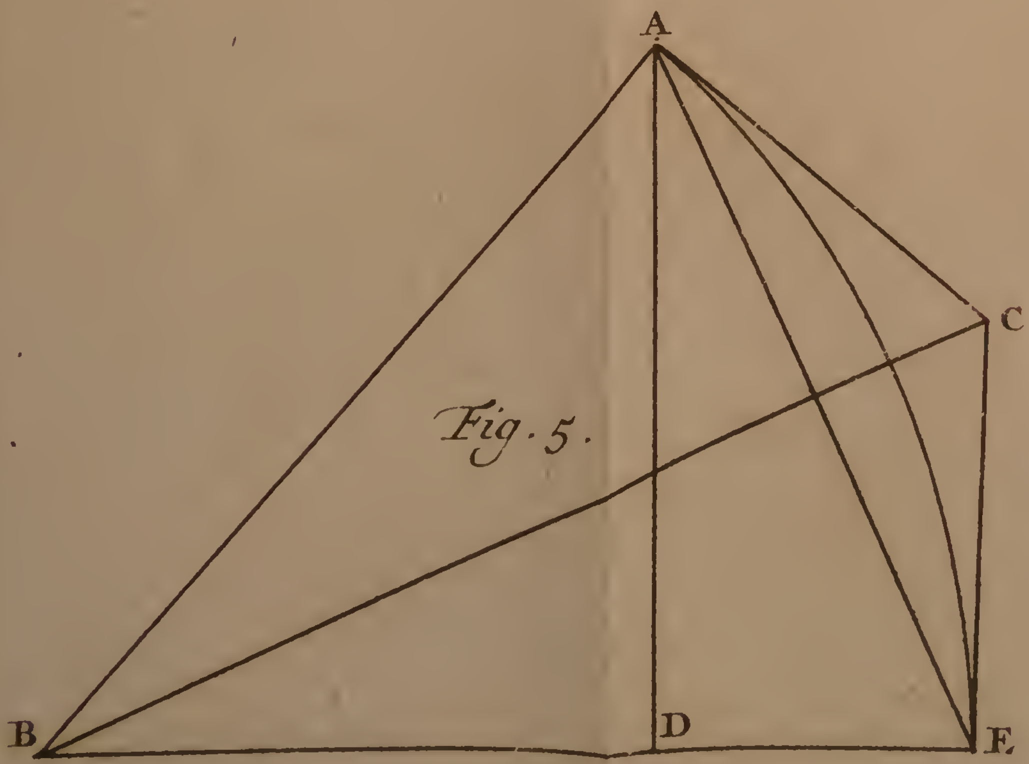
Extra

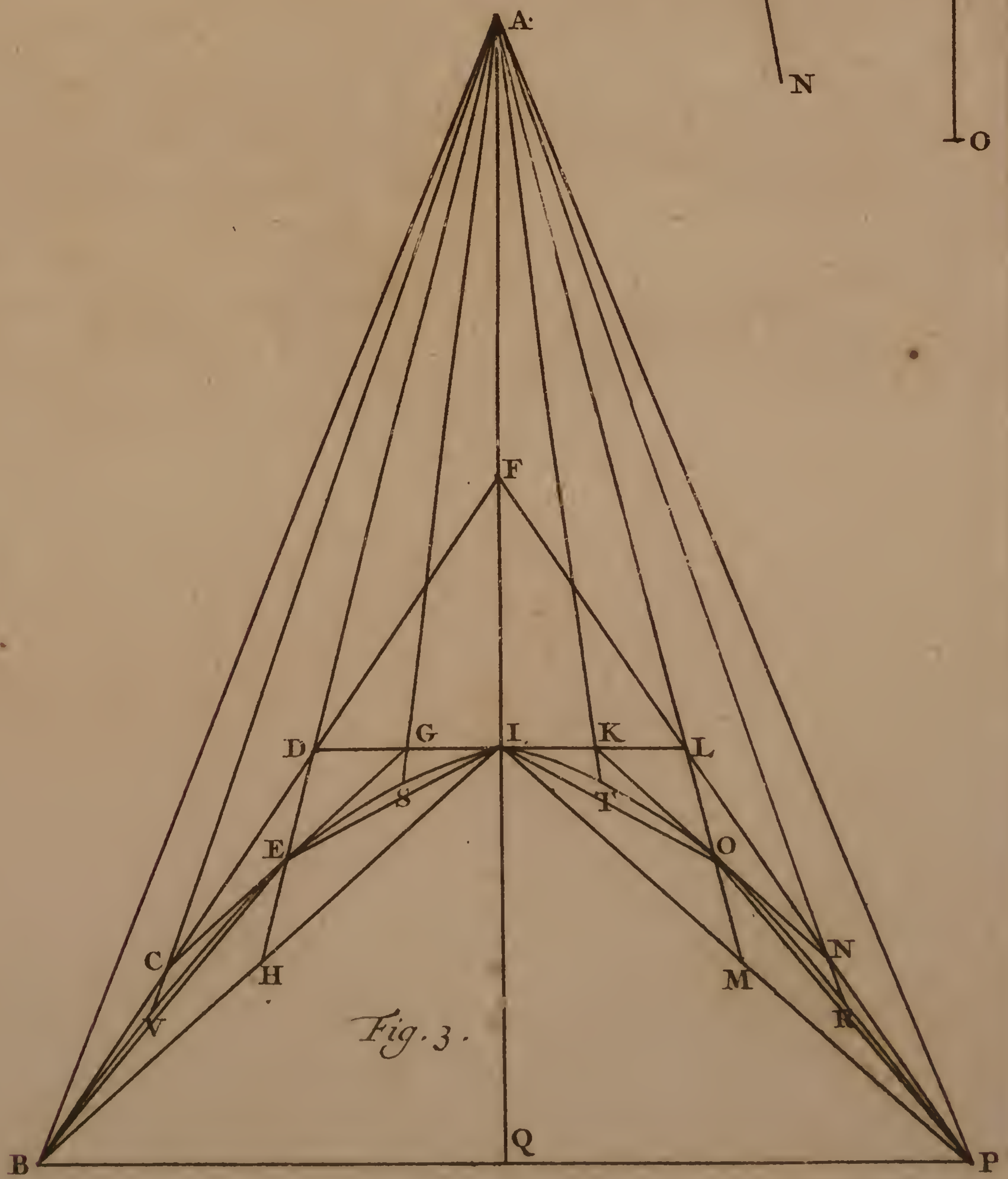
TAB. XLIII.


Fig. 1.
F
D
G
I
K
L
E
S
T
O
C
V
H
M
R
N
B
Q
P
A


B
A
C
F
R
P
D
E
G
H
I
Fig. 4.
K
S
L
M
N
O


F
Fig. 2.
D
G
I
K
L
E
S
T
O
C
V
R
N
B
Q
P
A


A
C
Fig. 5.
B
D
E


A
F
D
G
I
K
L
S
T
E
O
C
H
M
N
V
R
Fig. 3.
B
Q
P

	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	28460498941515413987990042	20779754131836628160009835
4	24318761696971474416609403	22410399968461612921314879
8	23345088913234727934949897	22868197570682058351436953
16	23105412906351426185065096	22986193244865462241217428
32	23045725982658962868047234	23015921117139340153267671
64	23030818728479610745741910	23023367512879647736902891
128	23027092819292183214705676	23025230015404383009313933
256	23026161398510805910921810	23025695697539046352276636
512	23025928546847571901068394	23025812121604634087915779
1024	23025870334152518169052273	23025841227841783762272302
2048	23025855780992551911165543	23025848504414868310197241
4096	23025852142703422669729927	23025850323559001769499206
8192	23025851233131194254554390	23025850778345089029496888
16384	23025851005738140519209367	23025850892041614212944994
32768	23025850948889877295901163	23025850920465745719335070
65536	23025850934677811503232115	23025850927571778609090592
131072	23025850931124795055887228	23025850929348286832351848
262144	23025850930236540944102405	23025850929792413888218560
524288	23025850930014477416159412	23025850929903445652188450
1048576	23025850929958961534173864	23025850929931203593181124

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

23025850929940456240178681	23025850929940456240178704

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cujus numeri multiplices uſque ad decem, diviſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubjicimus; in magnis namque diviſionibus præſtat uti repetita diviſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diviſione, ut conſtat expertis arithmeticis.

Manifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolvi, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad angulum rectum: nos autem ita ſuppoſuimus, ut facilior & paratior eſſet problematis uſus in doctrina logorithmica, quam primò invenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc elevamus.

1	23025850929940456240178700
2	46051701859880912480357400
3	69077552789821368720536100
4	92103403719761824960714800
5	115129254649702281200893500
6	138155105579642737441072200
7	161180956509583193681250900
8	184206807439523649921429600
9	207232658369464106161608300
10	230258509299404562401787000

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

Propoſiti cujuscunque numeri logorithmum invenire.

TAB. XLIV. fig. 1. Eiſdem poſitis quæ in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK unitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK unitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cujus deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data rectâ GH dari KF, & ex præcedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri denarii: eſt enim (ex Gregorio à S. Vincentio) ſpatium GHKI in eadem ratione ad ſpatium LMKI, in qua ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK; ſed ratio GH ad IK eſt multiplicata ratio-

rationis LM ad IK in eadem ratione qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM, quoniam idem eſt conſequens in utraque ratione; & proinde ſpatium GIKH eſt in eadem ratione ad ſpatium LIKM, in qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM; & ideo (quoniam ex hypotheſi ſpatium LIKM eſt logorithmus numeri LM ſeu denarii) erit ſpatium GIKH logorithmus numeri propoſiti GH, quoniam hæc eſt logorithmorum eſſentialis proprietas, ut ſint inter ſe in eadem directa ratione, in qua eorum numeri ſunt unus alterius multiplicati: at ponitur communiter logorithmus numeri denarii ad arbitrium unitas cum numero quodam cyphrarum: ſi igitur fiat, ut ſpatium LIKM ad ſpatium GIKH, ita arbitrarius denarii logorithmus ad alium numerum; erit inventus ille numerus, logorithmus numeri propoſiti GH, quem invenire oportuit.

SCHOLIUM.

PRaxis prædicti problematis prolixa eſt & laborioſa; & proinde, ut abbrevietur labor noſter in compoſitione tabulæ logorithmorum; ſciendum eſt nos ſolummodo laborare in inventione logorithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compoſitorum logorithmi ex primorum additione & ſubductione nullo negotio invenientur. ſed ut numerorum primorum logorithmi facilius inveniantur, ordine progrediendum eſt à prioribus ad poſteriores, nempe à 10 cujus logorithmus eſt arbitrarius ad 2 numerum omnium primum, & à 10 & 2 ad 3, item à 10, 2 & 3 ad 7, item à 10, 2, 3 & 7 ad 11, & ſic deinceps. deinde inveniendi ſunt duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes, quorum unus compoſitus eſt ex numeris logorithmos cognitos habentibus, & ideo logorithmum datum habens, alter autem numerus compoſitus eſt ex ſolo numero primo (cujus quæritur logorithmus) vel ex illo unà cum aliis numeris logorithmos cognitos habentibus. deinde applicentur hi numeri compoſiti

(qui exempli gratia ſint GH, EF) in hyperbola aſymptoto OA paralleli; & inveniatur ſpatium hyperbolicum EGHF per hujus 32, quod breviter, fit quoniam GH, EF, parum inter ſe differunt. ex ſuppoſitione, unius numeri, exempli gratia GH, datur logorithmus, & proinde datur ejus logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quæ eadem eſt (ex hactenus demonſtratis) cum ratione ſpatii hyperbolici GIKH ad ſpatium hyperbolicum LIKM, datur autem ex hujus 32 ſpatium LIKM; & ideo innoteſcit quoque ſpatium IKHG, cumque detur ſpatium EGHF, innoteſcit quoque EIKF; & proinde datur logorithmus numeri compoſiti EF; cumque ex ſuppoſitione dentur logorithmi omnium numerorum numerum EF componentium, excepto numero illo primo cujus logorithmus deſideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quem invenire oportuit. Exempli gratia, propoſitum ſit invenire logorithmum numeri binarii, ſuppoſito arbitrario numeri denarii logorithmo, unitate cum 25 cyphris. duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes ſunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum ſpatii 23025850929940-456240178700 in antecedente inventi, poſito ſcilicet illo ſpatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, eſt enim compoſitus ex ſolo numero primo 2, nempe ejus decies multiplicatus eſt. applicentur hi numeri compoſiti in hyperbola, ut dictum eſt; ſitque GH 1000, EF 1024: ſed quoniam IK unitas eſt 1000000000000, erit GH 1000000000000000 & EF 1024000000000000, & per hujus 32 inveniatur ſpatium EGHF 23716526617 3-160421183067 (ſeriem convergentem hic appono,

ut lecto-

	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	23717082451262844989917	23716248706204586784688 6
4	23716665575069990373755 6	23716457138805441921937 1
8	23716561356708732297040 3	23716509247642595435642 6
16	23716535302161352359943 8	23716522274894818148525 0
32	23716528788527190784838 9	23716525531710557232045 6
64	23716527160118818104101 2	23716526345914659715903 8

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

23716526617316027210322 0	23716526617316045845302 9

Sit inter hos terminos maximus quatuor continuè arithmeticè proportionalium 2371652661731604211830675; qui proinde erit verus hyperbolæ ſector in notarum numero propoſito, quoniam primus triens notarum idem eſt in utroque termino convergente.

ut lectori compendium patefiat) ſeu logorithmus numeri $1\frac{24}{1000}$ poſito logorithmo denarii arbitrario 23025850929940456-240178700; deinde eodem ſuppoſito logorithmo arbitrario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, ſeu triplus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1\frac{24}{1000}$, eritque ſumma logorithmus numeri 1024, cujus pars decima erit logorithmus numeri binarii, pro eodem logorithmo denarii arbitrario, nempe 6931471805599452914171917: fiatque ut logorithmus numerii denarii 2302585092994045624017870O ad logorithmum numeri binarii correſpondentem 69314718055-99452914171917, ita logorithmus numeri denarii arbitrarius propoſitus nempe 10000000000000000000000000 ad logorithmum numeri binarii quæſitum 3010299956639811952-405804, quem invenire oportuit: eodem modo invenitur logorithmus ternarii 4771212547196624373502993, &c.

Ut in promptu habeantur numeri illi compoſiti parum inter ſe differentes pro unoquoque numero primo, hic tabellam exhibeo pro numeris primis uſque ad 100, & unam regulam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro numeris primis ſupra 1000; quæ omnia ita excogitata ſunt, ut verus cujuscunque numeri primi logorithmus inveniri poſſit correſpondens logorithmo arbitrario denarii 100000-00000000000000000000 ex una ſola multiplicatione, duabus diviſionibus & una radicis quadratæ extractione, ultra inconſiderabiles aliquot operatiunculas.

2	1000 $(^{3})$ 10 1024 $(^{10})$ 2
3	32805 factus ex 5 & 6561 $(^{8})$ 3 32768 $(^{15})$ 2
7	2400 factus ex 3 & 32 $(^{5})$ 2 & 25 $(^{2})$ 5 2401 $(^{4})$ 7
11	9800 factus ex 2, 49 $(^{2})$ 7 & 100 $(^{2})$ 10 9801 factus ex 121 $(^{2})$ 11 & 81 $(^{4})$ 3

13

13 123200 factus ex 7, 11, 25 $^{(2)}$ 5, 64 $^{(6)}$ 2.
123201 factus ex 169 $^{(2)}$ 13 & 729 $^{(6)}$ 3

17 2600 factus ex 13, 8 $^{(3)}$ 2 & 25 $^{(2)}$ 5
2601 factus ex 9 $^{(2)}$ 3 & 289 $^{(2)}$ 17

19 28899 factus ex 169 $^{(2)}$ 13, 9 $^{(2)}$ 3 & 19
28900 factus ex 100 $^{(2)}$ 10 & 289 $^{(2)}$ 17

23 25920 factus ex 10, 32 $^{(5)}$ 2 & 81 $^{(4)}$ 3.
25921 factus ex 49 $^{(2)}$ 7 & 529 $^{(2)}$ 23

29 613088 factus ex 17, 23, 32 $^{(5)}$ 2, & 49 $^{(2)}$ 7
613089 factus ex 729 $^{(6)}$ 3 & 841 $^{(2)}$ 29

31 116280 factus ex 10, 17, 19, 4 $^{(2)}$ 2, & 9 $^{(2)}$ 3
116281 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 961 $^{(2)}$ 31

37 165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16 $^{(4)}$ 2
165649 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 1369 $^{(2)}$ 37

41 1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4 $^{(2)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
1413721 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 841 $^{(2)}$ 29

43 978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4 $^{(2)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3
978121 factus ex 529 $^{(2)}$ 23 & 1849 $^{(2)}$ 43

47 664848 factus ex 7, 13, 32 $^{(5)}$ 2 & 729 $^{(6)}$ 3
664849 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 2209 $^{(2)}$ 47

53 3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, $^{(3)}$ 2, & 125 $^{(3)}$ 5
3059001 factus ex, 9 $^{(2)}$ 3, 121, $^{(2)}$ 11 & 2809 $^{(2)}$ 53

57 5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121 $^{(2)}$ 11
5851561 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 3481 $^{(2)}$ 59

61 3575880 factus ex 5, 7, 11, 43, 8 $^{(3)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
3575881 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 3721 $^{(2)}$ 61

67 1620528 factus ex 3, 13, 16 $^{(4)}$ 2 & 49 $^{(2)}$ 7
1620529 factus ex 361 $^{(2)}$ 19 & 4489 $^{(2)}$ 67

71 2016399 factus ex 3, 11, 29, 43 & 49 $^{(2)}$ 7
2016400 factus ex 16 $^{(4)}$ 2, 25 $^{(2)}$ 5 & 5041 $^{(2)}$ 71

73 5116644 factus ex 4 $^{(2)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3, 169 $^{(2)}$ 13, & 841 $^{(2)}$ 29
5116645 factus ex 7, 17, 19, 31, 73

79 5997600 factus ex 17, 32 $^{(5)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3, 25 $^{(2)}$ 5 & 49 $^{(2)}$ 7
5997601 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 6241 $^{(2)}$ 79

83 1164240 factus ex 5, 11, 49 $^{(2)}$ 7, 16 $^{(4)}$ 2, 27 $^{(3)}$ 3
1164241 factus ex 169 $^{(2)}$ 13 & 6889 $^{(2)}$ 83

89 2859480 factus ex 5, 47, 8 $^{(3)}$ 2, 169 $^{(2)}$ 13 & 9 $^{(2)}$ 3
2859481 factus ex 361 $^{(2)}$ 19 & 7921 $^{(2)}$ 89

97 1138488 factus ex 3, 13, 41, 89, & 8 $^{(3)}$ 2
1138489 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 9409 $^{(2)}$ 97

Pro numeris primis inter 100 & 1000 sit hæc regula: ante numerum primum cujus logorithmus quæritur, sumantur immediatè duo numeri proximi, & post eum numerus immediatè sequens, qui tres numeri cum illo primo sunt quatuor numeri in suo naturali ordine se invicem sequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertii & quartus in cubum secundi, eritque factorum differentia æqualis summæ primi & quarti vel secundi & tertii, ut facile demonstrari potest; istique numeri facti habent ad minimum sex notas primas omnino easdem, & proinde parum inter se differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertii) logorithmi cognoscuntur ex ipsa progrediendi methodo, & ideo ad nostram abbreviationem sunt idonei. in numeris ultra 1000 non opus est tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorum, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cujus quæritur logorithmus, unitate solummodo deficit à quadrato numeri primi; eorumque ideo primæ sex notæ ad minimum sunt eædem; atque primi & tertii dantur logorithmi, & ideo ad nostrum institutum sunt idonei.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Ex dato logorithmo invenire ejus numerum.

Ex demonſtratis manifeſtum eſt hoc problema idem eſſe ac ſi quis proponeret; ex dato ſpatio hyperbolico, & una recta uni aſymptotorum parallela illud comprehendente, alteram invenire idem ſpatium comprehendentem, & eidem aſymptoto parallelam. Conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet logorithmus denarii arbitrarius; & ſumatur logorithmi vel ſpatii dati talis pars aliquota nempe ſpatium LIKM, ut pentagoni ſpatio LIKM regulariter circumſcripti, & hexagoni eidem regulariter inſcripti toties multiplicia, quoties ſpatium datum multiplex eſt ſpatii LIKM, concordent in tot notis arithmeticis, quot continet radix quadrata logorithmi arbitrarii; hoc enim facile fieri poteſt ex inſpectione tabellæ 32 hujus: datur ergo ſpatii LIKM menſura & recta IK unitas ex ſuppoſitione. Sit LM, z; ſicut in hujus 32 datur pentagonum ſpatio LIKM regulariter circumſcriptum & hexagonum eidem regulariter inſcriptum, inter quæ ſpatium datum LIKM eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium; & ideo duplum haxagoni una cum pentagono æquatur triplo ſpatii, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam z ſeu numerum LM, cujus toties multiplicatus, quoties ſpatium LIKM eſt ſubmultiplex ſpatii vel logorithmi dati, eſt numerus quæſitus, quem invenire oportuit. TAB. XLIV. fig. 1.

Hoc problema idem eſt cum hujus 8, ſed aliter generalius & methodo plerumque minus operoſa hic reſolutum.

PROP. XXXV. PROBLEMA.

Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, semicirculum in ratione data dividere.

TAB. XLIV. fig. 2. Sit semicirculus A D G, cujus diameter A G, centrum E, punctum in diametro datum B. supponatur factum quod jubetur; sitque recta B D semicirculum dividens in ratione data: quoniam datur semicirculi mensura & ratio in qua dividitur, igitur datur ejus portio nempe D B G. Sit recta B D, z: ex datis rectis B D, B E, E D, innotescunt triangula D E B, D E F, D E G: deinde sit ut D E F una cum D E G ad D E G ità duplum D E G ad trapezium circumscriptum D E G H: & positis primis terminis convergentibus D E G, D E G H continuetur series convergens polygonorum complicatorum, secundum circuli proprietates sæpius repetitas, donec conveniens fuerit approximationem adhibere ita ut exhibeatur sector D E G, qui una cum triangulo D B E æquatur portioni D B G cognitæ, cujus æquationis resolutio manifestat ignotam quantitatem z seu rectam B D: reliqua patent.

Idem problema eodem omnino modo resolvitur in ellipse, hyperbola vel earum sectore dato.

SCHOLIUM.

Si quis prædictorum problematum mechanicam desideret praxim; non difficile erit calculum, approximationem, & æquationis resolutionem secundum vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodammodo imitari, multa talia problemata possem hic resolvere ope analysios & nostræ serierum convergentium doctrinæ, quæ antea impossibilia æstimabantur: sed dicet fortè aliquis has resolutiones non esse geometricas; respondeo, si per geometricum intelligatur praxis ope

ope ſolius regulæ & circini peracta, hanc in his non ſolum eſſe impoſſibilem ſed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non poſſunt, ſicut facile demonſtrari poſſet; & ſi per geometricum intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam, omnia hæc problemata ſunt geometrice impoſſibilia, cum ex hic demonſtratis, manifeſtum ſit talem reductionem fieri non poſſe: ſi verò per geometricum intelligatur methodus omnium poſſibilium ſimpliciſſima; invenietur fortaſſe poſt maturam conſiderationem omnia prædicta problemata eſſe geometriciſſimè reſoluta, diligenter animadvertendum totam ſerierum convergentium doctrinam poſſe etiam nullo negotio applicari ſeriebus ſimplicibus. Sit enim ſeries A, B, C, D, E, &c. talis naturæ ut tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & ſecundo A, B, quo quartus D componitur ex ſecundo & tertio B, C, & quintus E ex tertio & quarto C, D, & ſic deinceps in infinitum; ſitque differentia antecedentium A, B, major ſemper differentia immediatè ſequentium B, C; ſupponamus hanc ſeriem ita in infinitum continuari donec duorum terminorum immediate ſe invicem ſequentium nulla ſit differentia, ſitque unus ex illis terminis z, quem ſeriei terminationem appellamus: dico z eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonſtratio vix differt ab hujus 10 & ejus conſectario: hac ratione ſi ponatur triangulum, ſectori circulari vel elliptico inſcriptum, vel ſectori hyperbolico circumſcriptum a, & trapezium, ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum b; erit hexagonum ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $Vq\,\frac{2\,b_3}{a+b_3}$ & proinde ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex a & b quo ex b & $Vq\,\frac{2\,b_3}{a+b_3}$ atque hinc etiam demonſtrari poteſt, quod ratio inter ſectorem & ejus triangulum datum non ſit analytica, ſecundum

A
B
C
D
E
z

tenorem hujus 11: possem quoque adhuc alia methodo particulari demonstrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad suam chordam datam: sed plura non addo, geometras interim pro scientiæ incremento admonens, me reperisse in quibusdam figuris (quas Cartesius secundi generis appellat) tres focos, seu tria puncta, à quibus ductarum in quodlibet curvæ punctum rectarum summa vel differentia semper est eadem: unde mihi verisimile videtur sicut omnis curvæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes secundi generis habere tres, omnes tertii quatuor, & sic in infinitum: quæ certè speculatio scrutatu dignissima est, esset enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi utilissima.

F I N I S.



H. U.

II.

HUGENII OBSERVATIONES IN LIBRUM JACOBI GREGORII, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

D^{nus} Hugenius rogatus à Societate quæ Parisiis suos habebat conventus (1668) in Bibliotheca Regia, ut vellet hunc librum examinare, societati retulit se multos errores observasse in demonstratione, qua Auctor contendit impossibilitatem quadraturæ Circuli & Hyperboles probare.

I. in 11^{a}. Propositione, in qua auctor contendit Circuli quadraturam analytice impossibilem demonstrare, hæc habentur *Si terminatio magnitudinum propositarum analytice componatur a primis terminis* $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$, *componetur etiam analyticé & eodem omnino modo a secundis terminis* $ba^2 + bba$ & $2b^2a$. sed licet id verum sit quando terminatio inventa est per Methodum, quam indicat, non potest generalis inde deduci conclusio. nisi ponamus, non posse inveniri, nisi per ejus Methodum, terminationem seriei Magnitudinum, quas appellat *convergentes*, vel si aliâ methodo inveniatur illam etiam per suam methodum inveniri posse quod non demonstravit.

II. Autor immediate post addit; *nullam quantitatem posse*

eodem modo analytice componi e terminis $a^3 + aab$, $abb + b^3$ *quo componitur e terminis* $aab + bba$, $2\,bba$. Hæc nihilominus invenitur per eandem methodum quam indicat in 7. Propositione. Methodus autem hæc est. Primo quærenda est quantitas perquam si multiplices $a^3 + aab$, & producto addas productum $abb + b^3$ multiplicati per datam quantitatem m, summa æqualis sit summæ duorum aliorum productorum, unius $aab + bba$ multiplicati per eandem quantitatem quæsitam, alterius $2\,bba$ multiplicati per datam quantitatem m. Ponamus igitur quantitatem illam æqualem z, erit $a^3z + aabz + abbm + b^3m = aabz + bbaz + 2\,bbam$; & $z = \frac{bbm}{aa + ab}$: Et certum est, sive multiplicetur $\frac{bbm}{aa + ab}$ per $a^3 + aab$ & addatur $abb + b^3$ multiplicatum per m, sive eadem illa quantitas multiplicetur per $aab + bba$ & addatur $2\,bbam$, semper prodire eandem quantitatem $2\,abbm + b^3m$, & consequenter ultimam hanc quantitatem componi eodem modo e primis & secundis terminis progressionis convergentis propositæ, quod Autor fieri posse negavit.

III°. Datâ autem hac quantitate $2\,abbm + bbbm$, si hac utamur ad quærendam terminationem progressionis propositæ, juxta methodum ab auctore indicatam in 7 propositione, & in 10, reperietur $= \frac{3\,aab^3 + ab^4 + 2\,a^3bb}{bb + ab + aa}$; & posito $a = 1$ & $b = 2$, illa terminatio, quæ designat in eo casu sectorem circuli continentem $\frac{1}{3}$ totius circuli, erit $= \frac{48}{7}$; & primus terminus progressionis $a^3 + aab$, qui designat $\frac{1}{3}$ trianguli æquilateri inscripti in eodem Circulo, erit æqualis 3; ita ut proportio circuli ad triangulum æquilaterum inscriptum sit ut $\frac{48}{7}$ ad 3, id est 16 ad 7. a vero nihilominus omnes has proportiones aberrare facile patet.

IV°. Si examinemus, cur terminatio aliquando occurrat vera per methodum Autoris, ut in 7 Propositione, interdum verò non; reperiemus id ex eo oriri quod problema 10^{mæ}

Pro-

Propositionis non bene sit solutum; Non enim sufficit, ut inveniatur terminatio progressionis convergentis, invenisse quantitatem compositam eodem modo e primis & secundis terminis; nam talis solutio tantum locum habet quando quantitas illa detegitur, non investigatâ quantitate quæ dicitur *z* in 7 Propositione; vel quum eadem quantitas non componitur ex ulla quantitate quæ datur in terminis progressionis, ut in 7ª. Propositione, ubi $z = \frac{me}{d}$; nam Autor sumendo $z = \frac{mae-mbe}{ad-bd}$ non videtur observasse, divisionem posse fieri per *a-b*.

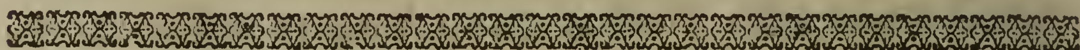
In exemplo propositionis 10, non quæritur quantitas *z*, sed *z* appellatur ipsa terminatio; & in transitu notandum est exemplum illud allatum esse citra propositum nam progressio, cujus primi termini sunt *a*, *b*, & secundi & $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ non est progressio convergens, neque habet terminationem, quamvis autor illam inveniat.

Quod attinet ad methodum, quam Autor proposuit ad appropinquandum per numeros ad dimensionem Circuli; Dᵘˢ Hugenius dixit sibi videri se quid magis accuratum dedisse in libro cui titulus est *de Circuli magnitudine*, edito 1654. Addidit illa, quæ Gregorius habet de dimensione Hyperbolæ & ratione quam habet cum Logarithmis, bona quidem esse sed minime nova membris societatis, cum possint recordari, se ipsis idem jam proposuisse, regulamque ad inveniendos logarithmos, jamdudum actis eorum insertam esse. Se etiam non credere illud novum videri regiæ societati Anglicanæ, cum qua jam ante plures annos communicavit methodum ad invenienda pondera aëris in diversis altitudinibus supra terram, quæ fundamentum in hac ipsâ Hyperbolæ dimensione habet.

Hæc autem est methodus, quam Dᵘˢ Hugenius proposuit ad inveniendum per logarithmos dimensionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Asymptotis & duas lineas paralelas ad alteram Asymptoton, data ratione quam in-

inter se habent duæ hæ lineæ. *Si logarithmus differentiæ logarithmorum horum numerorum semper addatur ad 0, 36221, 56868, summa erit logarithmus numeri partium, quas continet Spatium Hyperbolicum, illarum quarum* 1.0000000000 *continet parallelogrammum Hyperbolæ, id est illud, quod est contentum a duabus lineis ductis ex uno Hyperbolæ puncto, & quarum quævis parallela est uni ex Asymptotis*; Exempli gratia si parallelæ, quæ includunt spatium Hyperbolicum sint inter se ut 36 ad 5 operatio hoc pacto fiet.

1, 5563025008 *Logarithmus* 36.
0, 6989700043 *Logar.* 5.
0, 8573324965. *Differentia.*
9, 9331492856 *Logar. Differentiæ.*
0, 36221 56868 *Logar. qui semper additur.*
10, 2953649724; *Logar. cujus numerus facit contentum in Spatio Hyperbolico, quod hic est* 1.9740810180.



III.

DOMINI GREGORII RESPONSUM AD ANIMADVERSIONES DOMINI HUGENII, IN EJUS LIBRUM, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.



D ea quæ dicit D. *Hugenius* contra meam *Circ. & Hyperb. Quadraturam*, ingenuè fateor (cum illa scriberem) me non animadvertisse exemplum in prop. 10. non esse seriem convergentem expe-

perientiam enim feci solummodo de primis & secundis terminis, non considerando tertios cum primis coincidere, nam ratiociniis insistebam, de exemplis parum solicitus. Ut autem appareat in hoc nihil contineri contra nostram Doctrinam, agedum hoc loco 10: *prop.* totidem verbis, sed cum legitimo exemplo repetamus.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate eodem modo composita à duobus terminis convergentibus cujuscunque seriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejusdem seriei immediate sequentibus; seriei propositæ terminationem invenire.

Sit series convergens, cujus duo termini convergentes quicunque sint a, b, & termini convergentes immediatè sequentes $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$, termini priores inter se multiplicati efficiunt eandem ab, item sequentes inter se multiplicati efficiunt eandem ab; ex his invenienda sit propositæ seriei terminatio. Manifestum est, quantitatem ab eodem modo fieri à terminis convergentibus a, b, quo à terminis convergentibus immediatè sequentibus $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$: & quoniam quantitates a, b, indefinitè ponuntur pro quibuslibet totius seriei terminis convergentibus, evidens est, duos quoscunque terminos convergentes propositæ seriei inter se multiplicatos idem efficere productum, quod faciunt termini immediatè sequentes etiam inter se multiplicati; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes semper immediatè sequantur, manifestum est, duos quoscunque terminos convergentes inter se multiplicatos idem semper efficere productum, nempe ab; atque ultimi termini convergentes sunt æquales, & proinde sit ultimus ille terminus, seu seriei terminatio Z, quæ in se ipsam multiplicata facit

$Z^2 = ab$; est igitur Z. seu seriei terminatio $r^2\, ab$, quam invenire oportuit: & proinde ad inveniendam cujuscunque seriei convergentis terminationem opus est solummodo invenire quantitatem eodem modo compositam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus secundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in Problemate, *sive termini convergentes*, a, b, *sint primi, secundi vel tertii, &c. manifestum est, omnis seriei convergentis terminationem eodem modo esse compositam ex terminis convergentibus primis, quo ex secundis, tertiis, &c.*

Si quis aliud Exemplum desideret, sint primi termini a, b; secundi $r^7 a^5 b^2$, $r^2 ab$, quantitas eodem modo composita &c. est $a^7 b^4$ & seriei terminatio $r{:}^{11} a^7 b^4$: videat *Hugenius*, duo exempla legitima hic adducta inquisitionem *Septimæ* non admittere; ope tamen *prop. decimæ* (supposita tertia illa quantitate) facilè resolvuntur, neque ullo modo consectarium respuunt, quod solummodo esse momenti satis sit indicasse; plura autem exempla desideranti millena afferam.

Ad primam *Hugenii* objectionem quod spectat, miror eum non consideràsse præcedens *consectarium*, ubi illa, quæ desiderat, evidenter deduco ex *prop.* 10. At agnoscit hoc verum esse in illis seriebus, quæ ope nostræ methodi terminantur: velim certè ut assignet mihi Nobilissimus Vir seriem aliquam convergentem cum sua terminatione, quæ consectarium nostrum respuat; vel si eam assignare non possit, solidam dubitandi rationem tantum desidero. Ut autem funditus evertatur hæc objectio, sequentem exhibeo demonstrationem Geometricam.

Sit

Sit A. Polygonum regulare ſectori *inſcriptum*. B eidem ſimile *circumſcriptum*; continetur ſeries convergens polygonorum &c. ut ſit ejus terminatio ſeu circuli ſector Z: ſit X eodem modo compoſita à terminis C, D, quo Z à terminis A, B; dico Z & X eſſe indefinitè æquales; ſi non ſint indefinitè æquales, ſit inter illas indefinita differentia *a*, & continuetur ſeries convergens in terminos convergentes I, K, ita ut eorum differentia ſit minor quam *a*; hoc enim abſque dubio concipi poteſt, etiamſi hic omnes quantitates ſint indefinitæ, quoniam definitis quantitatibus A, B, definitur etiam *a*, ſed adhuc reſtat K-I quantitas indeterminata in infinitum decreſcens, Manifeſtum eſt, *ſectorem* Z eſſe indefinitè minorem quam K, & majorem quam I: item quoniam Z eodem modo componitur ex quantitatibus A, B, quo X. è quantitatibus C, D, & Z indefinitè minor eſt quam K & major quam I, patet ex Proprietatibus ſerierum convergentium, X etiam eſſe indefinitè majorem quàm I, & minorem quàm K (eſt enim revera indefinitè major quàm L & minor quam M) & proinde ſunt quatuor quantitates indefinitæ, quarum maxima & minima ſunt I, K, intermediæ autem Z & X, & ideo differentia extremarum K-I major eſt quàm *a* differentia mediarum, quod eſt abſurdum, ponitur enim minor; quantitates ergò Z & X non ſunt indefinitè inæquales, & ideo ſunt indefinitè æquales, quod demonſtrandum erat. Manifeſtum eſt hanc demonſtrationem eodem modo applicabilem eſſe omni ſeriei convergenti.

A	B
C	D
E	F
G	H *a*
I	K
L	M
Z	
X	

In objectionibus 2, 3, & 4, contra ſuas ipſius imaginationes argumentatur *Hugenius*: Ego enim ſatis dilucidè affirmo in *Scholio propoſit*. 5. & in *fine prop*. 9. Septimam & nonam propoſitionem eſſe Particularem, unamquamque ſuo caſui; item in *Prop. decima* (quàm ergo pro generali ſubſtituo) evidenter ſuppono, & non quæro, illam quantitatem eo modo compoſitam ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; ſatis enim ſcio, talem methodum genera-

lem eſſe impoſſibilem. Sed omnium maxime admiror, Clariſſimum Virum non animadvertiſſe in 8. *definitione*, Quantitates C, D, E, compoſitionem ingredientes, ſemper eſſe eaſdem, nempe definitas & invariabiles, ipſos autem terminos A, B; eſſe indefinitos & variabiles, nimirum in F, G, & infinitos alios: at quis eſt qui non videt *Hugenii* $\frac{b^2 m}{a^2 + ba}$ non minus eſſe indefinitam, quam ſunt ipſi termini? Deinde in *Prœmio noſtræ Geometriæ partis univerſalis*, ſic dico. *Alii objiciunt contra prop.* 11. *ita: ſi addatur* a^3 *termino* $a^3 + a^2 b$ & *temino* $ba^2 + b^2 a$, *enervetur vis utriuſque demonſtrationis. Reſpondeo*, a^3 *eſſe quantitatem indefinitam, & alias quantitates indefinitas præter ipſos terminos convergentes compoſitionem non poſſe ingredi, quod analyſtam latere non poteſt*: Eodem modo reſpondeo *Hugenio* $\frac{bbm}{a^2 + ab}$ eſſe quantitatem indefinitam, & ideo compoſitionem non poſſe ingredi: Si autem mihi objiciat, in *ſeptima* me credidiſſe, $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ fuiſſe quantitatem indefinitam; Reſpondeo, etiamſi diviſio per *a-b* à me ſatis inconſideratè neglecta ſit, apertè tamen conſtat, me hoc cognoviſſe, ex diverſitate methodorum, quibus utor in ſeptima & decima, quippe iſta *particulari*, in qua quantitatem illam quæro, & hac *generali*, in qua illam ſuppono; nulla enim alia ratio hujus diverſitatis excogitari poteſt; quod etiam ex ipſis *ſeptima* & *decima* eſt manifeſtum; cum appellem ſemper terminos convergentes quantitates indefinitas, hoc ipſo ſatis ſignificans, nullas alias quantitates indefinitas calculo ineſſe.

Semper credidi in rebus ſcientificis verba ita candidè eſſe explicanda (ſi modo poſſibile ſit) ut diſcurſus nullum includat abſurdum; at *Hugenius* ſatis percipit, diſcurſum nihil continere abſurdi, modò nulla quantitas indefinita præter ipſos terminos compoſitionem ingrediatur; judicat tamen abſque omni ratione, me contrarium exiſtimaſſe; libenter enim optarem *Hugenium* aſſignaſſe locum, ubi aſſero, illam inqui-

quiſitionem Septimæ eſſe univerſalem. Dico igitur & declaro me intelligere, nullam quantitatem indefinitam præter ipſos terminos convergentes compoſitionem poſſe ingredi. Atque ita corruunt tres ultimæ *Hugenii* ſive diverſæ objectiones, ſive ejuſdem portiones; neſcio enim, quare in tot partes dividatur.

Præcedentibus perceptis, evidentiſſimum eſt, *Circuli*, *Ellipſeos*, vel *Hyperbolæ* ſectorem eſſe terminationem ſeriei convergentis, cujus primi termini $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, & ſecundi $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$ * & proinde Sectorem eodem modo componi ex primis terminis quo ex ſecundis *; atque evidens eſt, nullam dari quantitatem eodem modo analyticè compoſitam ex primis terminis quo ex ſecundis, quoniam primos eodem modo analyticè tractando quo ſecundos, ſemper reſtat altior poteſtas ipſius a in primorum producto, quam in producto ſecundorum; de hoc (ſi non credatur) fiat experientia, & conſtabit non ſolum aſſertionis veritas, ſed etiam ejuſdem demonſtratio; quando autem altior eſt ejuſdem poteſtas in una quantitate quàm in altera, nulla datur indefinita æquatio, de qua hic tantum loquimur, hoc eſt, ut (poſitis a, b, ad libitum,) æqualitas ſemper rite procedat. Atque hæc eſt ſumma non ſolum propoſitionis undecimæ ſed etiam totius noſtræ *Circ.* & *Hyp. Quadraturæ*, ab *Hugenio* adhuc intactæ. Gratias tamen ago nobiliſſimo viro, quòd meas qualeſcunque lucubrationes examinare dignatus eſt, hinc enim mihi data eſt occaſio illas fuſius explicandi & confirmandi. Num *Hugeniana* methodus circulum menſurandi mea ſit præciſior, experientiæ relinquo judicandum; quod autem noſtra, *Hyperbolam quadrandi*, illi etiam innotuerat, de hoc nihil habeo quod dicam, niſi quod mihi gratuler, inventa mea ipſo *Hugenio* non æſtimari indigna.

* Schol. 5.
* Conſ. 10.

IV.

EXCERPTA EX LITERIS D^ni. HUGENII DE RESPONSO, QUOD D^nus. GREGORIUS DEDIT AD EXAMEN LIBRI, CUI TITULUS EST, *VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.*

In circuli quadraturam inquirentes Geometræ, varia & quidem pulcherrima detexere, ideo ne utili exercitio destituantur adversus Gregorium defendere constitui, quadraturam hanc detegi posse; neque huc usque responsionem hanc distulissem, nisi occasione controversiæ nostræ examen suscepissem exactissimum de proxima Circuli & Hyperboles Quadratura: in quo me interpellarunt sæpe alia impedimenta.

Dico nunc primo; Quod spectat impossibilitatem analyticam quadraturæ illarum figurarum, tantum abesse etiam post supplementum demonstrationum, quod D^nus Gregorius dedit, impossibilitatem hanc bene probatam esse, ut adhuc dum incertum maneat, num Circulus & quadratum diametri ejus sint incommensurabilia, id est an non horum ratio per numeros possit exprimi; quod etiam applicari potest portioni determinatæ Hyperboles & figuræ huic inscriptæ. Quod ut demonstremus sufficit observasse; quod XI ejus Propositio & supplementum nil probent quando in ejus serie convergente determinantur quantitates *a* & *b* per numeros rationales vel surdos; quoniam tunc terminatio etiam poterit esse numerus quidam similis; & contrarium per illam propositionem demonstrari non pote-

terit, quoniam tunc ignotum erit, quomodo terminatio composita sit ex primis & secundis terminis. E. G. Si a sit 1 & b, 2 quomodo probabitur per XI. ejus Propositionem, terminationem non esse $\frac{7}{3}$. Ut ergo concludatur, rationem Circuli ad quadratum diametri ejus non esse analyticam, demonstrari non solum debet, quod sector Circuli non sit analyticus indefinite ad figuram suam inscriptam, licet illa demonstratio non careat suâ pulchritudine, sed quod illud etiam verum sit *in omni casu definito*.

Dico præterea, si quantitates a & b maneant indeterminatæ, terminationem forte reduci ad æquationem ex iis, quarum radices dari nequeunt; & contrarium probari per XI. ejus Propositionem, neque per Supplementum, non poterit, nihilominus si illa terminatio reducta sit ad quandam æquationem ejus naturæ, crederem Quadraturam Geometricè esse inventam per intersectionem quarundam linearum curvarum, quæ in Geometriâ admittuntur.

Non inhærebo in aliis objectionibus, quas proposui; Dicam tantum, has, sicuti locum amplius non habent post correctionem Dn. Gregorii, ita antea firmo fundamento nixas fuisse; quoniam omissa divisione necessariâ per a- b in tot locis propositionis VII. poterat præsumi illum non novisse talem divisionem esse possibilem, & consequenter illum credidisse, in compositione de qua agitur indefinitas admitti debere quantitates.

Transeo igitur ad comparationem nostrarum methodorum pro dimensione Circuli proxima: Certum est, primas ejus approximationes quarum fundamentum sunt ipsius propositiones XX, & XXI. easdem esse cum iis, quas dedi in tractatu *de Circuli magnitudine*, ubi demonstravi eadem illa Theoremata, scil. si Polygonum in Circulo inscriptum sit a; & Polygonum simul circumscriptum sit d: contentum Circuli minus esse quam $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ *, sed majus quam $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ *, posito c pro Polygono inscripto quod duplo majorem habeat laterum numerum quam a vel d. Quidquid hic dico

* Vide supra pag. 361. pr. VI.

* Vide ibid. prop. V.

&

& in sequentibus dicam de Circulo debet intelligi pariter de sectore Circuli.

Præter hanc approximationem D. Gregorius aliam proponit in fine suæ XXV Propositionis, quam admirandam dicit, cujus demonstrationem se ignorare fatetur; hæc est, inter duos terminos, statim memoratos $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ & $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$, inventis quatuor mediis quantitatibus in proportione Arithmetica, asserit maximam harum quantitatum adeo Circuli magnitudini vicinam esse, ut, si in numeris, qui designant Polygona similia a & d; prima notarum triens sit eadem, error ad unitatem non pertingat.

Sed invenio hanc approximationem in Circulo veram non esse licet in Hyperbola locum habeat, &, dum in hac utimur maxima quatuor mediarum Arithmeticarum proportionalium, minimam pro approximatione Circuli adhibendam esse.

Ita minima quatuor mediarum proportionalium inter terminos dictos primæ approximationis erit $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, uti facile est videre per Calculum; & probare possum non solum experientiâ, sed & per demonstrationem quantitatem hanc, positis numeris quorum prima notarum triens eadem est, exprimentibus polygonis a & d, a vera Circuli magnitudine non aberrare nisi in duabus ultimis notis, & plerumque in omnibus notis & ulterius cum vera magnitudine conincidere, quam tamen semper superat, cum e contrario maxima quatuor Mediarum, qua utitur D^us Gregorius in Hyperbola deficiat.

Inveni præterea, approximationem hanc pro Circulo non æque accuratam esse, ac est illa quam dedi in Tractatu de *Circuli magnitudine*, juxta quam, quando a, c & d designant eadem Polygona, ac supra, terminus excedens contentum Circuli est $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ * Neque demonstratio difficilis est, quoniam si neges illum terminum esse minorem ideoque magis exa-

* vide supra p. 383. in fine.

ctum

ctum quam præcedentem $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, ſequetur, cubum $c - a$ non fore majorem nihilo, & c non majorem quam a contra hypotheſin, uti facile videre eſt per calculum analyticum, obſervando quod d ſit $= \frac{cc}{a}$.

Poſſunt etiam a & c ſumi pro circumferentiis Polygonorum inſcriptorum, quorum unum ſubduplum laterum habet numerum; Et tum terminus $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ eſt longitudo circumferentiæ Circuli, aut arcus ſectoris parum admodum excedens, ut ſi notarum triens in a & c ſit eadem, error dari non poterit niſi in ultima nota, & ſæpius nequidem in quatuor vel quinque notis ſequentibus ultra illas quæ dantur in numeris a vel c.

Sed & ut illi, qui contemplationes has negligunt, tamen quid commodi ex noſtra controverſia capiant, addam hic Geometricam conſtructionem ex ultimâ approximatione deductam qua invenitur longitudo arcus Circuli dati adeo acurata quam ad uſum deſideratur.

Sit arcus Circuli, qui non excedat ſemicircumferentiam A B C, cujus ſubtenſa ſit A C; dividat hanc ut & arcum in duas partes æquales linea B D. TAB. XLIV. fig. 3.

Ducta ſubtenſa A B ſumantur ejus $\frac{2}{3}$ & ponantur ab A ad E in producta lineâ C D; tum diminuta D E decimâ parte E F, ducatur F B, & tandem ipſi perpendicularis B G. Erit linea A G æqualis arcui A B, vel dupla linea æqualis arcui A B C, quæ tam parum excedet, ut tunc etiam, quum arcus erit æqualis ſemicircumferentiæ Circuli exceſſus non ſit $\frac{1}{1400}$. longitudinis; ſed ſi tantum ſit $\frac{1}{3}$ circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$, ſi autem arcus tantum ſit pars quarta circumferentiæ error non erit $\frac{1}{90000}$ longitudinis.

Poſſem hic addere approximationem & conſtructionem omnino ſimilem pro quadratura Hyperboles, paulo magis accedentem ad veram quam media Arithmetica D^{ni}. Grego-

rii, de qua superius dixi, sed vererer, ne nimium hoc scriptum producerem, & certus sum præterea, post illa, quæ D^{us}. Mercator nuper feliciter invenit de illa quadratura, & correctionem D^{ni}. Wallisii, inventa nostra hac de re parum esse consideranda.



V.

EXCERPTA EX EPISTOLA

D. JACOBI GREGORII,

CONTINENTE QUASDAM EJUS CONSIDERATIONES, SUPER EPISTOLA

D. HUGENII,

IMPRESSA IN VINDICATIONEM EXAMINIS SUI LIBRI, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.



Ex duobus argumentis, quibus conatur Nob. D. *Hugenius* doctrinam meam evertere, primo quidem, responsionis fundamentum dedi in *Proœm.* ad *Geometr. partem universalem*; alterum autem provenit solummodo à Prop. 11. non recte, opinor, ab *Hugenio* intellecta, quam tandem admittit post correctiones (ut inquit) à me factas. Ut autem, simul cum resolutione Objectionum, omnem evertam dubitandi rationem, ex admissa *Prop.* 11. in forma probare conabor Syllogistica, Nullam esse rationem analyticam inter Circulum & Diametri Quadratum: Præter Modum quippe & figuram nil deest in hactenus à me publicatis, quin

quin id integrè demonſtretur; quæ interim forma rarò à Geometris exigitur. Dico itaque;

Si daretur ratio Analytica (ſeu ratio notis Analyticis exprimenda) inter Circulum & Diametri Quadratum, tunc Circulus analyticè componeretur ex Quadratis, inſcripto & circumſcripto. Sed poſterius eſt abſurdum E. Sequela Majoris ſic probatur;

Quantitas quæſita & determinata invenitur ex quantitatibus quibuſcunque eam determinantibus, in ea ratione, ſeu relatione, quam habet quantitas determinata ad dictas quantitates determinantes. Sed Quadratum inſcriptum & circumſcriptum Circulum determinat, idemque ex illis Circulus daretur in ea relatione, quam habet ad Diametri Quadratum vel ejus ſemiſſem, h. e. ſi eſſet ratio analytica inter Circulum & diametri Quadratum; Ex dictis quantitatibus determinantibus *analyticè* componeretur Circulus. Ex dictis enim quantitatibus omnia analyticè componi poſſunt, quæ ad ea rationem habent analyticam.

Secundi Syllogiſmi *Minor* eſt evidentiſſima. *Major* autem eſt axioma ab omnibus Geometris tacitè admiſſum.

Minor Syllogiſmi prioris ſic probatur.

Eodem modo componitur Circulus ex Quadrato inſcripto & circumſcripto, quo componitur Quadrans Circuli ex Triangulo inſcripto & Trapezio vel potius Quadrato circumſcripto. Sed ex 11. *Prop.* Quadrans Circuli ſeu ſector non poteſt componi analyticè ex Triangulo inſcripto & Quadrilatero circumſcripto. E.

Major eſt evidens. At poterit fortaſſe diſtingui *Minor*, dicendo; Prop. 11. veram eſſe in Methodo indefinita; ſed poſſe eſſe falſam in methodis Particularibus. At inſto. Omnis methodus indefinita in methodos ſeu caſus Particulares eſt reſolubilis. Sed hæc methodus indefinita, nempe quod ſector ſit terminatio datæ ſerie convergentis, in nullam particulararem reſolvi poteſt. Nulla igitur datur hic methodus particularis. *Major* patet, quia quantitates æquales in ſe mutuò ſunt reſolubiles. *Minorem* ita probo; Si hæc Methodus

indefinita resolvetur in aliquam particularem, resolutio fieret vel ab Analysi *speciosa* vel *numerosa*. Sed neutrum dici potest. E. *Major* patet ex sufficienti enumeratione. *Minor* sic probatur: Non ab Analysi *speciosa*, quoniam hæc Methodus *indefinita* ad eam est irreducibilis, ut patet ex Prop. 11. Non à *Numerosa*, quæ hic est interminabilis, proindeque invariabilis.

In hanc ultimam distinctionem resolvitur 1. objectio *Hugenii*. Velim enim Nobiliss. Virum considerare, omnem plenam Problematis solutionem esse *indefinitam*. Nam Methodi *particulares*, cum sint *infinitæ*, exhiberi omnes nequeunt; neque dirigi possunt à tenore Problematis quippe illis omnibus communi: Ideoque requiritur Methodus *Generalis* seu Indefinita, Particularium directrix. Agnosco utique Methodos Particulares casu sæpe inveniri absque ope Generalis; attamen fatendum est Geometris, nullam esse, nec posse fieri Mothodum Particularem, in quam resolubilis non sit Methodus indefinita. Si igitur Methodus Indefinita omni resolutioni sit impervia (ut in *Prop.* 11. est demonstratum) eodem modo omnes Particulares resolutionem etiam respuent; proindeque tam Definita, quam Indefinita nullam compositionem agnoscit. Talis enim Compositio, qualis Resolutio.

Etiamsi prædicta, meo quidem judicio, abundè sufficiant, ne tamen ullus relinquatur cavillationi locus, 11^{mam} nostram *Prop.* etiam in *Definitis* hic demonstrabimus. Sit ergò B Polygonum intra Circuli sectorem, 2 B Polygonum circumscriptum & priori simile; sufficit enim Polygonorum proportionem definire, ut Theorema definitè demonstretur. Continuetur series convergens ut sit ejus teminatio seu Circuli Sector Z. Dico, Z non posse componi *analyticè* ex Polygonis *definitis* B, 2 B. Si fieri potest, componatur Z Analytice ex Polygonis Definitis B, 2 B. sintque duæ quantitates Indefinitæ *a* & *x*, è quibus componatur *m* eodem

B 2 B
C D
E F
G H
Z
a *x*

dem modo, quo Z. componitur à quantitatibus B, 2 B; Item eodem modo componatur n ex quantitatibus $\sqrt{ax}$, $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$: quantitates m, n, non sunt indefinite æquales ex *prop.* 11. Si igitur inter m & n fingatur æquatio; a manente quantitate indefinita, æquatio inter m & n tot habebit radices seu quantitates, in quas resolvitur x, quot quantitatum, inter se diversas rationes habentium, binarii sunt in rerum natura, quæ vices quantitatum a, x, subire possunt, h. e. quæ eandem quantitatem *Analyticè* ex se ipsis componit eodem modo, quo eandem quantitas componitur ex ipsarum media Geometrica $\sqrt{ax}$, & ex media Harmonica inter dictam mediam Geometricam & x, nempe $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$, ita ut compositio sit eodem modo quo Z componitur ex B & 2B, atque ex Consectario *Prop.* 10. omnes quantitatum binarii, rationes quoque diversas inter se habentium, B 2B, CD, EF, GH, &c. in infinitum, possunt supplere vices quantitatum a, x, quoniam Z eodem modo componitur ex B 2B, quo ex CD, EF, vel GH, &c. & proinde æquatio inter m & n radices habet numero infinitas. Sed omnis æquatio habet ad summum tot radices, quot habet dimensiones; & proinde æquatio inter m & n dimensiones habet numero infinitas, quod est absurdum; ideoque Z seu Circuli Sector non potest analyticè componi ex Polygonis definitis B, 2B. quod demonstrandum erat. Hinc manifestum est, Terminationem cujuslibet seriei convergentis, si non possit componi ex terminis convergentibus *indefinitè*, nec posse componi *definitè*; adeoque evanescit simul cum nostra distinctione Objectio *Hugenii* prima.

$\sqrt{ax}$ $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$

m

n

Idem in Objectione sua secunda non videtur advertisse, me non solum in Prop. 11. sed etiam in toto meo Tractatulo intelligere per Extractionem radicum, Resolutionem omnium potestatum sive purarum sive affectarum; omnium quippe eadem est ratio, neque ulla imaginabilis est in demonstratione diversitas, sive Sector supponatur Radix ali-

cujus poteſtatis puræ, ſive affectæ ad puram irreducibilis. Nam ſi Sector eodem modo fiat ex primis terminis convergentibus, quo ex ſecundis (ut in Conſect. *Prop.* 10. eſt demonſtratum) etiam omnes ejus poteſtates ſive puræ, ſive quocunque modo affectæ eodem modo componitur è primis, quo è ſecundis terminis convergentibus, quæ (in Analyticis exhibitæ) erunt æquales quantitates eodem modo Analyticè compoſitæ ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; quod eſt abſurdum, nempe contra *Prop.* 11. admiſſam. Senſus igitur integer *Prop.* 11. eſt Hoc Problema (*E datis duobus polygonis complicatis, invenire Sectorem ſive Circularem ſive Hyperbolicum ab illis determinatum*) non poteſt reduci ad ullam æquationem Analyticam.

In comparatione *Hugeniana* inter noſtras methodos, agnoſco, meas approximationes prop. 20. & 21. eaſdem eſſe cum *Hugenianis*, ſed methodo mihi peculiari demonſtratas. At meam approximationem in fine *prop.* 25. non percipere videtur *Hugenius*; aliam interim ſibi fingit: hanc primò meam non eſſe probat, deinde tamen eam cum ſua comparat, victoriaque potitur. Sed lentè hic feſtinandum.

Sit a Polygonum, Circulo vel ſectori inſcriptum, c Polygonum inſcriptum duplo plura habens latera, d autem ſit Polygonum circumſcriptum ſimile ipſi c. Ex 20. *prop.* Sector eſt major quam $\frac{4c-a}{3}$; & ex 21. Sector eſt minor quam $\frac{2d+c}{3}$, inter quos terminos ſit maximus quatuor continuè proportionalium $\frac{8d+8c-a}{15}$, nempe noſtra approximatio; quam rigidiſſimis *Hugenii* cenſuris ſubjicio. Hallucinatur autem *Hugenius*, quod Polygona a & d ſimilia ſumeret, cum debeant eſſe c & d, quæ duplò plura habent latera. Ne autem dicat, factam eſſe à me correctionem, conſideret hanc approximationem non ſolum verbis *prop.* 25. ſed & praxi *prop.* 30. eſſe conſonam, ubi approximationem *prop.* 21. ex ultimis ſimilibus Polygonis conſtruo: ridiculum enim eſſet, illam è penultimis minus præciſam dare, cum eadem ope-

opera detur magis præcisa ex ultimis. At miror, cum *Hugenius* incidisset in meam *Hyperbolæ* approximationem, quod eam non potuerit *Circulo* applicare; Nam in Hyperbola absque dubio 24. *prop.* approximationem ex ultimis similibus polygonis construxit: Omnis enim ad *Circulum* approximatio ex polygonis deducta, *Hyperbolæ* est etiam applicabilis, & vice versa. Sed hoc non videtur animadvertisse *Hugenius*; alioqui in fine suarum Animadversionum non promitteret talem Hyperbolicam approximationem, de cujus applicatione ad Circulum nihil dicit. Quæ autem illic affirmat (si de semet loquitur in plurali) transeant; si verò etiam de me adeo fidenter sibi persuadeat, falli ipsum putem, cum hæc eadem quadratura, de qua loquitur, antequam ab eo videretur, ad laboris dimidium à me sit reducta.

Ne autem *Hugenii* praxis geometrica minus peritis videatur nostram superasse, ex nostra approximatione, ab *Hugenio* rejecta, sequentem praxin exhibebo.

In fig. *Hugeniana* sit $AC = A$, $ABC = B$, sitque $A+B : B :: 2B : C$; eritque $\frac{8C + 8B - A}{15}$ major, quam arcus ABC; differentia autem, in semi-circumferentia minor erit quàm ipsius $\frac{1}{3500}$, in triente minor quam ipsius $\frac{1}{40000}$, & in quadrante minor quam ipsius $\frac{1}{300000}$. Sed quoniam præcedens approximatio major est quàm arcus, aliam addamus eodem minorem. Sit $A : B :: B : D$, $\frac{12C + 4B - D}{15}$ minor erit quam arcus ABC; differentia autem in semi-circumferentia minor erit quam ipsius $\frac{1}{1000}$, & in quadrante minor quam ipsius $\frac{1}{60000}$, inter has approximationes sit maxima, penultima sex continuè Arithmeticè proportionalium, quæ minor erit quàm arcus, differentia autem in semi-circumferentia minor erit quam ejusdem $\frac{1}{33900}$, & in quadrante TAB. XLIV. fig. 3.

mi-

minor quam ejusdem $\frac{1}{3000000}$. Sed hæc levia mihi videntur, cum possim Approximationes exhibere, quæ ab ipsa semi-circumferentia differant minori intervallo, quam quælibet ejus pars assignata, neque nobis amplius apparent hæc mirabilia, cum demonstratio solida innotescat. Ad reliqua ab *Hugenio* publicata, cum à meo instituto sint aliena, nihil dico, nisi quod ipsa Hugenii dicta (non obstante exactissima sua, ut ait, materiæ hujus examinatione) à meæ *Appendiculæ* factis ni fallor, longè superentur. Vale. *Decemb.* 15. 1668.

Figura *Hugenii* hæc est, quam ipse hoc sensu, licet Gallicè, sic explicat. Sit Arcus Circuli, qui non excedat semicircumferentiam, A B C, cujus subtensa sit A C, & dividantur ambo in partes æquales per lineam B D. Ducta subtensa A B, capias inde $\frac{2}{3}$, easque jungas inde ab A ad E in linea C A protracta. Dein, resecta lineæ D E parte decima E F, ducas F B, & tandem B G, ipsi perpendicularem: & habebis lineam A G æqualem Arcui A B C, cujus excessus tantillus erit, ut etiam tunc, quando hic arcus æqualis erit semicircumferentiæ Circuli, futura non sit differentia $\frac{1}{1400}$ suæ longitudinis; at quando non est nisi tertiæ partis circumfeferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$; & si non sit nisi quartæ partis, non differet nisi $\frac{1}{90000}$, suæ longitudinis.

F I N I S.

CHRIS-

CHRISTIANI HUGENII
GEOMETRICA
VARIA.

I.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

In æquatione loci ad hyperbolam, si neutra indeterminatarum linearum in seipsam ducta inveniatur, velut si sit $xy = bb$; vel $xy = cx . bb$; (literis x & y lineas indeterminatas AB, BC significantibus, quæ in dato angulo sibi mutuò sint applicatæ, quarumque altera, ut AB, positione data intelligitur, & in ea datum punctum A) constructio per asymptotorum inventionem facilè absolvitur, ut ostensum est à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Cartesii. Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque nihilominus ad asymptotos rem deduci posse, & quidem brevius quàm ad diametri laterumque recti & transversi inventionem, ostendemus hoc modo. *TAB. XLIV. fig. 4. 5. 6. 7.*

Sit æquatio ejusmodi reducta, $y = l . \frac{nx}{z} \sqrt{mm . ox + \frac{ppxx}{gg}}$; semper enim ad hos terminos reduci potest, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata est ad positionem datam, sola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hîc inveniantur; nam sæpe pauciores etiam esse possunt, cum soli necessarii sint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox.

Quum angulus ABC datus sit, ducatur per A punctum linea XY quæ sit rectæ BC parallela, & in ea accipiatur AI æqualis l, idque ad partes BC, si habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò si habeatur $- l$, & agatur IK pa-

 ral-

rallela A B. Si verò non habeatur omnino l, recta I K in A B incidere intelligenda est.

Deinde sicut z ad n, quæ ratio data, ita sit I K ad libitum sumpta, ad K L; quæ ipsi A I parallela ducenda est, sumendaque hoc pacto, ut puncta K L sita sint quo ordine A I, si habeatur $+\frac{nx}{z}$, at contrà si habeatur $-\frac{nx}{z}$, & ducatur recta per I L; si verò desit $\frac{nx}{z}$, eadem est I L & I K.

Porro ut p ad g, ita sit $\frac{1}{2}o$ ad singulas I X, I Y sumendas in recta A I; atque ita quoque I X ad I V sumendam in I K ad partes A B si habeatur $-ox$, aut in contrarias si habeatur $+ox$; & sit V M parallela A I, occurratque rectæ I L in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæsitæ; asymptoti vero, rectæ per M X, M Y ductæ.

Si vero non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; sumptisque I X, I Y ad libitum sed inter se æqualibus, inventisque inde punctis V & M, ut ante, ducentur asymptoti per I parallelæ ipsis M X, M Y.

Jam porro si habeatur $+mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppositæ sectiones transire debent, invenientur sumendo in recta A I à puncto I, singulas I S, I R æquales m: unde jam hyperbola data erit ac describi poterit, in qua B C erit ordinatim applicata ad diametrum, si $\frac{\frac{1}{2}og}{z}$ major quam m; sin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quam m, erit B C parallela diametro hyperbolæ ad quam est C punctum, ut hic casu secundo. Quod si forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipsæ asymptoti. Si verò non habeatur mm, erit ipsum I punctum in hyperbola quæsita.

At si habeatur $-mm$, accommodanda est intra angulum X M I recta G N parallela I X, quæque possit quadrata ab I X & I S, vel tantum ipsi I S æqualis, si non habeatur

ox;

ox; eritque punctum N in hyperbola quæſita, quæ proinde rurſus data erit.

Sumpta enim in caſu primo AB = x ad arbitrium, eique applicata BC = y in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, oſtendendum ſit quod fig. 4.

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$$

DEMONSTRATIO.

OCcurrat BC utrinque ſi opus ſit producta, aſymptotis in O & Q. Ex conſtructione eſt IX vel IY = $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$, IV = $\frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$, Ratio verò data IK ad KL, eadem nempe quæ z ad n. Sed & angulus IKL datus eſt. Ergo & ratio IK ad IL, quæ ſit ea quæ z ad a. Ergo quia ut IK ad IL ita IV ad IM, erit IM = $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$. Ut autem IM ad IX, hoc eſt ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ſive ut ag ad pz, ita ML, ſive MI minus IL, hoc eſt, $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad LO vel LQ; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia BK = l, & LK = $\frac{nx}{z}$, erit BL = $l - \frac{nx}{z}$, quâ ablatâ à BC = y, fit LC = $y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum QCO æquale rectangulo YSX. Sed rectangulum QCO æquale eſt quadrato LO minus quadrato LC, hoc eſt quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minus quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$: quorum quadra-

torum differentia est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc est quadrato IX minus quadrato IS, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

fig. In Secundo casu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rursus valor Y idem qui casu primo invenietur.

fig. 6. Sit tertius casus quo habeatur $-mm$, sitque æquatio $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$, producta GN occurrat alteri asymptoto in D. Hîc jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ esse $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$, & LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO = rectangulo DNG seu quadrato NG, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & IS $= m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto rursus utrin-

que

que $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{- mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$
Eademque est demonstrandi ratio in casu quarto, & aliis fig. 7.
quibusvis, habita ratione signorum + & −.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum sunt, tunc vero si $p = g$, hoc est si habeatur $+ xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt semper asymptoti sibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV, & singulæ $= \frac{1}{2}o$, unde punctum V est in semicirculo super XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia IM $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod si $ag = zp$, hoc est si g ad p ut z ad a, tunc erit IM $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipsi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc casu erunt asymptoti sibi mutuo ad angulos rectos; cum rursus punctum M sit futurum in circumferentia circuli descripti super XY centro I.

DE.

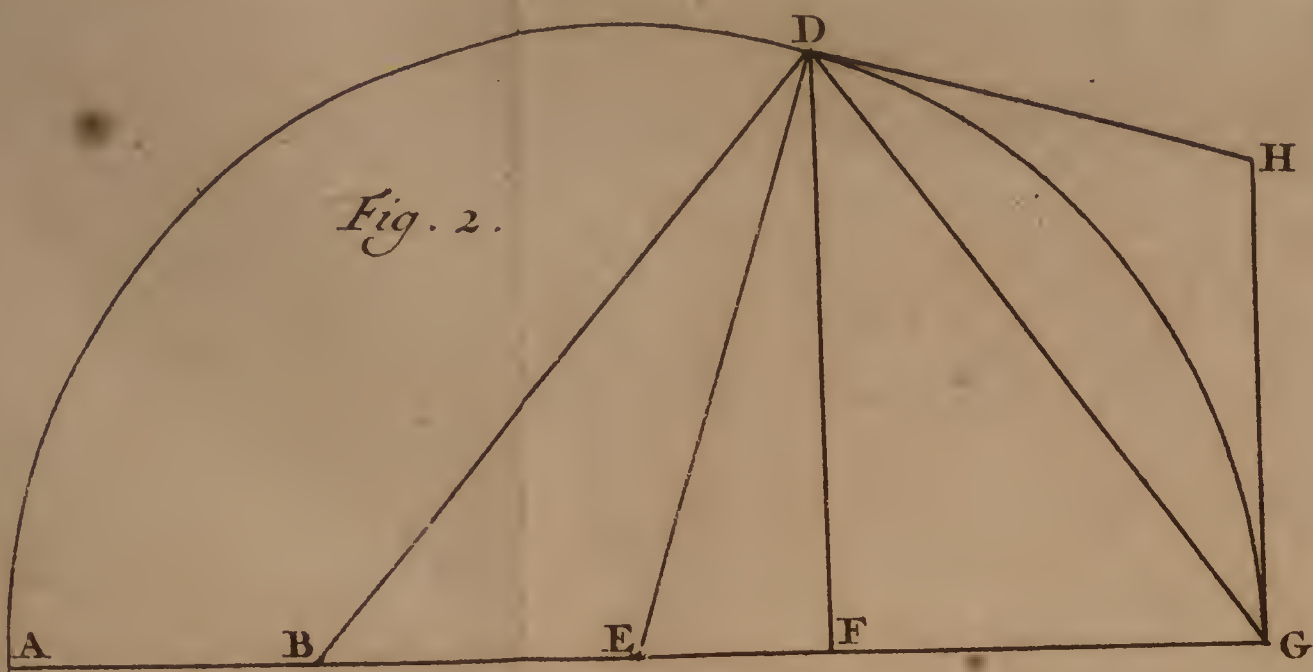
II.

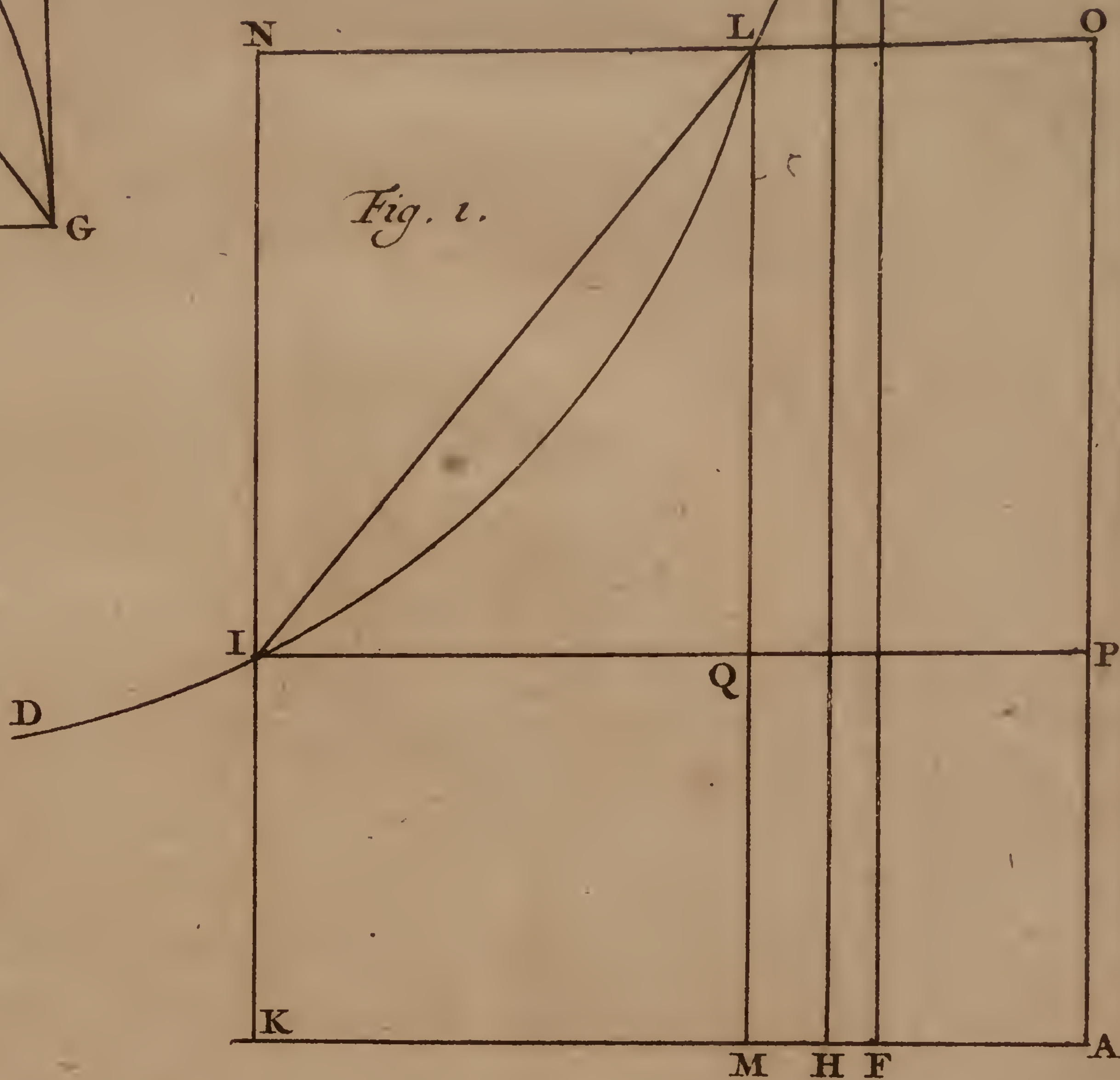
DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

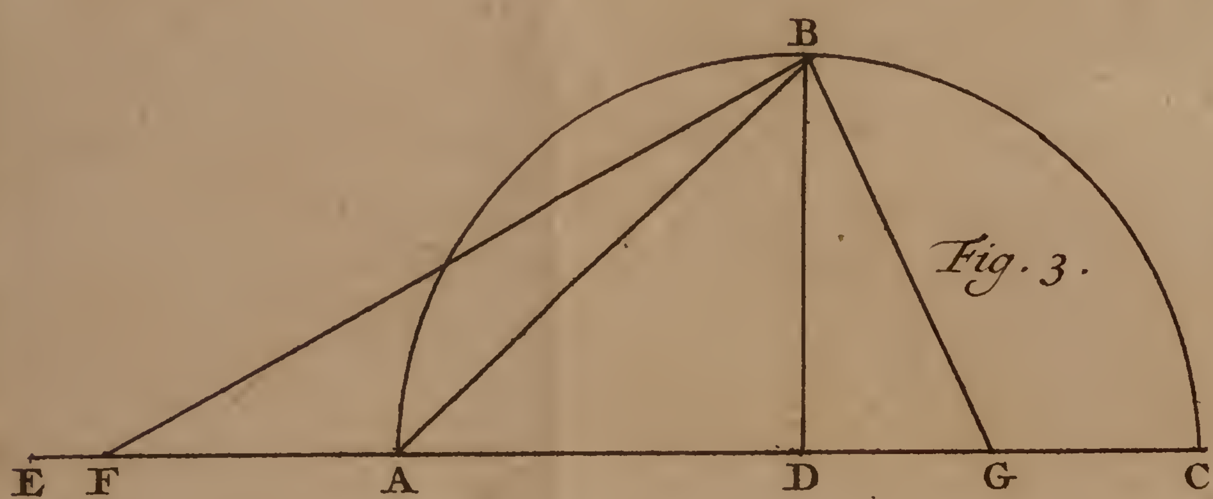
Ad investiganda Maxima & Minima in Geometricis quæstionibus, regulam certam primus, quod sciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipso non traditam cum exquirerem, inveni simul quo pacto ea ipsa regula ad mirabilem brevitatem perduci posset, utque inde eadem illa existeret quam postea vir amplissimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ suæ generalioris atque elegantissimæ, quæ ab alio prorsus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita est unà cum Cartesianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod institui est hujusmodi.

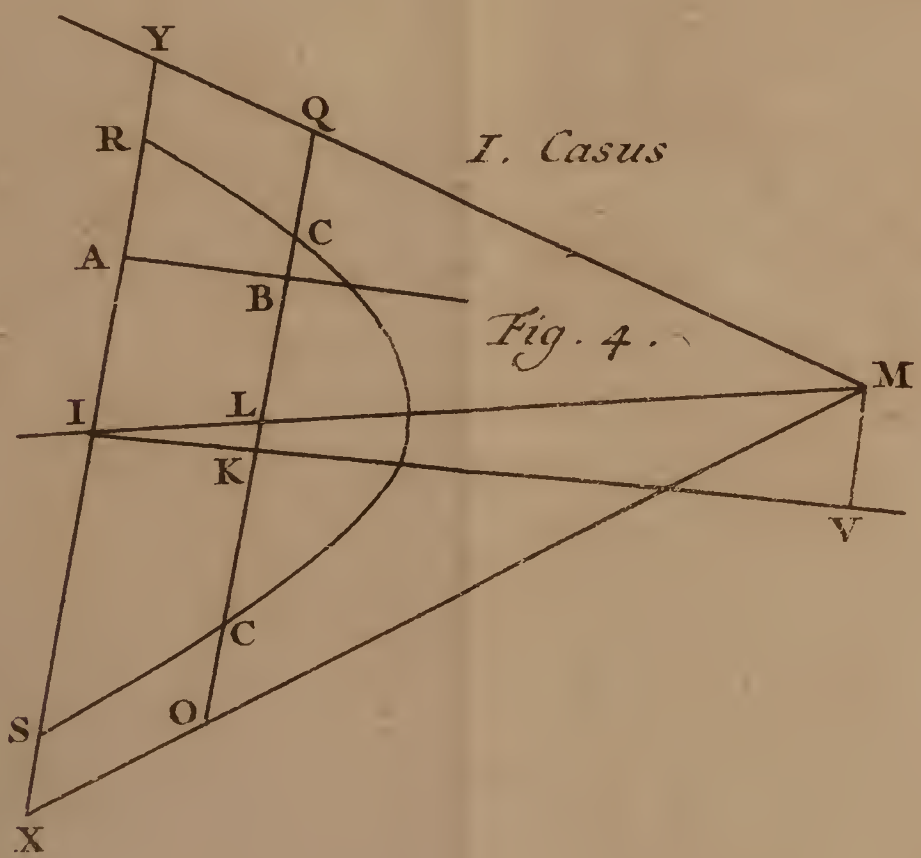
TAB. XLV. fig. 1. Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum est utrinque æqualitatis casum existere: ut si data sit positione recta E D & puncta A, B, oporteatque invenire in E D punctum C, unde ductis C A, C B, quadrata earum simul sumpta, sint minima quæ esse possint; necesse est ab utraque parte puncti C, esse puncta G & F, à quibus ducendo rectas G A, G B; F A, F B oriatur summa quadratorum G A, G B æqualis summæ quadratorum F A, F B, & utraque summa major quadratis C A, C B simul sumptis.

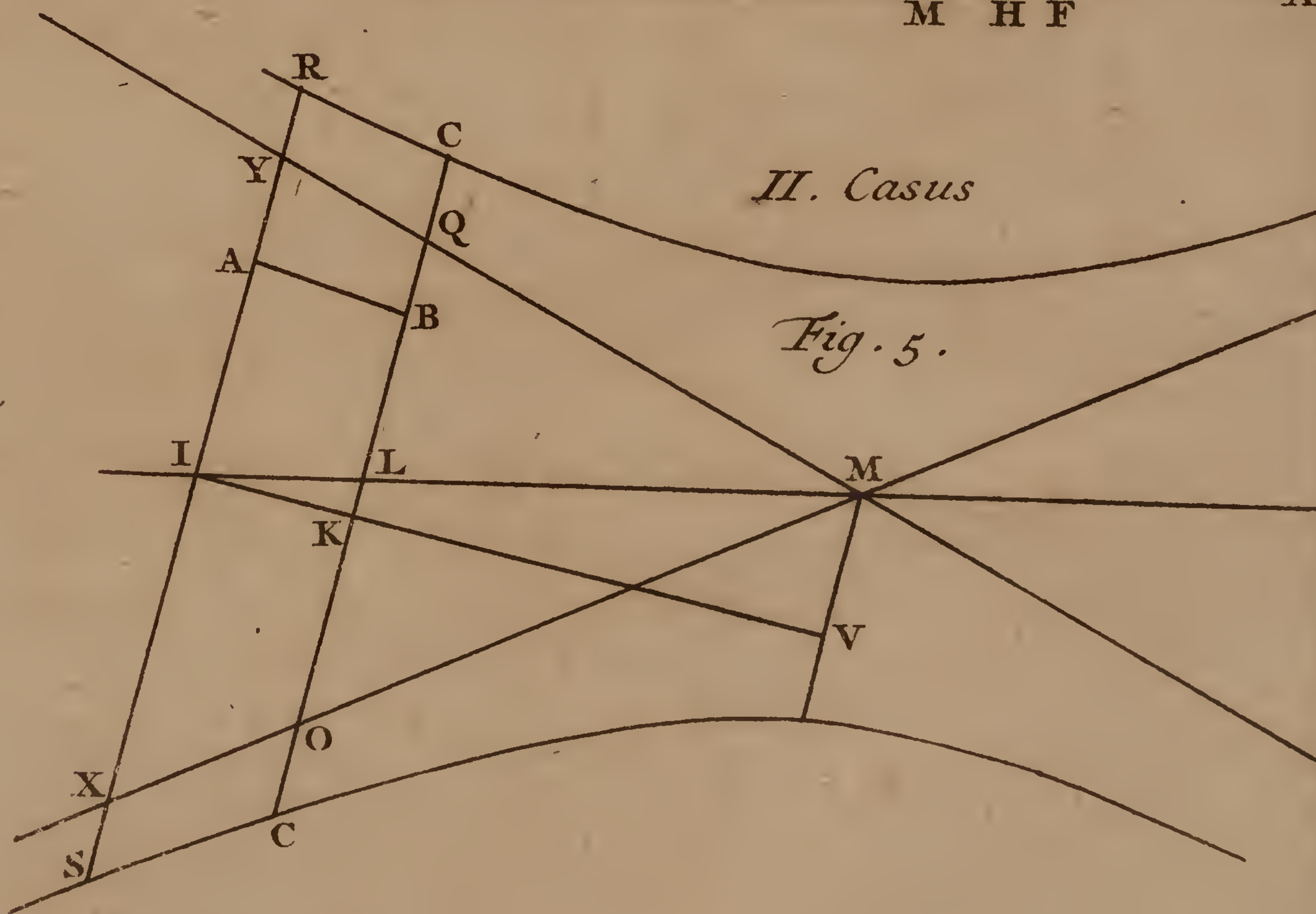
Ut igitur inveniam punctum C, unde ductis C A, C B fiat summa quadratorum ab ipsis omnium minima; ductis A E, B D perpendicularibus in E D, quarum A E dicatur a; B D, b; intervallum verò E, D, c: fingo primùm G F, differentiam dua-

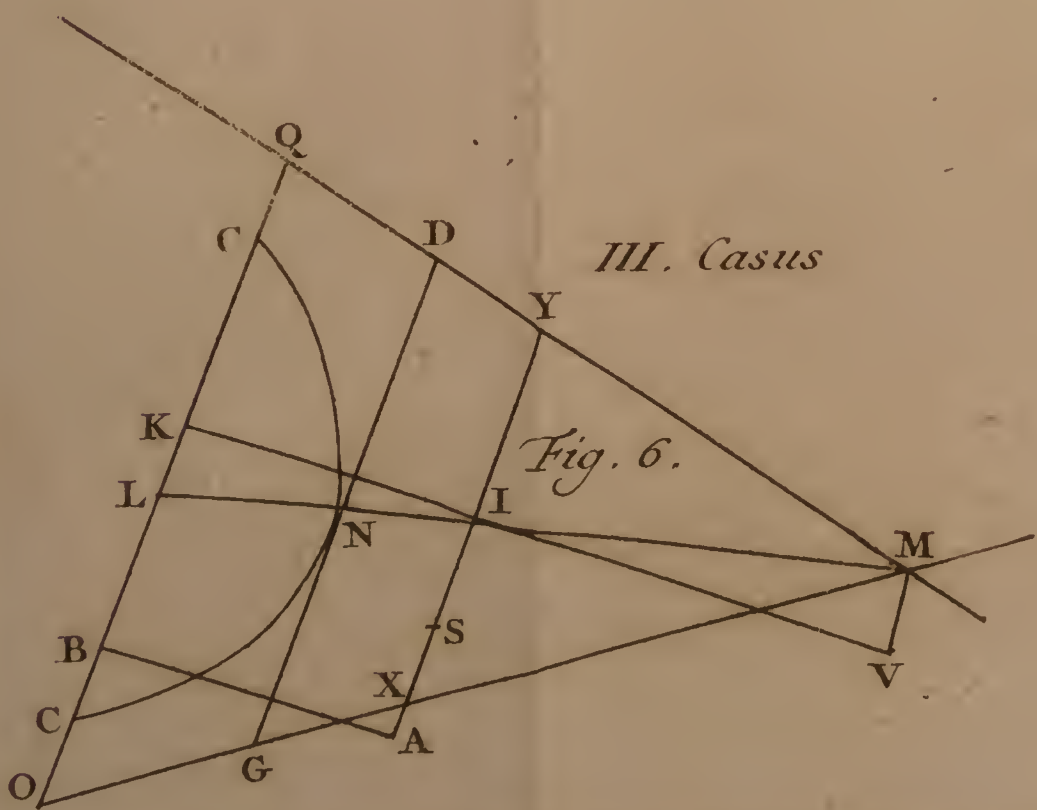

Fig. 2.
D
H
A
B
E
F
G

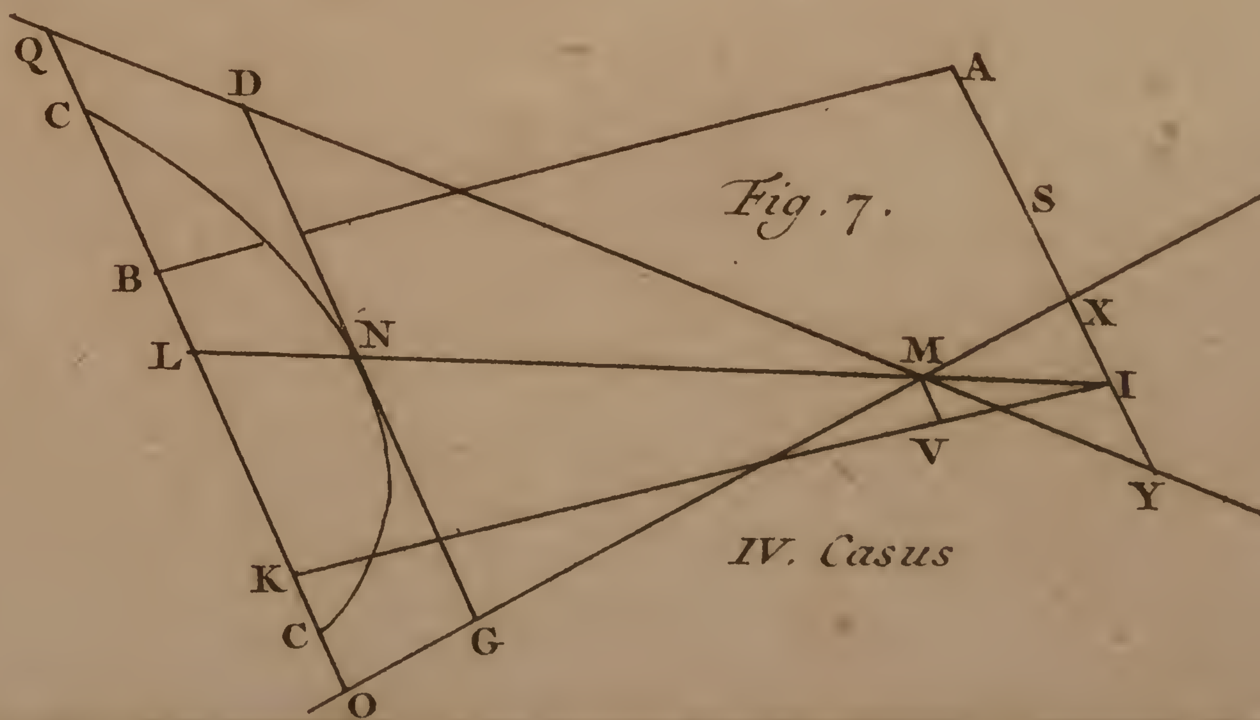

E
G
N
L
O
Fig. 1.
I
P
Q
D
K
M
H
F
A


B
Fig. 3.
E
F
A
D
G
C


I. Casus
Fig. 4.
Y
Q
R
C
A
B
I
L
M
K
V
C
S
O
X


II. Casus
Fig. 5.
R
C
Y
Q
A
B
I
L
M
K
V
O
X
S
C


III. Casus
Fig. 6.
Q
C
D
Y
K
L
N
I
M
S
B
X
V
C
A
O
G


Fig. 7.
IV. Casus
Q
D
A
C
S
B
N
L
M
X
I
V
Y
K
C
G
O

duarum E G, E F æqualem datæ lineæ quæ vocetur e; & quæro quanta futura ſit E G, quam appello x, ut quadrata G A, G B ſimul ſumpta æquentur quadratis F A, F B.

Itaque quia A E $= a$, & E G $= x$, erit quadratum A G $= aa + xx$. Et quia G D $= c - x$, & D B $= b$, erit quadratum G B $= bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata A G, G B ſimul ſumpta fient $= aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque ſimiliter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rurſus autem quia E F $= x + e$, ſi ubique in ſumma quadratorum inventa ſubſtituam $x + e$ pro x, & quadratum ab $x + e$ pro xx, adque ita deinceps ſi altior poteſtas ipſius x reperiatur, certum eſt exorituram ſummam quadratorum F A, F B; quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$, æquanda ſummæ quadratorum A G, G B; dicantur autem hi termini poſteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx = aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$. Ex qua æquatione prodibit valor E G ſive x, quando G F ſive e certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem e infinitè parvam, apparebit ex eadem æquatione quanta futura ſit E G, cum ipſi E F æqualis eſt, adeoque habebitur determinatio quæſita puncti C, unde ductæ C A, C B faciant ſummam quadratorum minimam; nempe ſublatis primùm, ſi quæ ſunt, fractionibus, (quæ in hoc exemplo nullæ ſunt) deleantur termini qui utrinque iidem habentur, quales ſunt neceſſariò omnes quibus litera e admixta non eſt; idque facile eſt intelligere, cum dixerimus poſteriores terminos ex prioribus deſcribi, ponendo $x + e$ vel poteſtatem ejus, quoties invenitur x vel poteſtas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibuſque poſt eam diviſionem adhuc unum e aut plura ineſſe inveniuntur, ii deleantur, quippe cum quantitates infinitè parvas contineant reſpectu cæterorum terminorum quibus nullum ampliùs ineſt e. Ex quibus denique ſolis invenitur quantitas x quæſita in caſu determina-

tionis proposito; & hæc est ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ hanc aliam inveni, cujus partes duæ sunt. Nam primò,

„Quando termini, quos maximum aut minimum designa-„re volumus, nullam fractionem habent, in cujus deno-„minatore quantitas incognita quæsita continetur; multi-„plicandus est terminus quisque per numerum dimensionum, „quem in illo habet quantitas incognita, omissis terminis iis „in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa „producta æquanda nihilo.

Ita in exemplo proposito, ubi termini priores inventi sunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, summam duorum quadratorum continentes, quam volo esse minimam; tantummodo hujusmodi instituenda erit multiplicatio,

$$\frac{aa + bb + cc - 2cx + 2xx}{\qquad\qquad\qquad 1 \qquad 2}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $-2cx + 4xx = 0$;

Unde fit $\frac{1}{2}c = x$.

Ita quoque si priores termini sint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2}{2c}x + ab^2$, multiplicatio erit hujusmodi $\quad 3 \quad 3 \quad 1$

Unde termini æquandi nihilo $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x = 0$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} = 0.$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, sciendum primò, quoniam termini posteriores ex prioribus describuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x, necessariò omnes terminos priores etiam in posterioribus reperiri; ideoque illos nihil

nihil opus esse describi, cum utrobique mox delendi forent, atque adeó illos tantum scribendos in quibus unum e vel plura insunt, ut in exemplo nostro $- 2ce + 4ex + 2ee$; eosque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum e inerunt, scribi frustra apparet, cum divisione facta per e delendos postea constet, ut paulò ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio describendi inter terminos posteriores quam quibus inerit e simplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facilè deducuntur, cum constet nihil aliud esse quam secundos terminos potestatum ab $x + e$, quia cæteri omnes plura quam unum e vel nullum habent. Adeo ut ubicunque in prioribus terminis habetur x, scribendum sit in posterioribus e; & ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in posterioribus; & ubi x^3 in prioribus, in posterioribus $3exx$, atque ita deinceps. Dicti autem termini secundi cujusque potestatis $x + e$ ex ipsa potestate x facilè describuntur mutando unum x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius x, ita enim ab xx fit $2ex$, & ab x^3, $3exx$; atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x, quos solos considerandos esse patuit, facilè etiam termini posteriores, ii quos nihilo adæquandos diximus, describuntur; multiplicando tantum singulos in numerum dimensionum quas in ipsis habet x. Nam mutare unum x in e ne quidem opus est, cum eodem redeat, sive omnes postea per e sive per x dividantur, & ex his quidem aperta est ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis: nunc ad alteram veniamus quæ est hujusmodi.

„Si termini quos maximum aut minimum designare volu„mus fractiones habeant in quarum denominatore occurrat „quantitas incognita, delendæ primùm sunt quantitates co„gnitæ si quæ adsint; deinde si reliquæ quantitates non ha„beant eundem denominatorem, eò reducendæ sunt. Tunc „termini singuli numeratorem fractionis constituentes, du„cendi in terminos singulos denominatoris, productaque „singula multipla sumenda secundum numerum quo dimen-

„ſiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris diffe-
„runt à dimenſionibus ejuſdem incognitæ quantitatis in ter-
„mino denominatoris. Signa autem affectionis productis
„ſingulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quo-
„ties dimenſiones quantitatis incognitæ plures ſunt in termi-
„no numeratoris quam in termino denominatoris: at quo-
„ties contra evenit, contraria quoque ſigna productis præ-
„ponenda; quæ denique omnia æquanda nihilo.

Sint, exempli gratiâ, inventi termini priores, quos maximum deſignare velimus, iſti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$, ubi nulla eſt quantitas cognita. Hîc ergo, ſecundum regulam, multiplico terminos omnes numeratoris primum per bcc, priorisque producti ex bx^3 in bcc, ſcribo triplum, quia bx^3 habet tres dimenſiones quantitatis incognitæ x, bcc verò nullam. Secundi producti ex $-ccxx$ in bcc ſcribo duplum, propterea quod in $-ccxx$ duæ ſunt dimenſiones x, & in bcc nulla. Tertium verò productum ex $-2bccx$ in bcc ſcribo ſimplex, quia in $-2bccx$ & bcc differentia dimenſionum x eſt unitas. Tribus autem hiſce productis vera ſigna affectionis adſcribo, quoniam dimenſiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc, quippe quæ nullæ ſunt, ita ut tria hæc producta ſint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Jam porrò terminos omnes eoſdem numeratoris duco in x^3, terminum alterum denominatoris, primumque productum ex bx^3 in x^3 ſcribere omitto, ſive per o multiplico, quoniam eædem dimenſiones utrobique ſunt ipſius x, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $-ccxx$ in x^3 ſcribo ſimplex, quia in his terminis differentia dimenſionum x eſt unitas. At tertium productum ex $-2bccx$ in x^3 ſcribo duplum, quia differentia dimenſionum x in his eſt 2. Signa verò affectionis productis hiſce duobus adſcribo contraria iis quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimen-

menſiones x pauciores ſunt utrobique in terminis numeratoris quam in x^3, termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ ccx^5 + 4bccx^4$; quæ addita tribus præcedentibus

$$+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbcx^4,$$

faciunt ſummam æquandam nihilo

$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x = 0;$$

qua æquatione diviſa per $ccbx + ccxx$, fit $x^3 + 3bxx - 2bcc = 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum ſit uno exemplo rurſus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem eſſe intelligetur. Videamus igitur priores terminos quos modò propoſueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$; ex quibus ſi alios quibuſcum eos comparem, ut initio factum eſt, deſcribere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi eſt x; video quidem primò omnes illos in poſterioribus terminis poſſe negligi in quibus plura quam unum e inerit, quia ſemper ex iis quantitates orientur in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob cauſam in ſuperioribus traditam.

Itaque erunt termini priores æquandi poſterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{\begin{matrix} bx^3 - ccxx - 2bccx, \\ + 3bexx - 2ccex - 2bcce, \end{matrix}}{bcc + x^3 + 3exx}$$

qui nempe ex prioribus hac lege deſcripti ſunt, ut ubicunque eſt x vel poteſtas ejus in prioribus, ibi ponatur $x + e$ vel poteſtatis $x + e$ duo priores termini; quoniam ſcimus in cæteris plura quam unum e contineri.

Jam verò porrò, quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac poſteriorum terminorum, iidem planè reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos nu-

meratoris partis alterius e carentes, omitti posse, cum quantitates inde ortæ eædem utrinque essent futuræ ideoque delendæ. Quare in terminis posterioribus ii tantum ab initio scribendi erant in quibus unum e, omissis omnibus reliquis, ut æquatio hîc futura sit ista

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hîc jam multiplicationes alternæ per denominatores instituendæ essent ad tollendas fractiones. Verum examinando diligentius quænam futura sint harum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inveniemus, & nec scribendos quidem omnino esse terminos posteriores: quia enim describuntur ex prioribus mutato x in e, præpositoque numero dimensionum ipsius x, non difficile est colligere ex solis terminis prioribus quænam futura sint ista omnia producta.

Ita quoniam propter $- ccxx$ in prioribus, habetur $- 2ccex$ in posterioribus; & propter x^3 in denominatore priorum, in posteriorum denominatore est $3exx$; facile perspicitur utraque producta ex $- ccxx$ in $3exx$ & ex $- 2ccex$ in x^3, quæ sunt $- 3ccex^4$ & $- 2ccex^4$, easdem literas habitura, sed diversos numeros præpositos 3 & 2, idque inde fieri quòd in termino $ccxx$ unam dimensionem minus habeat x quam in termino x^3. Itaque & auferendo postea ex utraque parte æquationis, $- 2ccex^4$, apparet superfuturum $- ccex^4$ à parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc sciri potest, multiplicando tantum in terminis prioribus $- ccxx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum simplex scribendo; quia differentia dimensionum x in istis duobus terminis est unitas.

Eadem ratione producta ex $- 2bccx$ in $3exx$, & ex $- 2bcce$ in x^3, quæ easdem literas habent, sunt enim $- 6bccex^3$ & $- 2bccex^3$, habebunt numeros præpositos di-

ver-

versos, propterea quod in $-$ $2bccx$ una tantum est dimensio x; at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $-$ $2bccex^3$, scio superfuturum à parte terminorum priorum $-$ $4bccex^3$: quod rursus ab initio cognosci potuit, quia eadem quantitas oritur, multiplicando $-$ $2bccx$ numeratoris terminorum priorum, in x^3 denominatoris, mutandoque unum x in e, & productum multiplicando per 2, quæ est differentia dimensionum x in terminis $-$ $2bccx$ & x^3.

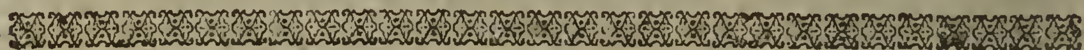
At quoniam in bx^3 & in x^3 eadem est dimensio x, sequetur producta ex bx^3 in $3exx$, & ex $3bexx$ in x^3, tum literas easdem, tum eosdem numeros præpositos habitura, ideoque sese mutuo sublatura, ut proinde multiplicatio illa omitti possit.

Atque hujusmodi animadversionibus inventum est quod in regula præcipitur, terminos singulos numeratoris in singulos denominatoris terminos esse ducendos, productaque quælibet multipla sumenda secundum differentiam dimensionum quantitatis incognitæ in terminis binis qui in se mutuò ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum postea per e an per x omnes termini dividantur.

Quod vero si signa affectionis vera productis singulis præponenda dicuntur, quoties dimensiones x plures sunt in numeratore quam in denominatore, id quoque ex jam dictis intelligetur; uti consequenter etiam hoc quod contraria signa sunt adponenda, quoties dimensionum numerus contra se habet. Velut hîc, productum ex bx^3 in bcc scribendum est cum signo $-$ præposito numero 3, ut fiat $-$ $3bbccx^3$, quia nempe propter bx^3 scimus in posterioribus terminis fore $3bexx$; quod ductum in bcc faciet $+$ $3bbccexx$, sed translatum in partem priorem æquationis, fiet $-$ $3bbccexx$; sive, non mutato x in e, $-$ $3bbccx^3$.

Quod denique in regula habetur, quoties in prioribus terminis priusquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt eas primum omnium delendas, id

id ex hoc ſequenti exemplo intelligetur rectè præcipi. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum deſignare oporteat, iſti $\frac{x^3}{2a - x} - 2vx + xx + vv$; ubi vv quantitatem cognitam ſignificet: id igitur delendum eſſe ut appareat, videamus quid futurum ſit ſi non deleatur. Nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum erit vv in $2a - x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a - x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis poſterioribus, ſecundum ſuperius, explicata ſcribetur $\frac{-evv}{-e}$, adeoque multiplicatione alternatim utrinque per denominatores inſtituta, ducendum erit hinc $2a - x$ in $- evv$; inde $- e$ in $2avv - xvv$. Ex quibus multiplicationibus eoſdem utrinque terminos oriri neceſſe eſt, cum utrobique eadem hæc tria in ſe mutuo ducantur $2a - x$ in $- e$ in vv, qui proinde termini ſe ſe mutuo ſublaturi eſſent, eoque fruſtra ſcriberentur; ac proinde liquet tuto deleri poſſe ab initio quantitatem vv, idemque quod in hoc exemplo accidit, neceſſario quoque in quibuslibet aliis contingere, diligenter intuenti manifeſtum erit.



III.

REGULA

Ad inveniendas Tangentes linearum curvarum.

IDem *Fermatius* linearum curvarum Tangentes regula ſibi peculiari inquirebat, quam *Carteſius* ſuſpicabatur non ſatis ipſum intelligere quo fundamento niteretur; ut ex epiſtolis ejus hac de re ſcriptis apparet. Sanè in *Fermatii* operibus poſt mortem editis, nec bene expoſitus eſt regulæ uſus, nec demonſtrationem ullam adjectam habet. *Carteſium* vero in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus aſſecutum invenio, nec tamen tam perſpicuè eam explicuiſſe quam per

per hæc quæ nunc trademus fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus.

Præcipuum vero operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam, quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusiique regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque ferè eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Sit data linea curva ut B C, quæ cognitam relationem habeat ad rectam aliquam positione datam A F; ac proinde applicatâ è puncto quolibet curvæ, ut B, rectâ B F, in dato angulo B F A, datoque in recta A F puncto A, certa æquatione relatio quæ est inter A F & F B expressa habeatur. Exempli gratiâ, appellando A F, x; F B, y, sit æquatio $x^3 = xya - y^3$, ubi a lineam quandam datam significare censenda est. TAB. XLV. fig. 2.

Quod si jam ad punctum B tangens ducenda sit BE, quæ occurrat rectæ A F in E, voceturque FE, z, ejus longitudo per hanc regulam Fermatianæ regulæ compendiariam, invenietur, ex sola æquatione data.

Translatis terminis omnibus æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales fiunt nihilo, multiplicentur primò termini singuli, in quibus reperitur y, per numerum dimensionum quas in ipsis habet y, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde similiter termini singuli in quibus x, multiplicentur per numerum dimensionum quas in ipsis habet x, & è singulis unum x tollatur; atque hæc quantitas pro divisore erit subscribenda quantitati dividendæ jam inventæ. Quo facto habebitur quantitas æqualis z sive FE. Signa autem + & — eadem ubique retinenda sunt; atque etiam si forte quantitas divisoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo sive negata sit, tamen tanquam adfirmatæ sunt considerandæ: hoc tantum observando, ut cum altera adfirmata est, altera negata, tunc F E sumatur versus punctum A, cum verò utraque vel affirmata est vel negata, ut tunc sumatur F E in partem contrariam.

In curvâ propoſita cujus æquatio $x^3 + y^3 - axy = 0$, fiet ſecundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$, diviſor verò $3xx - ay$; ideoque $z = \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$, quæ eſt longitudo cognita, cum dentur x, y & a.

TAB. XLV. fig. 3. Eſto item alia curva A B H, cujus æquatio $axx - x^3 - qqy = 0$, poſito ſcilicet a & q eſſe lineas datas, A F vero $= x$, F B $= y$. Sit B E tangens, & F E dicatur ut ante, z. Hîc fiet ſecundum regulam; dividenda quantitas $- qqy$; diviſor autem $2ax - 3xx$; unde $z = \frac{- qqy}{2ax - 3xx}$ Ubi cum dividenda quantitas ſit negata, ſi fuerit etiam diviſor minor nihilo, hoc eſt ſi $2a$ minor quam $3x$, erit z ſive fe ſumenda in partem ab A averſam. Si vero $2a$ major quam $3x$, ſumenda erit F E verſus A, ex præcepto regulæ.

TAB. XLV. fig. 4. Horum vero rationem, ipſiuſque regulæ & compendii quò reducta eſt, originem ut explicemus, proponatur ut ante curva B C, ad cujus punctum B tangens ducenda ſit.

Intelligatur primum recta E B D, quæ non tangat curvam ſed eam ſecet in B, atque item in alio puncto D, ipſi B proximo; rectæ autem A G occurrat in E; & ab utriſque punctis B, D ducantur ad rectam A G, iiſdem angulis inclinatæ B F, D G; & ſit A F $= x$, F B $= y$, ſicut antea; ponaturque etiam F G data eſſe, quæ ſit e, quæraturque F E $= z$.

Eſt itaque ſicut E F ad F B, hoc eſt, ſicut z ad y, ita E G, hoc eſt, $z + e$ ad G D; quæ erit $y + \frac{ey}{z}$; & hoc quidem in qualibet curva ita ſe habere manifeſtum eſt.

Nunc porrò conſideretur æquatio naturam curvæ continens, ex. gr. illa ſuperius propoſita $x^3 + y^3 - xya = 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut A H ſignificabat; & patet, cum punctum D in curva ponatur, debere eodem modo duas A G, G D, hoc eſt $x + e$ & $y + \frac{ey}{z}$ ad ſe mutuo referri

atque

atque AF, FB, hoc eſt x & y. Nempe ſi in æquatione propoſita pro x ſubſtituatur ubique $x + e$, & pro y, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo; hoc eſt

$$x^3 + [3exx] + 3eex + e^3, + y^3 + [\frac{3ey^3}{z}] + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} = 0.$$
$$- axy - [aey] - [\frac{aeyx}{z}] - \frac{aeey}{z}$$

In hac autem æquatione conſtat neceſſario terminos prioris æquationis, ex qua formata eſt, contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$: qui cum ſint æquales nihilo ex proprietate curvæ, idcirco his in æquatione deletis, neceſſe eſt etiam reliquos nihilo æquari, in quibus ſingulis manifeſtum quoque eſt vel unum e vel plura reperiri, ideoque omnes per e dividi poſſe. Qui autem poſt hanc diviſionem non amplius habebunt e, eos, neglectis reliquis, ſcio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z ſive FE oſtenſuros; ſi nempe BE jam tanquam tangens conſideretur, ideoque FG, ſeu e, infinitè parva. Nam termini in quibus adhuc e ſupereſt, etiam quantitates infinite parvas ſive omnino evaneſcentes continebunt. Et his quidem hactenus Fermatianæ regulæ origo ac ratio declaratur: nunc porro oſtendemus quomodo eadem ad tantam brevitatem perducta ſit. Video itaque ex æquatione totâ noviſſimâ, tantum eos terminos ſcribi neceſſe eſſe quibus ineſt e ſimplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy = 0$, deſcribi poſſint, deinceps explicandum. Et primò quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos cuborum ab

$x + e$ & ab $y + \frac{e}{z}$ ideo ſcriptos quia in æquatione habentur cubi ab x & y. Nam reliqui omnes termini cuborum, ut & quarumvis aliarum poteſtatem ab $x + e$, & ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum e habent, vel nullum; ideoque, ut jam diximus, fruſtra ſcriberentur. Eâdem itaque ratione, ſi aliæ poteſtates ab x vel y eſſent in æquatione propoſitæ, ſcribendi forent in æquatione alterâ termini ſecundi tantùm ſimilium poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$. Notandumque ſecundos hoſce terminos, ex ipſis datis poteſtatibus ab x & y, certa ratione confici; nempe ex poteſtate quavis x, velut x^3, mutando unum x in e, & præponendo numerum dimenſionum ipſius x: ita hîc fit $3exx$. Ex poteſtate y verò ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y: ita hîc ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$. Quorum quidem rationem ex poteſtatum formatione intelligere facillimum eſt.

Porrò propter xy in termino æquationis $- axy$, facile quoque apparet quid in æquatione ſecunda ſcribendum ſit. Cum enim ſubſtituendum ſit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, ſed ea tantum ſcribenda in quibus unum e, ideo de duobus $x + e$ tantùm e ducemus in y, & tantùm x in $\frac{ey}{z}$; adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$; quibus in a ductis, præpoſitoque ſigno $-$, quia habetur $- axy$, exiſtet $- aey - \frac{aexy}{z}$, ſicut ſuprà.

Sic

Sic quoque si in æquatione proposita haberetur xxy^3; sumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; & propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$, nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; quorum productum pro xxy^3 surrogandum. Sed etiam hîc de duobus $xx + 2ex$ tantùm xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$, tantumque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quàm unum e vel nullum haberent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, semper utrumque horum terminorum describi posse ex dato termino, qui hic xxy^3, alterum quidem mutato uno x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius; ita enim fit $2exy^3$: alterum verò ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y; ita enim fit $\frac{3exxy^3}{z}$. Cumque hac eadem immutatione, paulo ante, etiam secundos terminos potestatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ex potestatibus x & y æquationis datæ describi ostensum sit, manifestum jam est à singulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel potestas ejus, describi prædicta methodo in secunda æquatione totidem terminos in quibus non est z; à singulis verò in quibus y vel potestas ejus, describi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator sit z; nec alibi hanc literam in secunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito, quo pacto ex æquatione quavis proposita, velut hîc $x^3 + y^3 - axy = o$, alia describenda sit, ut hîc $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = o$, animadverto porro, si termi-

 ni

ni divisi per z ad alteram partem æquationis transferantur, ductisque omnibus in z, divisio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z, existere tunc ipsam quantitatem z ab una æquationis parte; uti hîc fiet $z = - \frac{3ey^3 + aeyx}{3exx - aey}$.
Atque hinc intelligo ad consequendam quantitatem z, ponendos tantum eos terminos æquationis secundæ, qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus y, sublato tantum denominatore z, mutatisque signis + & −. Deinde dividendo istos terminos per eos qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus x. Porro ex omnibus, tam divisis quàm dividentibus, patet rejici posse e, adeo ut in hoc exemplo fiat $z = - \frac{y^3 3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $\frac{e}{z}$ ex terminis qui descripti sunt ab iis qui habent y. Sic autem descriptos eos superius diximus ut ducerentur in idem $\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimensionum y. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hosce (quatenus ad definiendam quantitatem z hic adhibentur) ex terminis æquationis primæ, in quibus y, describendos, quam ut præponamus tantum iis numerum dimensionum quas in ipsis habet y, signaque + & − invertamus. Sic nempe ab $y^3 - axy$, describetur $- 3y^3 + axy$. A terminis verò qui descripti sunt à terminis æquationis primæ in quibus x, cum tantum e hîc rejiciendum patuerit, cumque hos ita prius descriptos dixerimus ut unum x mutaretur in e, præponereturque numerus dimensionum ipsius x; apparet eos, quatenus hic ad constituendum divisorum adhibentur, sic tantum describi opus esse ex terminis propositæ æquationis in quibus x, ut præponatur iis numerus dimensionum ipsius x, ac deinde unum x auferatur. Sic nempe ab $x^3 - axy$ describetur $3x^3 - axy$; & dempto ubique x uno, fiet $3xx - ay$. Atque ex his ratio regulæ ab initio positæ manifesta est. Nam quod signa + & − in terminis qui describuntur ab iis in quibus y, hîc immutanda diximus, in regulâ

verò

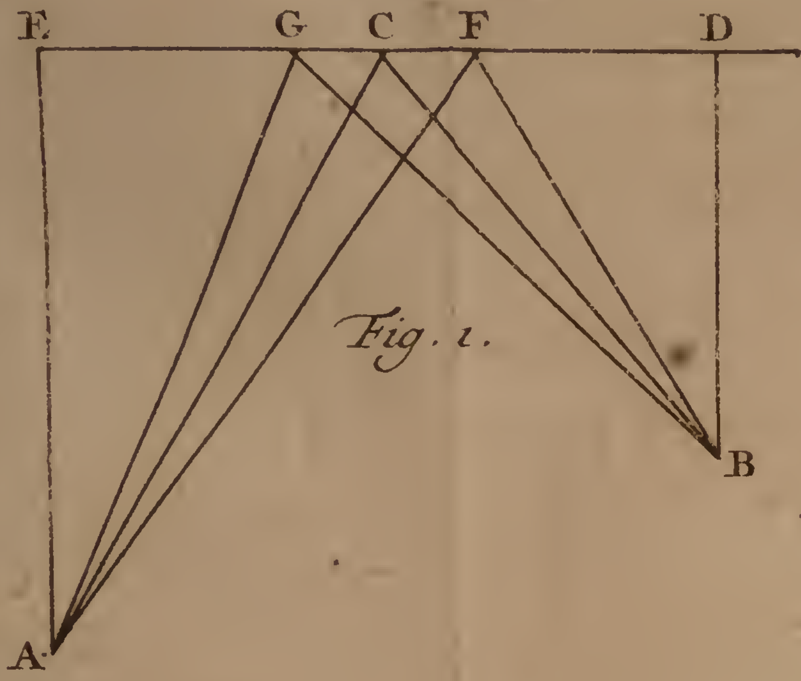
verò nulla omnino immutanda, id eodem redire liquet cùm quantitatem negatam, five minorem nihilo, tanquam affirmatam confiderandam ibi dixerimus. Ut autem ratio obfervationis ibidem adjectæ, in utram partem linea F E accipienda fit, intelligatur, repetemus figuram in principio pofitam, TAB. XLV. fig. 5. ubi vidimus A G effe $x + e$, E G vero $z + e$; unde fiebat GD $+ y + \frac{ey}{z}$. Si autem tangens ab altera parte lineæ B F cadere intelligatur, velut be, atque hæc primùm curvam fecare fingatur, ut ibi factum eft in d, ducaturque dg parallela bf; fiet ponendo rurfus $fg = e$, $fe = z$, ut A g quidem fiat $x + e$, fed eg erit $z - e$, unde $gd = y - \frac{ey}{z}$. Atque hinc porrò facile eft perfpicere æquationem fecundam, quæ ex propofita æquatione, $x^3 + y^3 - axy = o$ defcribitur, hoc cafu fore $3exx - \frac{3ey3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, termini ut nempe qui per z dividuntur, habeant figna contraria iis quæ habebant in æquatione defcripta cafu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$. Ex hac verò priori fequitur, quando quantitas $3exx - aey$, five quando $3xx - ay$ (quæ diviforem conftituit fecundum regulam) fuerit minor nihilo, five negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$; five etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam fecundùm regulam conftituit) effe affirmatam, aut cum illa eft affirmata, hanc effe negatam; quia omnes fimul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, fequitur, quando quantitas $3exx - aey$, five $3xx - ay$, fuerit negata, tunc reliquam $- \frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$,

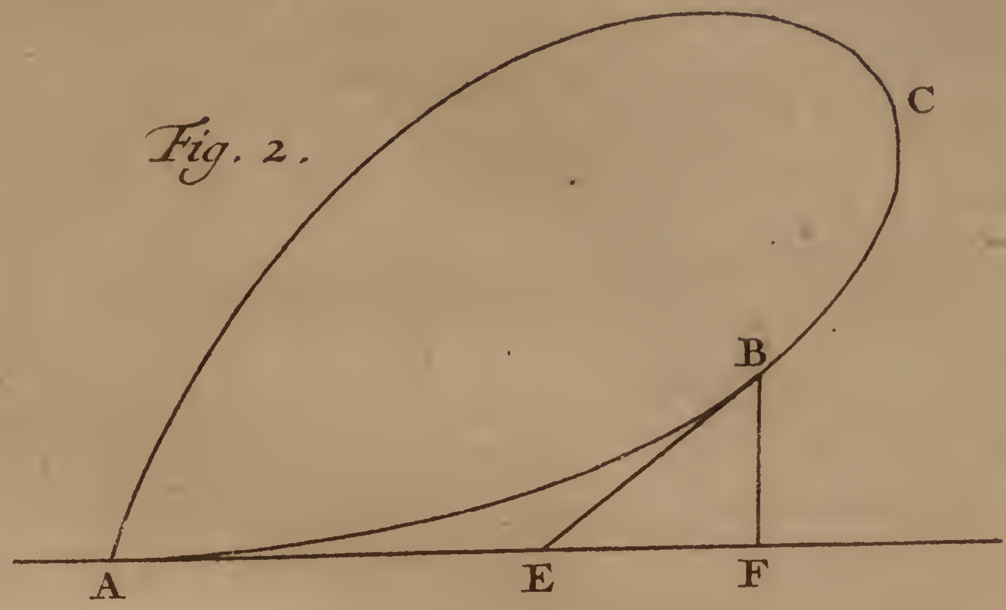
five

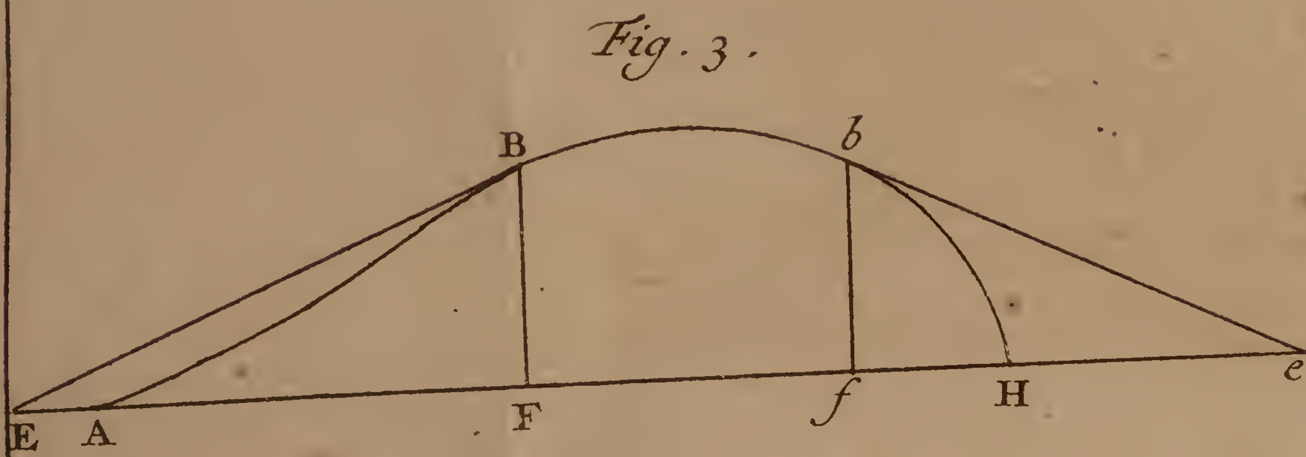
sive etiam $-3y^3 + ayx$ esse affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ esse negatam; ac proinde $3y^3 - ayx$ esse affirmatam. Per hæc itaque apparet ex quantitatibus per regulam inventis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$ judiciari posse ad utrum casum constructio tangentis pertineat; nempe ex comperta dissimilitudine affectionis in divisore & dividendo, sequi ad priorem casum eam pertinere, hoc est z, sive FE, accipiendam esse versus A: ex similitudine vero eorum affectionis sequi ad contrariam partem sumendam.

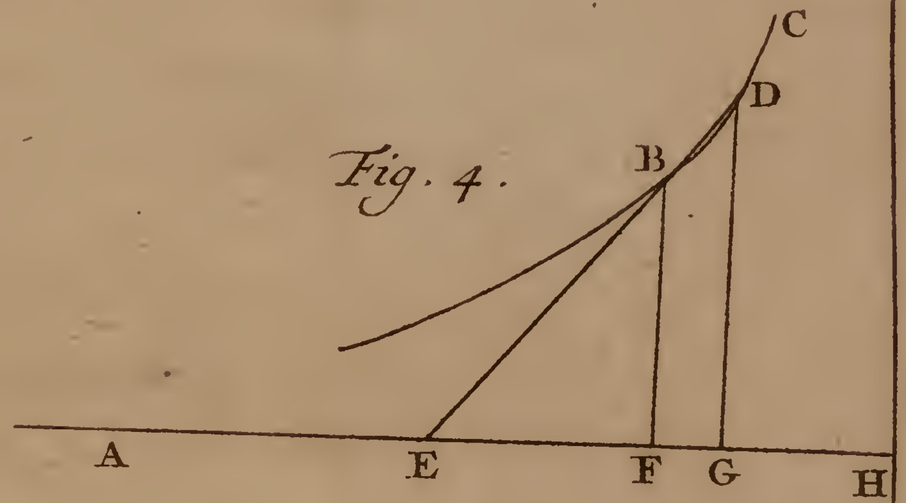
TAB. XLV. fig. 6. Potest autem quantitas z sive FE per regulam inventa, nonnunquam ad simpliciores terminos reduci ope æquationis datæ, quæ naturam curvæ continet: velut in hac curva AC, axem habente AD, verticem A, cujusque ea est proprietas ut, si à puncto C in eâ sumpta, applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (est autem B punctum in axe extra curvam datam) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Sive ponendo $BA = a$, $BD = x$, $DC = y$, fiat æquatio curvæ naturam continens, ista $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 = 0$. Hic ponendo CG esse tangentem, quæ occurrat axi in G, vocandoque GD, z, fit secundum regulam $z = \frac{-5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. Quia autem ex datâ æquatione est $y^5 = x^5 - 2ax^4 + aax^3$, restituendo pro $5y$ id quod ipsi æquale est, fiet $z = \frac{-5x^5 + 10ax^4 - 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$; sive dividendo per xx, erit $z = \frac{-5x^3 + 10axx - 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$. Et rursus, dividendo hanc fractionem per $x - a$, habebitur $z = \frac{-5xx + 5ax}{5x - 3a}$. Quod significat faciendum ut sicut BD quinquies sumpta minus BA ter, sive ut BA bis unà cum AD quinquies ad AD quinquies, ita BD ad DG; atque ita GC tacturam in C curvam AC.

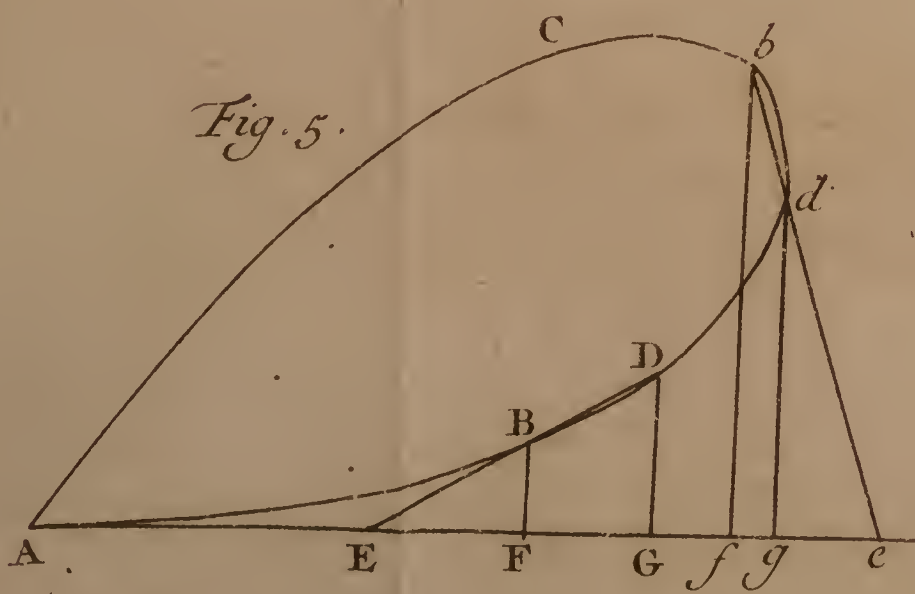
IV.

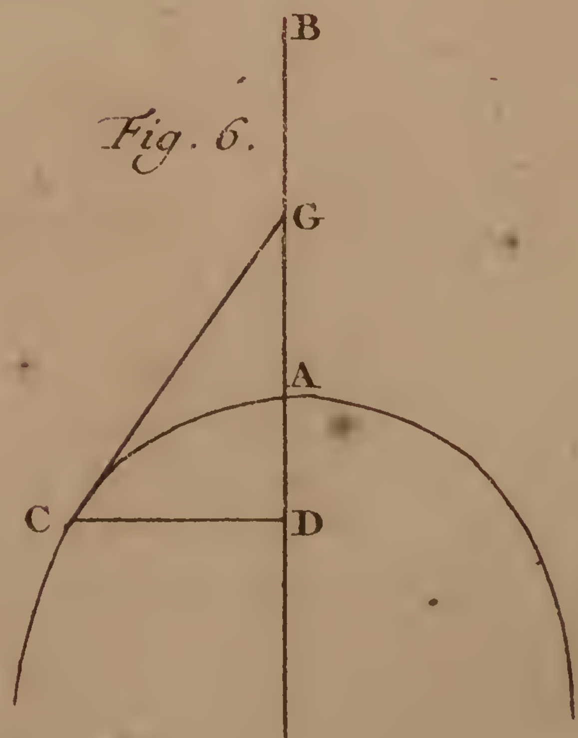

E
G
C
F
D
Fig. 1.
B
A


Fig. 2.
C
B
A
E
F


Fig. 3.
B
b
E
A
F
f
H
e


C
D
Fig. 4.
B
A
E
F
G
H


C
b
Fig. 5.
d
D
B
A
E
F
G
f
g
c


B
Fig. 6.
G
A
C
D

IV.

CHRISTIANI HUGENII
EPISTOLA
DE
CURVIS QUIBUSDAM PECULIARIBUS.

MItto tibi constructionem Problematis, quod sine dubio Geometris placebit, si id cum ipsis communicare velis, cum pulcherrimum sit, & singularia quædam contineat: accepi hoc a Marchione de l'Hospital, quem ex specimine hoc & variis aliis, inter summos nostri ævi Geometras referendum puto. Hac etiam occasione ad te mitto quasdam ex posterioribus, super rebus fere similibus, contemplationibus nostris.

Problema March. est; Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ. Ut hujus inveniat solutionem, sagaciter utitur *Calculo differentiali* celeberrimi Leibnitii, & reducit problema ad quadraturam curvæ, cujus æquatio est, $a^6 = aaxxyy + y^4xx$; positis x & y indeterminatis, quæ angulum rectum efficiunt; Hanc quadraturam ostendit dependere à quadraturâ Hyperboles; quæ datur, ut notum est, positâ logarithmicâ descriptâ; constructio autem huc redit. Sit logarithmica indefinita A C D, asymptos L O, subtangens constans data a, & portio curvæ sit C D, cui æqualem rectam invenire oportet. TAB. XLVI. fig. 1.

Duc D L, C O perpendiculares ad asymptoton, CE perpendicularem ad D L, & fac L T in asymptoto æqualem subtangenti a, & ductis rectis T D, T E, fiat T V = T D & T I

 = TE:

= TE: tunc junge VD, ductâque ipsi parallelâ IK, e puncto K, ubi occurrit ipsi DL, duc parallelam asymptoto KA, secantem DV in F, CO in X, & Logarithmicam in A. Tum rectæ AX & FK simul sumtæ erunt æquales curvæ CD.

Solutio hujus Problematis, prout ego invenio, potest etiam reduci ad quadraturam curvæ, cujus Æquatio est $a^4 = xxyy - aayy$, quæ, ut & altera, dependet à quadratura Hyperboles, uti possem satis facile demonstrare; sed constructio à modo descripta non differt.

Nescio, an multæ lineæ curvæ hanc habeant proprietatem ut ipsarum longitudines per ipsas curvas mensurari queant; interim ecce unam, quam haud ita pridem inveni, dignam, ut TAB. XLVI. fig. 2. videbis, quæ & ob alia etiam notetur; Est curva AXKO extensa in infinitum secundum rectam DN, quæ est ejus asymptos, ad quam AD, tangens ad verticem A, insistit perpendicularis; curvæ princeps & simplicissima proprietas est, ut omnis tangens inter punctum contactus & asymptoton, ut KN, sit æqualis lineæ AD; curva pariter extenditur ad alteram partem hujus perpendicularis AD. Ut invenias rectam lineam æqualem portioni hujus curvæ datæ a vertice A, ut AK (sic enim invenies alias portiones quascunque) duc KP perpendicularem ad AD, & descripto arcu circuli PQ, qui habeat centrum D & radium DP, quære in AB parallelâ Asymptoto punctum B, quod sit centrum circumferentiæ circuli, quæ transit per A & tangit arcum PQ, quod facile est; porro ductâ rectâ BD, sume in illâ DY = DA, & e puncto Y duc parallelam Asymptoto usque ad curvam in X, tunc YX erit æqualis curvæ AK; Et natura hujus lineæ talis est, ut si sumas tot proportionales quot volueris, in recta AD, incipiendo a D, ut DS, DI, DP &c. ducas applicatas SR, IO, PK: partes interceptæ curvæ, ut RO, OK, omnes sint æquales.

Ad quadraturam Hyperboles quoque inservit curva hæc; nam eadem recta YX facit cum AD rectangulum æquale spatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicu-

dicularibus ad FDE, unam ex Asymptotis, & quæ sunt inter se in ratione AD ad DP, si Hyperbola AV sit æquilatera & quadratum ejus ad angulum Ἀσυμπτώτων sit ADFH; unde reciproce patet, quomodo queant & inveniri puncta hujus curvæ positâ quadraturâ Hyperboles.

Habet illa adhuc alias notabiles affectiones, quales sunt, quod spatium infinitum, inter curvam, Asymptoton, & rectam AD, sit æquale $\frac{1}{4}$ circuli cujus radius est AD: quod solidum infinitum, quod producit hoc spatium rotando circa Asymptoton, sit æquale $\frac{1}{4}$ sphæræ ejusdem radii; quod superficies ejus solidi infiniti, sine basi, sit æqualis circulo, cujus radius est diagonalis quadrati ex AD.

Non autem propter ea qua huc usque proposui de hac curva hic egi, sed quia simplici Machinâ describi potest, quo reducitur Hyperbola ad quadratum, quod mihi visum est Geometrarum consideratione dignum.

Constructio Machinæ nititur in dictâ Tangentis proprietate & principio vel lege motus; scilicet, si in plano horizontali detur punctum, quod suo pondere vel alio modo aliquantulum resistit, junctum extremitati fili vel vectis inflexilis, cujus altera extremitas movetur, punctum illud describet curvam, cujus Tangens semper erit filum vel vectis. In instrumento vel machinâ, de qua dixi, movenda est extremitas D fili vel vectis DA juxta lineam rectam DN, & cavendum ut cuspis in extremitate altera A hærens erecta maneat dum interim premetur in planum horizontale, potius elaterio quam pondere, quoniam sic curva AK describitur sine errore sensibili, licet planum non sit exacte horizontale; Et detegitur, an habeat veram figuram reducendo extremitatem vectis N per eandem rectam ND; quoniam requiritur, ut cuspis regrediatur ex K in A, per eandem viam.

Si hæc descriptio, quæ per leges Mechanicæ est acurata posset haberi pro Geometricâ, eodem modo ut de-

scriptiones sectionum Conicarum, quæ fiunt per instrumenta, haberemus inde & quadraturam Hyperboles & perfectam constructionem omnium Problematum, quæ ad hanc quadraturam reducuntur; ut inter alia sunt, determinatio punctorum *Catenariæ*, & logarithmi. Si enim BY sit = AC, quæ sumitur in axe Catenariæ, id est DB = DC applicata ejus CG erit = YX; & eadem quoque YX est logarithmus rationis quam habet AD ad PD; id est, æqualis est distantiæ duarum linearum AD, PD, vel aliarum duarum quarumcunque, quæ eandem habent rationem, ordinatarum perpendicularium ad Asymptoton lineæ logarithmicæ, quæ habet DA pro Subtangente universali; unde possunt inveniri logarithmi tabularum, prout demonstravi in additione ad *dissertationem de causa gravitatis*. Leibnitius, qui primus initium fecit reductionis curvæ Catenariæ ad leges Geometriæ, ipsam illam lineam ope veræ Catenæ tenuissimæ formatam, dixit inservire posse inventioni logarithmorum, vel quadraturæ Hyperboles; licet ad id cognita requiratur (ut quidem ipse noverat) longitudo rectæ, quam vocat curvæ Parametrum, cujus inventionem non demonstrat. Ita ut nostra quadratrix in his usibus præferenda videatur, quia post descriptionem Parameter ejus, quæ est universalis ejus Tangens, datur.

Sed quoniam hæc materia me perduxit ad considerationem Catenariæ quæ elegantissimis hujus temporis Geometrarum inquisitionibus occasionem præbuit, libet hic addere quam inveni peculiarem satis methodum qua hæc delineatur curva, quod est omnium difficillimum inter ea quæ de hac sibi inquirenda proposuere Mathematici. Inter illa, quæ inserenda dedi in actis Lipsiensibus cum pulcris & eruditis Leibnitii & Bernoullii inventis, dixi, me reduxisse constructionem vel inventionem punctorum hujus lineæ ad quadraturam curvæ, cujus æquatio est $a^4 = aaxx + yyxx$ *; & me cognovisse, hanc quadraturam dependere à cognitione summæ secantium arcuum circuli, quæ æqualiter crescerent *per minima*; quæ summa jam dudum reducta fuerat ad quadratu-

* Vide supra pag. 292.

ram

ram Hyperboles per Jac. Gregorium in exercitationibus suis Geometricis; ubi inde deducit solutionem problematis longitudinum, datis vento & latitudinum differentiâ, quod novum credidit Leibnitius, & quod à Gregorio traditum tunc temporis non recordabar. Leibnitius & Bernoullius, ut censeo, pervenerunt ad Catenariæ Constructionem ope Curvæ, quam posterior illorum habet in 1ª. Figurarum quas exhibet ad solvendum hoc Problema; nam Leibnitius mihi scripsit, se etiam ad eandem pervenisse; Et invenio eandem cum illâ de qua ante, cujus æquatio est $a^4 = xxyy - aayy$, cujus quadratura, ut dixi, dependet à quadraturâ Hyperboles: licet nondum concipere potuerim, quomodo calculus illos perduxerit ad hanc lineam. Sed transeo ad meam constructionem, quæ absque consideratione aliùs lineæ curvæ, dat puncta Catenariæ per dimensionem lineæ Parabolicæ.

Primum fundamentum totius inquisitionis respectu hujus lineæ est hoc; Si habeas catenam compositam ex variis ponderibus æqualibus filo appensis, ut BCDEF semper trium interstitiorum se mutuo sequentium duæ lineæ extremæ, ut CD, FE continuatæ sibi mutuo occurrunt in linea IH perpendiculari ad Horizontem, quæ dividit interstitium medium in duas partes æquales. Considerando porro catenam ita compositam à ponderibus connexis ad æquales distantias, quas ponimus infinite exiguas, & dispositis, ita, ut interstitium infimum BC sit horizonti parallelum, si super quovis alio interstitio concipiamus triangula rectangula CDK, DEL, quorum unum latus sit horizontale, videbimus, quod ab infimo initium faciendo anguli DCK, EDL, FEM, tales sint, ut illorum Tangentes æqualiter crescant, ut numeri 1, 2, 3, 4, id quod demonstratu facile est ex dicto principio, licet forsitan eo non pervenissemus sine calculo Algebraico. TAB. XLVI. fig. 3.

Si porro concipiamus partes æquales catenæ CDEFG extensas in recta horizontali in COPQR, & ex prima divisione O ductam OS, quæ concurrat cum perpendiculari CS,

ita ut angulus COS sit æqualis angulo CDO, si deinde ducantur aliæ rectæ SP, SQ, SR; triangula SCO, SCP, SCQ, SCR erunt necessario similia COD, DLE, EMF, FNG, quoniam SCO est simile ipsi COD per constructionem, & aliorum CSP, CSQ &c. tangentes æqualiter crescunt.

Si porro ducas CT, OV, PX &c. perpendiculares ad SO, SP, SQ evidens est, triangula CTO, OVP, PXQ &c. æqualia esse & similia triangulis COD, DLE, EMF &c. eodem ordine sumendo: unde concluditur, si spatia CD, DE &c. sint infinite parva, ut & partes CO, OP &c., id est si CG sit curva catenæ, & CR æqualis ejus longitudini, tum summa TO, VP, XQ &c. erit æqualis summæ perpendicularium KD, LE, MF &c. id est rectæ GΣ vel axi ΦC (nam spatium BC tum pro nihilo habetur) & summa CT, OV, PX erit æqualis summæ CK, DL, EM &c. idest applicatæ GΦ.

Describendo autem centro S arcum CZ usque ad ultimam secantium SR facile patet, summam infinite parvarum TO, VP, XQ æqualem esse rectæ ZR; consequenter, si ponamus quod SCΦ sit axis Catenæ, & linea CS certæ longitudinis, & quod CΦ sit æqualis ZR excessui secantis cujusvis SR supra radium SC, & quod applicata ΦG sit æqualis summæ omnium CT, OV, PX &c. usque ad illam, quæ cadit in SR, punctum G erit in curva catenæ, cujus longitudo CG erit æqualis rectæ CR: sed quæritur summa infinitarum CT, OV, PX &c. quam obtineo hâc consideratione, quod anguli SOV, SPX, SQY possint haberi pro rectis, utpote quorum differentia cum recto est infinite exigua, & quod tum lineæ OV, PX, productæ utrinque, ut & RΩ perpendicularis ad SR, fiant tangentes Parabolæ CΩ, cujus vertex est C, axis CS, focus S, & in qua SC est pars quarta Parametri; quarum tangentium quævis secatur in duas partes æqualiter per CR, ita ut una dimidia pars pertingat ad axem, altera ad punctum contactus, sic ΔΩ secta est in R; quæ facile demonstrantur. Hinc porro intelligo ex Evolu-

volutione linearum curvarum, de qua locutus sum in *Horologio oscillatorio*, quod summa omnium QY, PX, OV, CT, debeat esse æqualis excessui curvæ Parabolicæ ΩC supra rectam ΩR; id quod Geometræ satis facile intelligent, licet in demonstrando non inhæream, quum non constituerim hic demonstrationes scribere, sed tantum indicare viam, quâ ad inventionem pervenis.

Datâ ergo Catenariæ Parametro SC, si sumas in axe punctum quodcunque Φ, & centro S radio SΦ describas arcum circuli, qui secat CR tangentem ad verticem in R; tangente RΩ ductâ ad Parabolam dictam e puncto R, & subtractâ hac ex longitudine curvæ suæ CΩ quam ponimus posse mensurari, quod reliquum est, erit recta applicata ΦG, & sic per eandem Parabolam invenies tot puncta in illâ curvâ, quot volueris; misi hanc constructionem ad Leibnitium initio Septembris 1691.

Potest porro in transitu notari, quod curva GC (sumendo semper numerum interstitiorum infinitum, & ideo punctum C ac si foret in axe & vertex) erit æqualis rectæ CR; & quod dimensio spatii curvi quoque facile demonstretur, perficiendo rectangulum RCSΘ & producendo perpendiculares GN, FM &c. usque ad SΘ in Λ, Γ &c.: patet enim triangulum SQY esse semissem rectanguli FΛ, basin & altitudinem eandem habentis, & pariter triangulum SPX semissem rectanguli EΓ & sic porro de aliis. Et consequenter triangulum SCR æquale dimidio spatii SCGΛ. Possem ita paucis demonstrare fundamenta omnium quæ de hac lineâ curvâ detecta sunt; sed hæc spectant ad Leibnitium & Bernoullium, utpote hujus inventionis magis participes, quos rogatos oportet, ut in bonum publicum laborem hunc in se suscipiant.

Finem scripto huic imposuissem, nisi nuperrime literas à Marchione de l'Hospital accepissem, ubi quum duo notabilia hac de materia memorat, non possum quin paucis de iis loquar; primum spectat ad constructionem & plures proprietates lineæ curvæ D^ni^ de Beaune, quam Cartesius in Ep. 79. 3 vol. dicit ipsi inveniendam propositam per datam Tangen-

Tangentis proprietatem; Problema, quod mihi apparuit difficillimum. Solutio Marchionis exſtat in 34. Diario Pariſienſi anni ultimi, quare hanc hic non trado.

Alterum eſt ejus reſponſum de aliâ curvâ valde cognitâ, & quam Carteſius aliter adhuc conſideravit, ut & Huddenius eo tempore, quo negotia Reip. non impediebant, quominus vacaret ſtudiis. Curva in fig. 4. exhibetur, folium ABCH circumſcribit & utrimque ſeſe extendit juxta Aſymptoton EFG. Æquatio ejus eſt $x^3 + y^3 = xyn$ ſi AD ponatur x in recta, quæ cum diametro CA format angulum 45 graduum; perpendicularis DB, vel DH, vel DK, y; & n recta data. Cum ipſi indicaſſem, me inveniſſe quadraturam hujus curvæ, & quod contentum folii ABCH eſſet $= \frac{1}{6}nn$ id eſt $\frac{1}{3}$ quadrati diametri AC; quod ſpatium infinitum inter Aſymptoton & ambo curvæ brachia etiam ejuſdem magnitudinis eſſent; & quod quadratura generalis ſegmentorum exprimeretur per unicum terminum; ille invenit veram illam quadraturam generalem. Scilicet quod contentum ſegmentorum AH vel AK exprimatur per $\frac{nxx}{6y}$ & ſegmenti AB per $\frac{nyy}{6x}$; ſed ulterius mihi affirmat ſe eo perveniſſe per tres diverſas vias; quod miror, cum perſuaſum habeam me non parum profeciſſe unicam detegendo.

TAB. XLVI. fig. 4.



PRO-

V.

PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM:

A

JOHANNE BERNOULLIO

IN ACTIS LIPSIENSIBUS

ANNI MDCXCIII.

PROPOSITUM.



Uæritur, qualis ſit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem BD in ratione conſtante M ad N. TAB. XLVI. fig. 5.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt, non obſtante, quod curva pro ratione M ad N magis vel minus compoſita evadat; in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum: in reliquis ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determatio puncti in curva.

 C. H. Z.

VI.

C. H. Z. DE PROBLEMATE BERNOULLIANO IN ACTIS LIPSIENSIBUS PROPOSITO.

ELegans inprimis esse hoc Problema, cum ex iis quæ Clarissimus inventor de eo prodidit, tum ex solutione & commentatione fraterna manifestum est. A quo investigando cum propter insignem difficultatem, quæ statim sese offerebat, abstinere statuerim (neque enim omnibus perquirendis, quæ à Viris eruditis exercitii gratia proponuntur, incumbere necesse existimo, aut assequendis parem me profiteor) non desiit tamen quasi invitum compellere recurrens identidem quæsiti non vulgaris idea, donec tandem quod desiderabam obtinui. Inventa nimirum *æquatione differentiali*, in qua ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab asymptoto perpendicularibus intercepti; ab altera elementum spatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci posset. Quod apertius exponerem, nisi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejusmodi hyperbolicum secandum esset aut augendum secundum rationem datam. Quod cum per medias aut continue pro-

por-

portionales fieri possit, ubi ratio tangentis ad abscissam est ea quæ numeri ad numerum, hinc apparuit curvam quæsitam tunc iis accensendam quæ geometricæ vocantur, alias esse ex heterogeneis; ac tamen constructionem dari posita lineæ logarithmicæ descriptione, quam quidem hic adducerem, nisi viderem haud difficulter ex ipsa Jacobi Bernoullii doctissima simul brevissimaque solutione omnia erui posse, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur vero ex his illud animadversione dignum, nempe quandocunque in investigatione curvarum ex tangentibus aut subtangentibus ejus, ad similes ei, quam dixi, æquationes pervenietur, aut in quibus habeatur utrinque elementum spatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hic accidit, eventurum, ut curvæ geometricæ diversorum generum graduumque existant, si hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quæ in asymptotis, sint commensurabilia. Præterea observanda venit in hoc problemate inusitata ac singularis analysis via, quæ ad alia multa in hac Tangentium doctrina aditum aperit, ut egregie jam animadvertit Vir Celeberrimus *calculi differentialis* inventor, sine quo vix esset, ut ad hasce geometriæ subtilitates admitteremur. Porro quod ad curvarum, de quibus agitur, designationem in plano attinet, possem, si operæ pretium esset, alios modos ac fortasse commodiores indicare quam qui a Cl. Bernoullio præscribitur, atque etiam docere qua ratione optime peragatur descriptio nostræ quadratricis hyperbolæ, quæ inter *Tractorias* (ita enim vocari possunt) simplicissima censenda est, cum ad eam filis nihil opus sit, sed bacillo tantum utrimque cuspidem lateri infixam habente, quo fit ut & regressu explorari possit quam recte exarata sit. Sed his supersedendum arbitror, donec insignis usus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utilissimam cur-

vam nuper mihi repertam Geometræ sciant, cujus opera horologiis æqualis motus conciliatur, atque ejusmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis nostris hactenus usurpatis non satis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior spes nunc affulgeat perficiendi Longitudinum inventi. Curva hæc formatur,

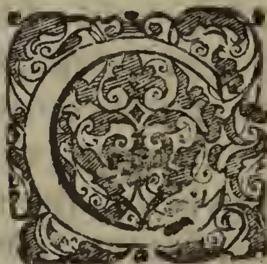
aabbcdeeeeeefiiiiillllmmmmnorrsſttuux.



VII.

C. H. Z. CONSTRUCTIO UNIVERSALIS PROBLEMATIS A CLARISSIMO VIRO JOH. BERNOULLIO PROPOSITI.

TAB. XLVI. fig. 6.



Um in *actis Lipsiensibus* Constructionem hanc me reperisse significarem, mense Octobri anno 1693, edenda tamen ea supersedi quod futurum putabam, ut vel ab Auctore ipso, vel Clarissimo Viro fratre ejus, vel alio quopiam, non multum absimi-

ſimilis brevi in lucem mitteretur; ac ſubverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam vero nuſquam adhuc comparuit, & eſt inter eas quæ dari poſſint quodammodo ſimpliciſſima, non videtur abſque ea diutius relinquendum tam eximium problema. Eſt autem hujuſmodi. In recta AB ſit datum punctum A, & oporteat invenire curvam AFC talem, ut tangens ejusquævis CD abſcindat a recta AB partem AD, quæ ad ipſam CD habeat rationem datam lineæ C ad L.

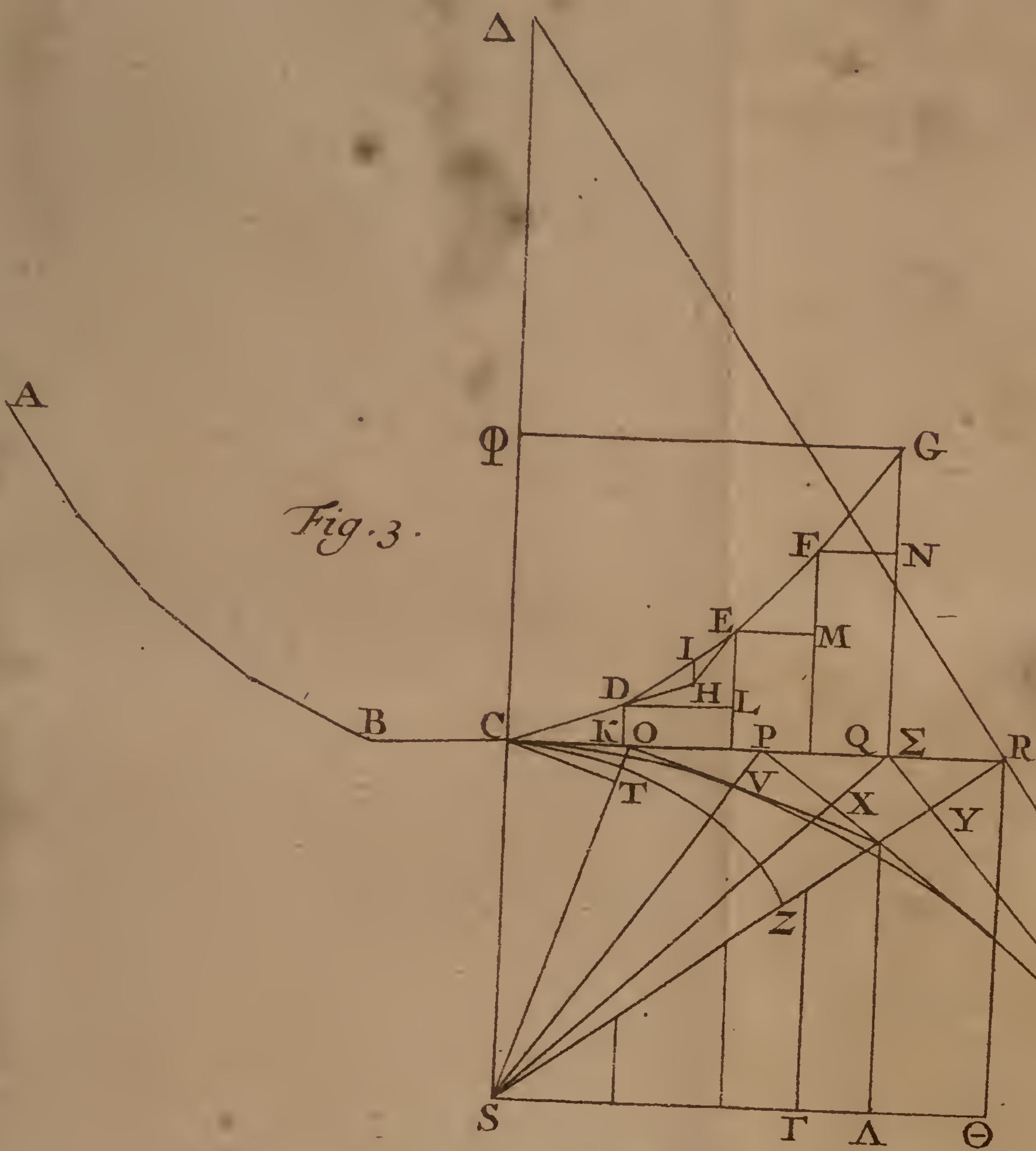
Conſtructio: ſicut C ad L, ita quælibet AE, in recta AB aſſumta ad EF ipſi perpendicularem: & per F punctum ponatur ducta Logarithmica quæcunque cujus aſymptotos ſit AB, ad quam illa accedat verſus A. Deinde ab A verſus E accepta diſtantia qualibet AD, ſit ut C ad L, ſive ut AE ad EF, ita AD ad aliam DH; qua tanquam radio, centroque D, deſcribatur Circuli circumferentia HC; ac præterea applicetur ad Logarithmicam recta IG aſymptoto perpendicularis, ipſique DH æqualis. Jam ſicut L ad duplum C, ita fiat IE ad EK, ſumendam in aſymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, & applicetur rurſus ad Logarithmicam recta KL. Utque duæ ſimul KL, EF ad earum differentiam, ita ſit DH ad DB; quæ ſumenda verſus A punctum, ſi AD major ſit quam AE; at in contrariam, ſi minor. Denique erigatur ad aſymptoton perpendicularis BC; ea ſecabit circumferentiam HC in puncto C, quod erit in curva quæſita AFC. Tangit autem hanc recta EF in F.

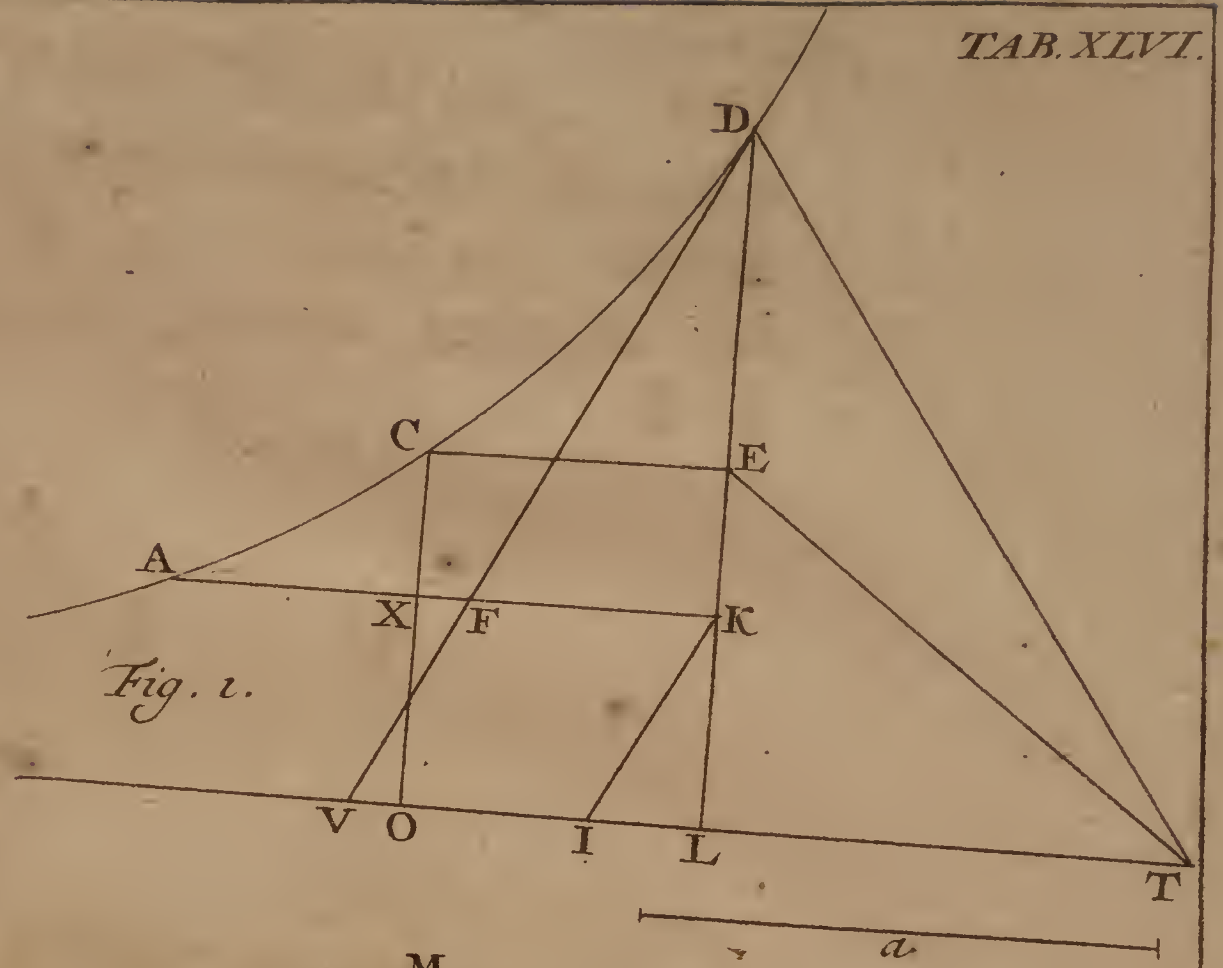
Porro animadverſione dignum eſt, non ſimplicem eſſe curvaturam lineæ hujus cum C major eſt quam L, ſed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM; quarum

hæc in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C, recta ex A educta occurrit curvæ utrique ad angulos rectos, ac proportionales sunt DA, DC, DB.

F I N I S.

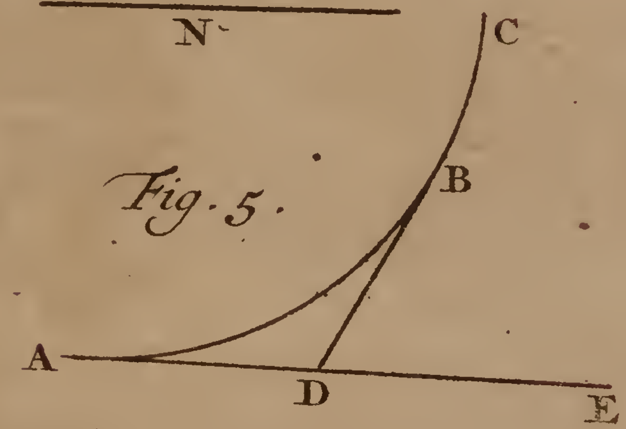


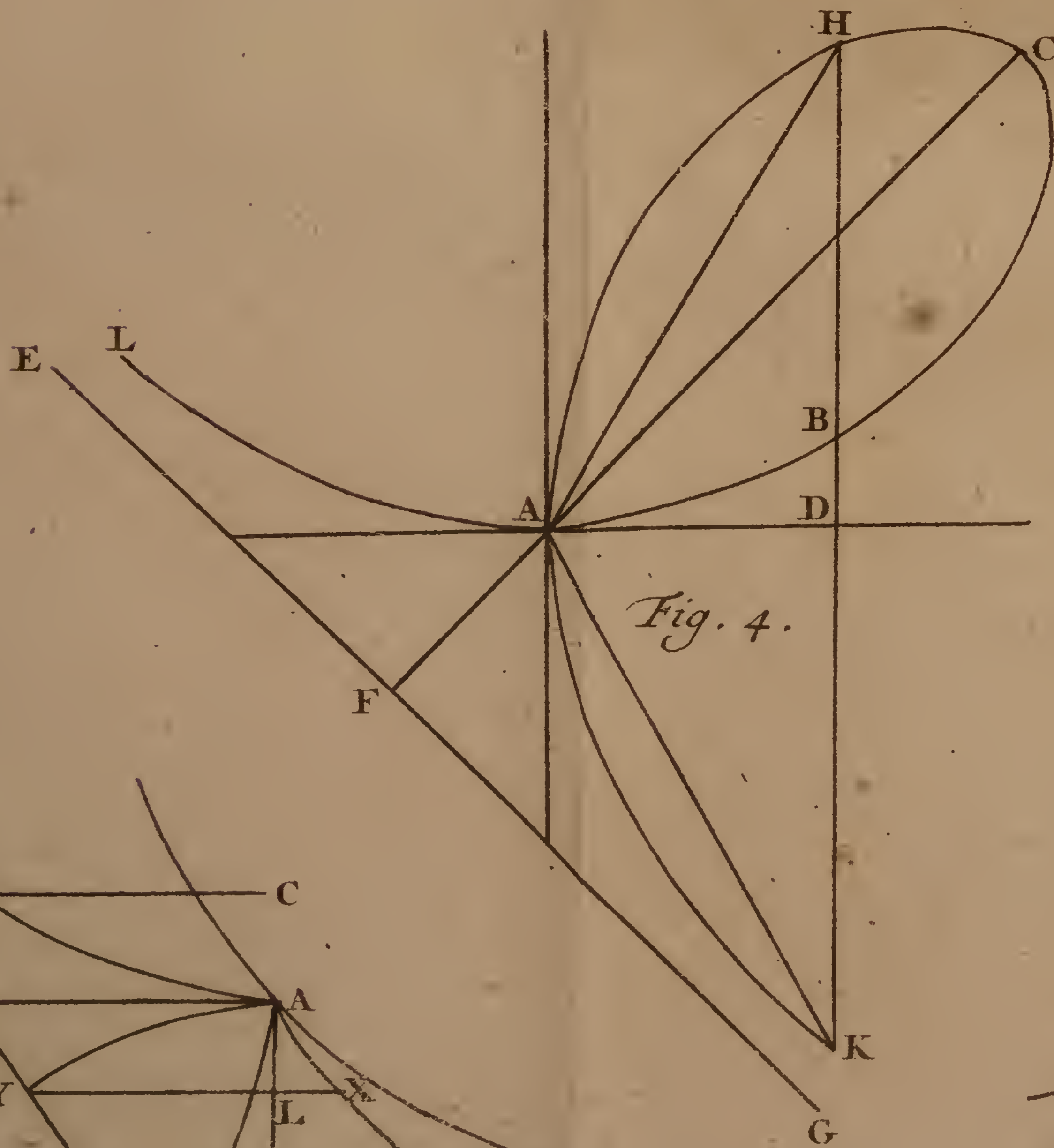

Fig. 3.
Δ
Φ
G
F
N
E
M
I
D
H
L
A
B
C
K
O
P
Q
Σ
R
T
V
X
Y
Z
S
Γ
Λ
Θ

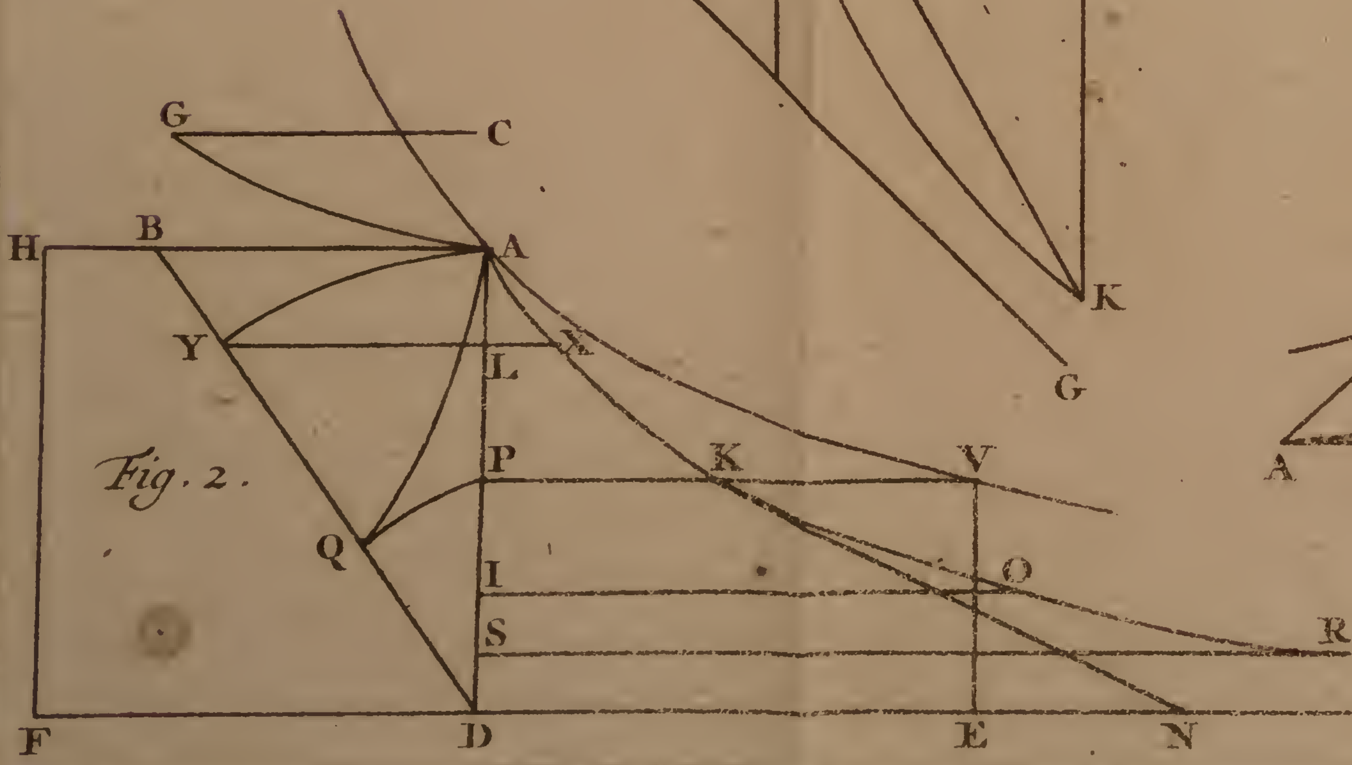

D
C
E
A
X
F
K
Fig. 1.
V
O
I
L
T
a

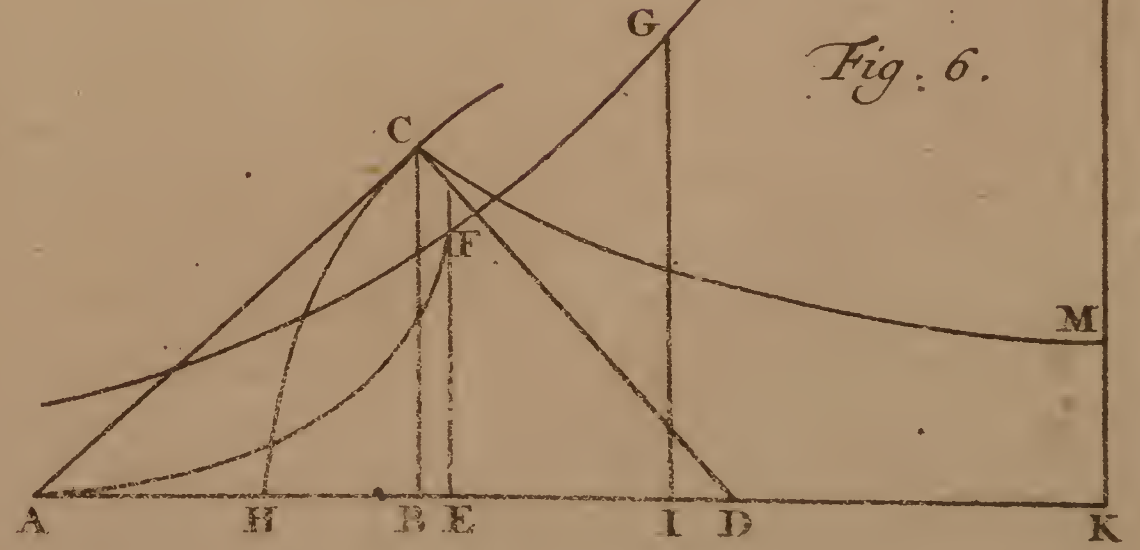
M

N


C
Fig. 5.
B
A
D
E


H
C
E
L
B
A
D
Fig. 4.
F
K
G


G
C
H
B
A
Y
L
Fig. 2.
P
K
V
Q
I
O
S
R
F
D
E
N


L
Fig. 6.
G
C
F
M
A
H
B
E
I
D
K

CHRISTIANI HUGENII

OPERA ASTRONOMICA.

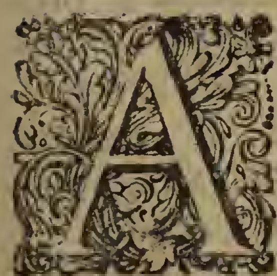
TOMUS TERTIUS.

Tomi tertii contenta.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI LUNA
OBSERVATIO NOVA.



CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI
LUNA
OBSERVATIO NOVA.



NNO millesimo sexcentesimo quinquagesimo quinto, Mensis Martii die quinto & vicesimo, Saturni planetam per tubum dioptricum aspectans, animadverti præter ansas sive brachia quæ utrimque illi cohærent, stellulam quandam ab occasu adstantem, tribus circiter scrupulis remotam, eratque disposita secundum eam quæ per utraque brachia ducta fuisset rectam. Et cum subdubitarem nunquid fortasse planeta esset ejus generis, quales circa Jovem quatuor

circumferuntur, locum Saturni ſtellulæque & poſitum utriuſque ad aliam quandam quæ tantumdem fere, ſed in contrarias partes, à Saturno diſſita erat annotavi; ex inerrantium numero hanc potiùs quam illam fore ratus, quod ab ea quam dixi recta linea deflectebat. Neque me fefellit opinio. Poſtridie enim repetita obſervatione, eam quæ ad occaſum ſpectabat ſtellam eodem ad Saturnum ſitu, eodemque quo prius intervallo ſejunctam deprehendi; alteram verò ad duplam ferè prioris diſtantiam receſſiſſe. Unde hanc quidem è fixis unam eſſe, atque à Saturno tum temporis retrogradiente longius relictam, illam autem ſimul cum eo progreſſam, comitem ipſi adeſſe intelligere mihi viſus ſum. Sequentium verò dierum obſervationibus omnis dubitatio ſublata eſt. Namque ab eo tempore per tres continuos menſes, quoties ſerenitas aëris patiebatur, novum planetam notavi, oſtendique amicis, nunc dextrum Saturno nunc ſiniſtrum; redactiſque in commentarios obſervationibus, ſexto decimo die periodum explere cognovi. Digreſſio ſumma tribus ſcrupulis paulo minor viſa eſt, ad quam ubi pervenit maximè fit conſpicuus: at cum Saturno appropinquat ante aut ponè tranſiens biduo propter ſplendorem ejus delitеſcit. Tempus verò ſexdecim dierum tam exactè circuitum planetæ metitur, ut cum annus jam & amplius à primis obſervationibus effluxerit, nihil adhuc aut abundare aut deficere deprehendatur, quoque loco prædicimus ibi ſeſe in cœlo ſiſtat. Scio ante annos complures Ant. Mariam de Rheita non unum, ſed ſenos jam Saturno errones attribuiſſe. Verum æquè circa hos, quàm circa alios illos quinque, quos præter Mediceos Jovi circumpoſuerat, deceptum fuiſſe, inde perſpicitur, quod cum meliori Teleſcopio ſeſe uti Clar. Vir Joh. Hevelius demonſtret, nullum tamen Saturno utut diligentiſſimè ſæpiſſimeque inſpecto comitatum adeſ-
ſe

se senserit. Hoc enim ultrò fatetur. Præter Rheitam verò nemo quod sciam simile quid de Saturno prodidit. Nam gemini illi quos Galilæus detexerat laterones longè aliud esse deprehensi sunt quàm prima specie videbantur. Quid tamen sint in incerto est, neque adhuc pronunciare audent Astronomi. Cæterùm mihi novum Saturniæ lunæ phænomenon ad hæc quoque viam aperuit, tandemque causam rescivimus, cur interdum inter binas veluti ansas Saturnus medius teneatur, alias recta quasi brachia protendat, tum nonnunquam omnibus amissis rotundus inveniatur, qualis anno 1642. spectatus fuit, jamque rursus trimestri spatio perstitit. Et harum quidem vicissitudinum tempora in futurum definire non erit difficile si duorum adhuc mensium observationibus attendere licuerit, quæ videndum an hypothesi nostræ consentiant. Expectamus enim ut sub finem Aprilis, si non ante, brachia Saturno renascantur, non curva illa, cujusmodi à Franc. Fontana & Hevelio depicta cernuntur, sed secundùm lineam rectam utrimque prominentia, si quis melioris notæ perspicillo intueatur. Nam vulgaria si adhibeat binos orbiculos referent, sicuti Galilæo primum sese obtulere. Nostrum, quo Saturni asseclam reperimus, quinquagies diametrum rei visæ multiplicat, duodenos pedes æquans: cui postea duplum longitudine construximus, multiplicatione centupla. Cum autem longiora etiam hisce Telescopia, utpote triginta & quadraginta pedum ab aliis fabricari dicantur, aliquid aut vitris vitii inesse, aut hæc eadem non debita proportione mutuò respondere credibile est. Neque enim alias hucusque aciem eorum effugisset novus Saturni satelles.

Observationes præterito præsentique anno collectas, quibus periodus ipsius demonstratur, tunc unà edituri sumus cum integrum Saturni systema perfecerimus. Cujus interea summam sequenti grypho consignare visum

 est,

est, ut si quis fortasse idem se invenisse existimet, spatium habeat ad expromendum, neque à nobis ille aut nos ab illo mutuati dicamur.

aaaaaaacccccdeeeeeghiiiiiiillllmmnnnnnnnnn nnooooppqrrstttttuuuuu.

Hagæ-Com. 5. Mart. 1656.



CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.
SYSTEMA SATURNIUM,
SIVE
DE CAUSIS MIRANDORUM SATURNI PHÆNOMENON;
ET
COMITE EJUS
PLANETA NOVO.

SERENISSIMO PRINCIPI

LEOPOLDO

AB HETRURIA

Christianus Hugenius S.D.

RES in cælo remotissimas, extraque hominum conspectum positas, nisi cum ab arte sibi auxilium adsciscunt, hoc opusculo persequor, Princeps Serenissime, nec dubito quin multis nimia diligentia versatus dicar in his quæ tam parum ad nos attinere arbitrantur, cum eorum quæ hîc coram & in propinquo nobis sita sunt, plurima investigatu digna supersint. Verum hi parum attendere videntur, quanto præstet cæteris omnibus sublimium rerum consideratio, quamque hoc ipsum præclarum sit, ad tam longe dissitas naturæ partes contemplationem mitti; quæ licet visu obscuræ & exiles, reipsa tamen illustres multoque maximæ existunt. Nam si quod procul absunt, ideo parum ad nos pertinere illas putemus, indigni profecto simus mente rationis participe, qua facile immensa cæli spatia transcendimus, indigni etiam egregio illo, nec unquam satis laudato, propagandæ visionis invento, quo ad astrorum regionem ipso quoque oculorum sensu pertingimus.

Cu-

Cujus quidem inventi beneficio ad longinqua Saturni regna propius nunc quam antehac quiſquam adivi, & uſque eò progreſſus ſum, ut vaſti adeo itineris, pars una centeſima tantummodo reliqua fuerit: quam ſi quo pacto ſuperare potuiſſem, quot qualiaque, dii boni, narranda haberem! Nunc autèm ea perſcribo quæ ex intervallo iſto notare oculis valui, quæque & ipſa miranda eſſe & relatu digniſſima nemo diffitebitur. Quem enim non admiratio capiet, ubi Saturnum annulo circumdatum ac velut corona redimitum viderit? atque hanc eam formam eſſe, quæ, cum perpetuo eadem ſit, diverſas tamen facies induat, & pertinaciter hactenus conjecturas Aſtronomorum fruſtretur. At neque hoc minus novum atque inopinabile omnium auribus accidiſſet, Planetam aliquem non antea viſum in cælo repertum eſſe, niſi novitatis gratiam ſtellæ Mediceæ abſtuliſſent. Verum hic noſter Saturni accola, quo diutius latuit, majorique molimine ad terram deducendus fuit, eo magis deprehenſo gaudendum eſt: quodque unus hactenus deſideratus, cumulum nunc tandem errantium ſtellarum explet, numerumque earum duodenarium; quo majorem poſthac repertum non iri, prope eſt ut confirmare audeam. Certè jam majoribus illis ac primariis, inter quos Tellus hæc reponenda eſt, æquales multitudine minores exiſtunt, & utrique illo, quem perfectum dicimus, numero continentur, ut conſilio ſummi opificis modus hic præ-

præfinitus videri possit. Cæterum multiplicem contemplandi materiam, Philosophorum ingeniis circa hæc cælestia corpora exorituram, quibus veluti nova accessione mundum auximus, non persequar. Unum hoc inanimadversum eos præterire nolim; nempe quam non leve argumentum ad astruendum pulcherrimum illum mundi universi ordinem, qui à Copernico nomen habet, Saturnius hic mundus adferat: si enim gravatè olim isti systemati assentientibus, scrupulum demere potuerunt quaternæ circa Jovem repertæ Lunæ; manifestius utique nunc eos convincet unica illa circa Saturnum oberrans, atque ob hoc ipsum quod unica est, nostratis Lunæ similitudinem magis exprimens: ut omittam nunc aliam quoque Saturnii globi cum hoc nostro cognationem, quam in simili axium utriusque inclinatione invenient Astronomiæ periti. Quæ sanè cum mecum reputo, fieri non posse videtur, ut veritatem hisce in rebus tam feliciter repertam, tamque manifestis indiciis fultam, ulla ætas obliterare valeat, quamdiu modo observationum Galilæi aut nostrarum aliqua memoria supererit. Hasce igitur ut ab oblivione vindicarem, utque deficientibus forsan olim organis quibus easdem repetere liceat, esset tamen unde aliquando extitisse probari posset, hac qualicunque scriptione publicandas censui, omnibusque impertiendas. Quod autem Celsitudini Tuæ commentarium hunc inscripserim, feci id non una ratione. Namque in

primis celebritatem claritatemque ei non exiguam ab Illustrissimo nomine tuo acquiri posse credidi; cujus cum per orbem universum, quà modo aliquis virtuti aut humanitati locus est, latè fama pervaserit, librum hunc tibi nuncupare, hoc est velut in edito cunctisque conspicuo loco eum deponere. Deinde nec ignorabam quantum momenti accessurum esset invento illi nostro, quo perplexa Saturni mysteria exponere conatus sum, si exactissimo tuo judicio illud probari contingeret: quod utinam non frustra speraverim. Sed ante omnia occasionem aliquam me invenisse gavisus sum, neque omittendam duxi, qua palam commemorarem quantum tibi, Princeps Celsissime, artes disciplinæque optimæ, & in his Mathematicæ præsertim debeant, quod contra invalescentem indies barbariem patronum iis ac defensorem te præstas, quodque familiariter eas colendo, ac velut in contubernium tuum admittendo, plurimum dignitatis ipsis concilias: quod denique præstantissimorum ex omni antiquitate Autorum scriptis in vitam revocatis easdem promoves ac locupletas. Nempe ad hæc facienda, & illustria majorum tuorum exempla & innata virtus & egregia animi tui propensio te impellunt. nos autem ad quos optimæ hujus tuæ voluntatis curæque utilitas pervenit, grato animo illa agnoscere & prædicare æquum est. Hagæ Comitis. 5. Julii. Anno 1659.

NICO-

NICOLAUS HEINSIUS, D. F.

AD AUCTOREM SYSTEMATIS.

LAudibus Hugeni pars addite magna paternis,
Quem totum Vranie vindicat una ſibi.
In cunis placiti reptare per avia cæli,
Aſtra tibi puero volvere ludus erat:
Aſtra minus patriis non trita penatibus olim;
Cognita natali non minus aſtra ſolo.
Jamque eadem populis mirantibus aſtra recludis,
Perſpicua ingenii lumine facta tui.
Qualis ſidereo radiatus in æthere Titan
Oppoſitam nocti ſpargit ubique facem.
Ardue ſtellantis ſalve metator Olympi,
Qui ſuperâ nobis das regione frui:
Per quem, diſcuſſâ dubiæ caligine mentis,
Inſerimur liquido cominus ora polo.
Devocat in terras, magico ſine carmine, Lunam
Æqua Syracoſio cui manus arte ſeni.
Ecce Jovis genitor tenebroſo carcere per te
Et fugit, & lætam rurſus oberrat humum.
Macte auſis ſtudioque; Deos qui vindice chartâ
Aſſeris: inventi qui facis aſtra tui.
Nunc ſua Saturno cum vincula demſeris ipſi;
Sæcla tuum terris aurea munus eunt.

IN IDEM SATURNI SYSTEMA.

OMnia qui magni dispexit sidera Mundi,
Viderat hæc oculo debiliore Conon.
Attigit illa Conon miris adjutus ab alis,
Attigit, & visu nobiliore, meus.
Perque vias Lunæ, per, qua Cyllenius errat,
Volvitur & Veneri Martia flamma comes;
Quique nitet famulos inter tot Jupiter ignes;
Lumina falcigeri misit ad astra Dei:
Et didicit vario quare mutabilis ore,
Ludat in obscurâ mobilitate Senex:
Quod frontem diadema premat, quo, Circulus illi
Aureus, infaustum cingat honore caput:
Quæ noctes ibi Luna regat, quæque, æmula nostræ,
Expleat amissum Cynthia luce diem.
Nec satis hæc vidisse sibi miracula, testes
Convocat, & visis quærit ubique novis.
Noluit hæc nostros fugerent arcana nepotes,
Ignaros cœli nec sinit esse sui.
Ampla satis Juveni est, ut debita gloria, merces,
Vocibus innumeris quam sua fama sonet;
Gloria sideribus quam convenit esse coævam,
Et tantum Cœlo commoriente mori.

CONST. HUGENIUS. C. F.

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.
SYSTEMA SATURNIUM.

CUM ad cælestium contemplationem tubos opticos, nobilissimum Belgicæ nostræ inventum, Galileus admovisset, celeberrimaque illa Planetarum phænomena mortalibus primus aperuisset; in his, ea quæ de Saturni stella prodidit, vel præcipuè admiratione digna fuisse videntur. Nam cætera quidem, etsi suspicienda meritò ac magni facienda, non tamen ejusmodi erant, ut, quibus de causis talia cernerentur, enixè quærendum esset. Saturni vero mutabiles figuræ novum quoddam & reconditum naturæ artificium præferebant, cujus certè rationem neque Galileo ipsi, neque tanto post tempore Astronomorum cuiquam (pace eorum dixerim) divinare contigit. Hunc primò non simplici orbe lucentem, sed veluti tergeminum conspexerat, binis stellis minoribus mediæ majori proximè utrinque adjectis. Eâque formâ triennio fere absque ulla mutatione perseverante, certò sibi persuaserat, quales Jovi quatuor, tales duos comites Saturno obtigisse, nullo tamen motu præditos, eóque simili positu semper lateribus hæsuros. Verùm sententiam mutare coactus est, solitario Saturno prodeunte, ac priore satellitio penitus destituto. Quod cum admirabundus vidisset & causam rei conjectura assequi tentaret, de reditus tempore, quo prior illa phasis restitui deberet, nonnulla vaticinatus est. Sed neque hæc ita tunc successisse quemadmodum speraverat deprehensum est, nec gemina modò aspectus diversitate Saturnum contentum esse. Etenim aliæ deinceps mirabiles ac prodigiosæ formæ appa-

ruerunt, quas primùm à Josepho Blancano & Francisco Fontana descriptas novimus; adeo quidem insolita specie, ut multis oculorum ludibria censerentur, imaginesque vitris potius quam cælo hærentes: donec pluribus eadem videntibus, haud vano indicio proditas fuisse constitit.

Igitur ipse quoque ad hæc cæli miracula conspicienda magno desiderio actus; cum non nisi vulgaria suppeterent perspicilla, quinum aut senum pedum longitudine; artem eam qua vitra in hosce usus figurantur quanta potui cum cura diligentiaque excolere aggressus sum, nec piguit ipsummet operi manus admovisse; quoad multis superatis difficultatibus (nam plures in recessu hæc ars habet quam prima fronte præferre videatur) ea denique vitra mihi effeci, per quæ ad hæc scribenda præbitum est argumentum. Continuo enim ad Saturnum telescopia dirigens, aliam ibi rerum faciem reperi, quàm plerisque antehac fuerat credita. Nam quæ vicinæ illi hærebant appendices, eas non sane geminos planetas, sed quidvis potius aliud esse, diversum vero ab his unumque numero planetam, majori intervallo à Saturno remotum, diebus sexdecim circa eum ambire apparuit; & hunc quidem omnibus antehac sæculis ignoratum. De qua nova nostra observatione tribus abhinc annis Astronomos certiores feci, prudenti consilio obsecutus viri Illustris, ingenioque juxta ac virtute conspicui, Joh. Capelani. Huic enim, uti & Gassendo aliisque, cum Lutetiæ Parisiorum agens, de Saturni comite à me viso narrassem, multas ob causas censuit, non reticendum tam gratum omnibus futurum nuncium, quoad illud quod meditabar integrum Saturni Systema perscripsissem. Itaque anno 1656 die 5 Martii, de Saturni Luna (ita enim novam stellam nec immerito appellavimus) observationem emisi *, atque unà hypothesin quæ causam reliquorum Saturni phænomenôn contineret; sed hanc confuso elementorum quibus scribebatur ordine, quo tantùm, non ignorasse nos eam illo jam tempore, testatum esset, aliique etiam ad vulganda quæ commenti essent hoc pacto invitarentur, neque sibi præreptam quererentur inventionis gloriam. Deinceps ve-

* *Vide supra pag. 523.*

vero rogatu ejusdem Viri eximii, solvi quoque hunc literarium gryphum, totamque hypothesin summatim illi exposui: unde jam ad plures forsitan nostra de Saturni phasibus sententia manaverit. Sed pleniorem utique tractationem postulat mira & insolens circa hunc planetam naturæ fabrica, neque expectare debemus ut vel à nobis relatis, vel ad explicanda phænomena adsumtis, fidem omnes habeant, nisi & hæc rationum momentis, & illa observationum testimonio adstructa viderint. Quamobrem horum utrumque nunc præstare nobis propositum est. Ac primò quæ ad comitis planetæ motum periodumque spectant accuratè, quantum fieri poterit, ex observatis definiemus, motusque ejus tabulas condemus. Deinde ipsius Saturni phases singulas suis causis assignabimus, ita ut futuras quoque inde prænoscere in promptu sit.

Sed antequam observationes exhibeamus, de telescopiis nostris quibus cælo eas deduximus, pauca referre expediet, ut sciant hinc, qui comitem Saturni, mirabilesque Planetæ ipsius figuras intueri cupiunt, qualibus ad hoc turbis vitrisque indigeant; útque suos si quos habent, possint cum nostris contendere. Primus quem adhibuimus duodenos pedes non excedebat, duobus convexis vitris instructus, quorum id quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat ad trium paulo minus pollicum, sive unciarum pedis Rhenolandici distantiam. Eo planetam novum & deteximus primùm, & per aliquot menses observavimus, nec non formam eam Saturni, quæ à nemine adhuc percepta fuerat, quámque postea describemus, licet non prorsus erroris expertem. Inde verò duplicata priori longitudine, simul duplo propiores sideribus facti sumus, multóque meliùs faciliúsque phœnomena omnia adnotavimus. Et hi quidem tubi 23 pedum, è ferri bractea constructi sunt, habentque ab altera parte vitrum insertum, cujus latitudo ad quatuor pollices, sed in quo non major pateat circulus quam diametro duorum pollicum cum triente. Ab altera parte, quæ nimirum oculo admovetur, bina sunt vitra minora, $1\frac{1}{2}$ pollicem diametro

Telescopiorum nostrorum descriptio.

æ-

æquantia, juncta invicem, quæque hoc pacto æquipollent convexo colligenti radios parallelos ad intervallum unciarum 3, aut paulo etiam angustius. Ex quo sanè majoris vitri excellentia æstimanda est, tam breve convexum perferre valentis: quoniam quanto minori de sphæra id fuerit, tanto res visæ magis amplianturr. Illud enim in Dioptricis nostris demonstratum invenietur, speciei per tubum visæ ad eam quæ nudo oculo percipitur, hanc secundum diametrum esse rationem; quæ distantiæ foci in exteriori vitro ad illam, quæ in interiori sive oculari vitro est, foci distantiam. Centuplam itaque fere rationem hanc in perspicillis nostris esse constat, cum Galileana non ultra trigecuplam processerint. Nam quantitatem incrementi eodem modo nos atque ille æstimamus; nempe ut tanto major res quæque per tubos quam nudo visu conspici dicatur, quanto majori angulo ad oculum extrema ejus deferuntur, sive quanto latior ejus imago in fundo oculi depingitur.

Quantum iis res visæ amplientur. Augmentum telescopio perceptum quomodo æstimetur.

Alia ejusdem falsa æstimatio.

Est autem & alia æstimandi augmenti ratio, sed parum ex vero, cùm absque ulla anguli consideratione apparentem perspicillo alicujus rei magnitudinem determinamus; velut cum Jovis orbem circello duorum aut trium digitorum latitudine æqualem nobis cerni putamus. At enim cum idem circulus, trium puta digitorum diametro, major minorve necessario appareat, pro diversa sui ab oculo distantia, nonne etiam adjiciendum sit, quanto ex intervallo conspectus circulus disco Jovis æqualis cernatur? Profectò nisi hoc addatur, nihil certi ea comparatione designari videtur. Et tamen ratio subest cur magis una quæpiam quam alia magnitudo imagini visæ tribuatur, & quidem à pluribus sæpe spectatoribus eadem. Verùm de his aliàs fortasse. In præsentia illud ostendisse sufficerit, fallacem omnino esse hoc modo initam æstimationem. Idque primùm indè liquet, quod Lunâ aut signo aliquo cælesti, velut Orione, prope horizontem conspecto, idem longè majus visus judicet, quam ubi altè jam ac supra verticem penè adstiterit, cum tamen hìc nihilo minori angulo illud comprehendi certum sit. In his autem quæ telescopio in-

intuemur major adhuc error contingit. nam cum, exempli gratia, vel triplo latior secundum diametrum appareat Jupiter, oculo altero per telescopium nostrum spectatus, quam Luna oculo altero vacuo, atque adeo utrâque hac specie, in unum convenire jussâ, iatè à Jove Luna contegatur; nihilominus cum seorsim Jupiter inspicitur, trium circiter digitorum latitudinem plerisque spectatoribus æquare tantummodo existimatur. quanquam aliquos repererim qui disco Lunari æqualem faciebant, atque ita tertiam partem saltem tribuebant ejus quæ reipsa apparet amplitudinis. Quamobrem de multiplicatione telescopii malè hoc modo inquiri certum est. Fiet autem rectè Galilei methodo, quam in Sidereo nuntio tradidit; vel, quia hæc in prægrandibus telescopiis difficultatem habet, inquirendo foci distantias in singulis vitris, easque inter se comparando. Qua ratione diximus centuplum fere augmentum tuborum nostrorum reperiri.

Quænam circa planetas cæteros & fixas observata.

Cæterùm libenter intellecturos credo qui hæc legent, qualia etiam eorum ope de reliquis præter Saturnum planetis fixisque stellis observaverimus: de quibus breviter ergo hæc habeant. In primis sæpe illud quæsivimus, num aliqui etiam apud Venerem, Martem aut Mercurium comites circumferrentur, ubi tamen nullos unquam reperimus. Apud Jovem autem quatuor neque amplius. Qui quidem semper ac facilè telescopio nostro patent, nisi cum disco suo aut umbra Jupiter aliquem abscondit. Inde verò quamprimum rursus emergere incipiunt fiunt conspicui, imò priusquam toti exierint, ut non semel me vidisse memini. Porrò quæ in Jove zonæ seu fasciæ quibusdam animadversæ sunt, non semper eâdem formâ præditæ; has ego & qui mecum observarunt perspicuè sæpe animadvertimus reliquo Jovis corpore magis lucidas, cum tamen alii obscuriores afferant; quibus forsitan interjectum spatium inter binas zonas lucidiores pro una obscuriore fuerit. Atque anno quidem 1656, multo majori intervallo, quam sequentibus tribus, illas à se mutuo distare comperimus, sicut in adjunctis delineationibus videre est. Qua ex instabilitate non malè forsan colligemus, ad instar

In Jovis disco zonæ candicantes.

TAB. XLVII. fig. 1. 2.

nubium nostrarum, vapores quosdam vicinum Jovi ætherem insidere, qui nunc his nunc illis climatis crebri magis confertique exoriantur.

In Marte zona obscura. TAB. XLVII. fig. 3.

In Marte quoque cingulum ejusmodi unicum anno 1656 deprehendi, latum admodum, mediámque disci partem offuscans, quemadmodum figura adjecta demonstrat. Insuper discum planetæ hujus parte aliqua deficientem vidi aliquoties, & in Venere phases omnes quales Lunæ. Verùm hæc minoribus etiam telescopiis alii notarunt.

Fixarum diametri nulla latitudine.

Fixarum autem diametros etiam maximè splendidarum nulla unquam latitudine cernere potui, sed tantum minimi puncti instar, quoties vitris usus sum fuligine leviter infectis ad auferendos radios. At ex Hevelii consilio, quod in egregio ejus extat opere Selenographico, exterius vitrum contegens, ita ut exiguum tantum foramen relinquatur, aliquam magnitudinem præ se ferre illas vidi; quam proinde non stellarum propriam esse, sed ex aliqua visus fallacia nasci arbitror. Nam nostra quidem illa methodus, trans fumum, quo lens proxima oculo tincta est, stellas inspiciendi, certa est omnique erroris suspicione carens; atque ita planetas quoque nimia luce radiantes, solemque ipsum intueri solemus. Foramine autem exiguo majorem lucis partem excludendo, non tolli penitus circumfusos sideribus radios, sed in orbem minorem satisque perfectè circinatum eos cogi opinor, qui imprudentibus pro ipsius stellæ corpore imponat.

Phænomenon in Orione novum.

Unum verò circa fixas phænomenon relatu dignum occurrit, à nemine hucusque, quod sciam, animadversum, nec quidem nisi grandibus hisce telescopiis rectè observandum. In Orionis ense tres stellæ ab Astronomis reponuntur inter se proximæ. Harum mediam Anno 1656 fortè per tubum inspicienti mihi, pro stella una duodecim (quod quidem minimè novum) sese obtulerunt; eo positu quem subjecta figura expressimus.

TAB. XLVII. fig. 4.

Ex his autem tres illæ pene inter se contiguæ, cumque his aliæ quatuor, velut trans nebulam lucebant, ita ut spa-

tium

tium circa ipsas, qua forma hîcconspicitur, multo illustrius appareret reliquo omni cælo; quod cum apprime serenum esset ac cerneretur nigerrimum, velut hiatu quodam interruptum videbatur, per quem in plagam magis lucidam esset prospectus. Idem verò in hanc usque diem nihil immutata facie sæpiùs atque eodem loco conspexi; adeo ut perpetuam illic sedem habere credibile sit hoc quidquid est portenti; cui certè simile aliud nusquam apud reliquas fixas potui animadvertere. Nam cæteræ nebulosæ olim existimatæ, atque ipsa via lactea, perspicillo inspectæ, nullas nebulas habere comperiuntur, neque aliud esse quam plurium stellarum congeries & frequentia.

In Lunæ facie autem quàm multa, diligentissimis quibusque observatoribus præterita, tubis nostris detegantur, non referam; quandoquidem schemate ad hoc descripto opus esset, eoque amplissimo. Quem laborem hactenus non suscepimus, credimusque exiturum in immensum, si montium omnium eminentias & anfractus, qua multitudine nobis videntur, depingere conemur. Itaque ad Saturni observationes pergo, de quibus sciendum est, priores omnes, usque ad eam quam 19 Febr. Anno 1656 annotavimus, tubo 12 pedum peractas esse, reliquas pedum 23. Uterque autem everso situ visibile referebant, ideoque schemata omnia, non ut primùm descripta fuerant, hîc expressimus, sed supera inferis, dextra sinistris permutavimus, ut vera pateret dispositio.

Die igitur, secundum Calendarium Gregorianum, 25 Martii, Anno 1655, circa horam 8 vespertinam, Saturnum conspexi cum brachiis utrinque secundum rectam lineam extentis; tribusque fere scrupulis ab eo distantem occasum versus stellulam quandam exiguam *a*, sic sitam, ut si per brachium utrumque rècta duceretur, ea in illam incurreret, aut certè pauxillo tantum inferior transiret. Alteraque item versus orientem stellula *b* aderat, paulo longius à Saturno remota, & brachiorum lineâ multo inferior. Et hac quidem prima vice suspicatus sum stellam *a* Saturnum comitari, quoniam

Circa Saturnum observationes. TAB. XLVII. fig. 5.

niam alias quoque vicinam illi animadverteram, similique fere positu.

TAB. XLVII. fig. 6. Porrò brachia Saturni recta quidem utrinque extensa cernebantur, sed versus extremas cuspides crassiora paulo quam qua parte Saturni disco cohærebant, qualia sequens schema exhibet.

Eâque formâ usque ad occasum Heliacum Saturnus perstitit. Cæterum cum post phasin rotundam Anni 1656 brachia denuo recepisset, eadem quidem illa forma reversa est duodecempedali tubo spectanda: sed tunc majori tubo 23 pedum adhibito alteram hanc figuram veriorem esse patuit; unde antea quoque talem extitisse credibile fiebat, quæ tamen minori telescopio perfectè conspici nequiisset. At lineam illam obscuram, brachia utraque conjungentem, ac tota tamen infra se relinquentem, etiam 12 pedum telescopio notavimus.

TAB. XLIX. fig. 6.

TAB. XLVII. fig. 7. Die sequenti, nempe 26 Martii stella *a* eodem modo eademque qua prius distantia juxta Saturnum collocata erat, *b* verò duplo quam ante remotior. Unde, quum distantia inter se stellularum *a* & *b* major esset effecta, sequebatur vel utramque vel alteram saltem erraticam esse. Et stellam quidem *a* necessario talem judicavi, quoniam Saturnum eo tempore retrogradum esse noveram; itaque oportebat cum Saturno illam in eandem plagam delatam esse, quum alioqui propinquior multo fieri debuisset. Altera vero *b*, quominus fixa censeretur nihil obstabat, imo prorsus ita existimari consentaneum erat, cum una die tantum ab illa Saturnus recessisset, quantum motus ejus postulabat. Neque verò aliter se rem habuisse sequentes observationes ostendunt.

TAB. XLVIII. fig. 1. Martii 27. stella *a* Saturno propior facta erat: *b* verò adhuc longius recesserat.

Inde nubili dies intercesserunt usque ad 3 Apr. quo die fixam *b* non amplius annotavi, sed stellula *a* migraverat ad Saturni latus Orientale, rursusque fere 3 scrupulis distabat. *fig.* 2.

Quinque diebus sequentibus, rursus ut ante impeditæ observationes.

9 Apr.

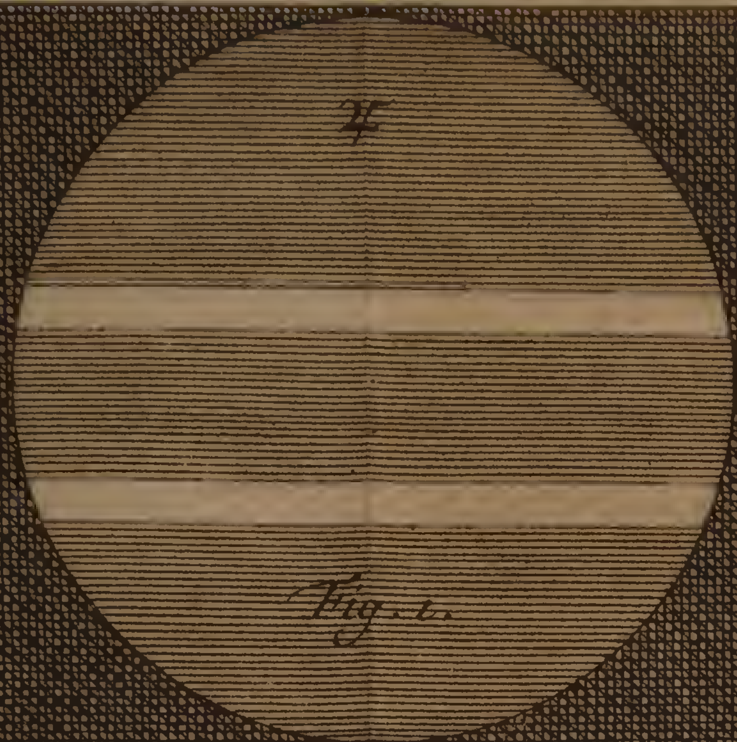






Fig. 5.

25. Mart. 1655.  ✱ a

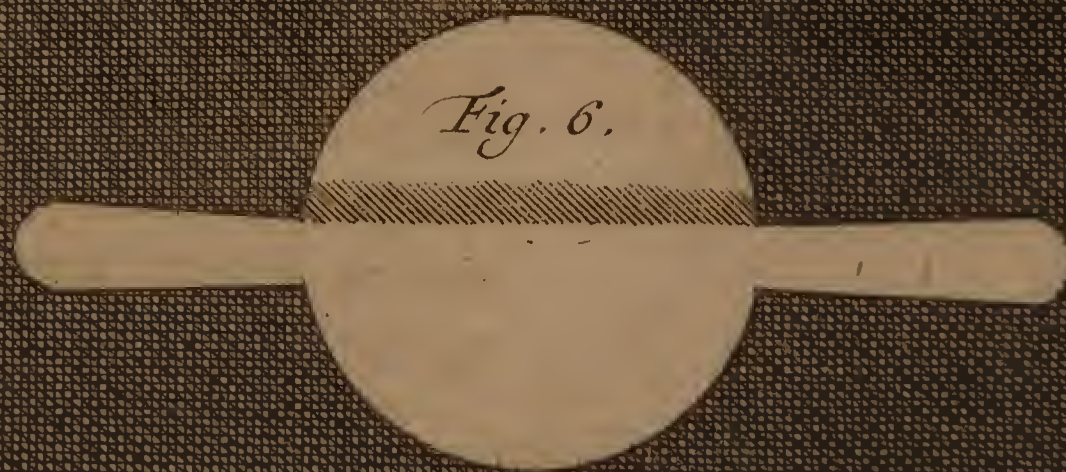
b ✱

Fig. 7.

26. Mart.  ✱ a

b ✱





9 Apr. denuo ad occidentem situs erat comes *a* sicut 27 Martii, fixaque altera *c* à parte orientali Saturno admodum propinqua animadvertebatur, uno circiter scrup. distans, lineaque brachiorum, uti præcedens, inferior. TAB. XLVIII. fig. 3.

10 Apr. Saturnus à fixa *c* longius abscesserat, & comes à Saturno. *fig.* 4.

Diebus duobus sequentibus aucta fuit continuè distantia stellæ *c*, comitis *a* eadem fere mansit. Nempe

11 Apr. hic positus fuit. *fig.* 5.

12 Apr. talis. *fig.* 6.

13 Apr. comes videri nequiit, quoniam & Saturno propior factus erat, & Luna adventabat. Fixa *c* ulterius semper recedebat, sed lentiore passu. *fig.* 7.

14 & 15 Apr. comes non apparuit ob viciniam Saturni.

16. Cælum nubilum.

17. Comes ad ortum situs erat, distans fere 3 scrup. stella vero *c* longius abierat, semper tamen oculis notata; Ac postea quidem eadem ad Saturnum reversa est, ut sequentes observationes docebunt. *fig.* 8.

18. Apr. comes situm mutasse non videbatur.

19. Apr. paulo propius ad Saturnum accesserat. *fig.* 9.

20. Apr. magis appropinquaverat. *fig.* 10.

21. Apr. Adhuc magis; cernebaturque ansarum lineâ paulo superior. *fig.* 11.

29 Apr. Occidentalior Saturno comes factus erat, ac tantundem distabat quantum 21. Apr. *fig.* 12.

Ultima Apr. Comes prope Saturnum delituit.

3 Maji, in quem diem institio Saturni incidit, comes in maxima ab eo distantia videbatur, orientem versus. *fig.* 13.

Diebus insequentibus usque ad 27 Maii, ejusmodi positus fuit qualem exhibent schemata subjecta.

6. Maji. *fig.* 14.

7. Maji. *fig* 15.

10. Maji. *fig.* 16.

11. Maji. *fig* 17.

12. Maji. *fig.* 18.

14. Maji. *fig.* 19.

15. Maji. ægre conſpectus comes propter inſtans plenilunium. *fig.* 20.

17. Maji, Comes non apparuit.

18. Maji. *fig.* 21.

19. Maji. *fig.* 22.

20. Maji. *fig.* 23.

27. Maji, Comes occidentem verſus in maxima à Saturno diſtantia reperiebatur. Saturnus autem jam rurſus ad ſtellam *c* ſuperius notatam appropinquare cœperat, remotus circiter 10 ſcrup. Ita verò nunc poſita hæc erat, ut linea brachiorum Saturni continuata ſubter eam ferretur, cum die 10 Apr. ſupra tranſiiſſet. Sed & Saturni ipſius ſemita, uti ex ſequenti obſervatione liquebit, ſtellâ *c* inferior hac vice fuit, quæ priori illius applicatione ſuperior contigerat. *fig.* 24.

Ultima Maji, Saturnus ſtellam *c* jam prætererat; comes ad occaſum ſitus erat, ſed aliquanto propior quam die 27. *fig.* 25.

13 Jun. Ultima fuit ante occaſum Heliacum obſervatio, comes in maxima diſtantia cernebatur, Saturno occidentalior. *fig.* 26.

Saturnus brachiorum expers inventus. Poſtquam ex radiis Solaribus Saturnus emerſiſſet Anno 1656. Jan. 16, hora 12, primùm à me obſervatus eſt, cum ad hoc uſque tempus peregre abfuiſſem. Inveni autem brachiis ſuis ſpoliatum penitus, & comitem ad orientem ſitum, in maxima fere diſtantia. *fig.* 27.

TAB. LI. fig. 4. Rotundum autem Saturnum, ſub finem Novembris, aliqui jam obſervaverant; eâque formâ perſtitit uſque dum rurſum radios Solis ſubiret.

TAB. XLVIII. fig. 28. 19 Febr. tubo 23 pedum primùm uſus ſum, comitemque Saturno propinquum reperi, ubi priori teleſcopio ægre potuiſſet animadverti.

16 Martii, circa octavam adhuc propiorem Saturno comitem vidi, ad orientem ſpectantem, uti obſervatione ſuperiori. *fig.* 29.

30 Martii, hora 8, pari propinquitate, ſed ad alteram partem comes ſtabat. *fig.* 30.

18 Apr.

18 Apr. ad ortum situs erat comes in maxima distantia. *fig.* 31.

17 Jun. hora $9\frac{1}{2}$ ultimò ea vice observatus fuit Saturnus, satellite versus occidentem adstante, & mediocriter remoto. *fig.* 32.

Hisce autem observationibus omnibus quandiu Saturnus rotundus apparuit, transversa illa linea, cæteris disci partibus paulo obscurior, ex æquo medium ejus discum secabat, eratque ad satellitem directa. Et hac quidem observatione 17 Junii habita, primùm animadverti motum Saturni, eum scilicet quo propter telluris vertiginem cum cælo pariter quotidie circumferri putatur, secundum eandem illam incedere lineam.

Eodem Anno 1656, Octobris die 13, manè hora 6, rursus Saturnus videri cœpit, cui jam brachia erant renata; serius quidem quàm in observatione edita prædixeram, verùm haud aliâ formâ, quæ nimirum eadem planè fuit atque anno præcedenti: licet melius nunc cujusmodi esset discerneretur, ob adhibitos tubos præstantiores. *Brachia Saturno renata.* TAB. LI. fig. 5.

Fascia autem illa seu zona obscurior, paulò inferior brachiorum linea nunc apparebat, cum anno 1655 superior fuisset. Eratque Saturni motus, quo cum cælo corripi videtur, secundum hujus zonæ ductum, ac proinde secundum rectam quoque lineam per utraque brachia protensam, ac semper postea quotquot observationibus idem inquirere libuit, eodem modo rem sese habere comperi. Comes conspici hac vice nequiit, forte an ob ingruentem Solis exortum, aëremque crassiorem prope horizontem.

Die autem 19 Oct. hora 6 mat. apparuit comes Saturno occidentalior, vix mediocri distantia absistens, quæ diebus sequentibus duobus aucta est continuè. TAB. XLVIII. fig. 33.

21 Oct. hora eâdem, erat comes in distantia maxima occidentali. *fig.* 34.

25 Oct. hora 6. mat. non apparuit comes.

9 Nov. hora $5\frac{1}{2}$ mat. propinquus Saturno comes existebat, occidentalis rursum, ac lineâ ansarum paulo superior. *fig.* 35.

26 Nov. hora $6\frac{1}{2}$ mat. comes latuit. Brachia verò paulo la-

latiora evaserant, & quà Saturno junguntur, minus intensa luce quàm versus extremas cuspides lucebant, & hac fere specie ad occasum usque Heliacum Saturnus permansit.

27 Nov. hora 6 mat. satelles ægre conspiciebatur, ad orientem situs, & brachiorum linea superior. *fig.* 36.

16 Dec. 6 mat. videbatur satelles in maxima distantia orientali. *fig.* 37.

Anno 1657, 5 Jan. hora $12\frac{1}{2}$ comes latebat.

18 Jan. hora 12, erat in mediocri distantia, orientem spectans. *fig.* 38.

A Saturno autem polum versus dimidio circiter gradu distabat fixa 3 magnitudinis, quæ est in ventre Leonis, longitudine respondens Virginis gr. 4. 5'. cum latit. borea gr. 2. 49'.

22 Martii hor. $7\frac{1}{2}$ vesp. comes in maxima distantia orientali, & ansarum linea paulo superior; linea obscura non satis erat conspicua.

Scripsit mihi Hevelius se quoque pridie hujus diei comitem Saturni observasse ad orientem situm in maxima distantia, quod satis bene cum nostra hac observatione convenit.

29 Martii hora $7\frac{1}{2}$ comes erat in mediocri distantia occidentem versus, & in eadem cum brachiis recta. *fig.* 39.

30 Martii, comes in maxima distantia occidentali. *fig.* 40.

Qua vespera Hevelius quoque ad eandem partem sibi conspectum asserit, sed difficulter, unde fortasse de distantia minus recte judicaverit, nam $1\frac{1}{2}$ scrupulo tantum absuisse à Saturno scribit.

18 Maji, comitem mecum observavit Bullialdus occidentaliorem Saturno, & in mediocri distantia. *fig.* 41.

19 Maji, proximus Saturno adstabat comes occidentem versus, vix ansarum linea superior. *fig.* 42.

Brachia Saturni in ansas mutari cœpta. TAB. XLIX. fig. 7.

Anno eodem 1657. 17 Dec. hora $5\frac{1}{2}$ manè, quo die primùm post ortum Heliacum Saturnum observavi, comes mediocriter distabat orientem versus, eratque ansarum lineâ superior. *fig.* 43. Brachia verò prope Saturni discum adaperta ac bifida inveniebam, qualia ante non videram, lineâ quoque obscurâ versus inferiora ulterius promotâ.

Et

Et hac quidem figurâ permansit, donec rursus radiis solis occultaretur.

18 Dec. comes erat in maxima distantia, orientem spectans, & in ipsa ansarum linea. *Tab.* XLVIII. *fig.* 44.

22 Dec. h. 6½ mat. comes non apparuit.

27 Dec. h. 6½ mat. comes occidentem versus in maxima fere distantia situs erat, & ansarum linea paulo altior. *fig.* 45.

Anno 1658. 24 Febr. h. 10, comes videri nequiit.

1 Mart. h. 10, idem comitis situs erat qui 27 Dec.

11 Martii, h. 10, comes difficile conspiciebatur, quippe propinquus admodum Saturno. Orientem spectabat, eratque ansarum linea aliquanto inferior, & quasi sub Saturno transiturus. *fig.* 46.

16 Mart. h. 10 quantum poterat à Saturno comes recesserat occidentem versus, vixque erat ansarum linea superior. *fig.* 47.

23 Martii, in contrariam partem pene tantundem distabat, lineâ ansarum rursus paulo superior. *fig.* 48.

3 Apr. paulo remotior erat à Saturno comes, quam 11 Martii, & occiduum latus tenebat, lineaque ansarum sublimior cernebatur. *fig.* 49.

Anno eodem 1658. 10 Nov. hor. 6½ mat. postquam Heliace ortus esset Saturnus, jam latius aperiri ansæ videbantur, quanquam ob humilitatem sideris, surgentesque vapores, & auroræ claritatem non admodum distincte poterant discerni: comes occidentem versus adstabat, remotus ut cum maximè, ansarum linea nonnihil tamen superior. *fig.* 50. *Ansæ Saturni amplius patefactæ.*

16 Jan. anno 1659. hora 5½ mane, comes ad occidentem denuo situs erat, non longe à Saturno distans, linea autem ansarum integra fere Saturni diametro superior. *fig.* 51.

12 Febr. 6 mat. tantundem infra lineam ansarum descenderat, occidentalis rursus. *fig.* 52.

Forma verò ansarum distincte hac vice percipi potuit, quam figura hæc exhibet; atque ea ad ultimam usque harum observationum talis extitit. TAB. LI. fig. 6.

24 Febr. hora dimidia post mediam noctem, comes erat in mediocri distantia, orientem versus, rectâ ansarum pau-

lo inferior. *Tab.* XLVIII. *fig.* 53.

25 Febr. horâ eadem orientalis denuo comes cernebatur, una Saturni diametro ab ipſo remotus. *fig.* 54.

Comes infra Saturnum tranſire viſus. 14 Martii, hora 12, comes recta fere infra Saturnum obſervatus, unius circiter diametri longitudine diſtans; paulum tamen verſus occidentem declinabat. *fig.* 55.

16 Martii, hora 11, ad latus occiduum poſitus erat, fere in maxima diſtantia, inferiorque paulo eâ quæ per anſas ducitur. *fig.* 56.

Idem ſupra Saturnum tranſiens. 21 Martii, hora 11, rurſus ad eandem partem conſiſtebat comes, motu latitudinis integra Saturni diametro ſupra anſarum lineam elatus, longitudinis motu tantum dimidia diametro diſtans. *fig.* 57.

22 Martii, horæ quadrante ante undecimam; rurſus integra diametro ſuperior erat rectâ anſarum, ac fere ſupra orientalis anſæ extremam cuſpidem collocatus. *fig.* 58.

26 Martii, hora $10\frac{1}{2}$ comes in maxima diſtantia videbatur; quam accuratè hac vice dimenſus, inveni inter comitem centrumque Saturni intervallum trium ſcrupulorum primorum, 16 ſecundorum. *fig.* 59.

Hucuſque obſervationes, & plures quidem quam neceſſe fuerat, recenſui; rem gratam tamen iis me facturum ratus, qui triennio iſto ſimul forſitan mecum novo Planetæ obſervando vacaverint; quibus procul dubio jucundum erit conſenſum mutuum ſuarum cum noſtris obſervationibus deprehendere. Jam enim & Hevelius Gedani eum conſpicere ante biennium cœpit, ut ſupra quoque retuli, & in Anglia D. Paulus Nelius eques cum Clariſſimo Wrennio ipſo jam Anno 1655, ſibi animadverſum quandoque aſſerunt, nec tamen Planetam eſſe cognoviſſe donec à nobis eſſent admoniti. Nunc quo pacto periodum ejus inveſtigaverim, quæque porro ad illam pertinent expediam.

Lunæ Saturniæ periodus. Penſitatis priorum aliquot menſium obſervationibus, cum circiter 16 dierum ſpatio Saturnum à Luna ſua ambiri comperiſſem; nam quo loco animadverſa fuerat 25 Mart. 1655, ad eum ſexto decimo inde die rediiſſe viſa eſt, 10 nimirum

Apr.

Apr. Itemque eodem anno die 3 & 19 Apr. idem ſitus fuerat deprehenſus; nec non 13 & 29 ejuſdem menſis. Hiſce igitur animadverſis, circulum deſcripſi orbitam comitis referentem, in cujus centro Saturnus eſſet, atque in partes 16 diſtribui, uti Schema ſubjectum exhibet. In eo comitem, ſecundum ſignorum ordinem, circumduxi; nulla tum quidem obſervatione ut ita ſtatuerem cogente, ſed quod in eam partem Luna quoque noſtra & Jovis comites deferrentur. Poſtmodum autem ſtabilita hypotheſi, qua phænomena anſarum explicantur, patuit recte ita hunc motum me conſtituiſſe. Porro in hoc circulo locum comitis quærendo quo in prima noſtra obſervatione ſtetiſſet, ſæpiuſque eundem retractando, ut obſervationibus per id tempus habitis congruerent etiam reliqua loca in circulo comiti aſſignata; ita demum commodiſſimè repreſentari omnia viſum eſt, ſi prima obſervatione, nempe 25 Mart. 1655, ad numerum 12 comes reponeretur, 3 partibus cum dimidia, qualium 16 circumferentia continet à loco perigæo B remotus; nam diametrum AB ad viſum noſtrum vergere ponimus, & utraſque hujus epicyclii apſides determinare. Fuerit igitur 26 Mart. ad num. 13, Saturni comes: & 27 Mart. ad num. 14, & 3 Apr. ad num. 5, atque ita deinceps iis orbitæ locis quæ obſervatis primi anni exactè ſatis conveniunt, quanquam aliquid ſubinde addendum auferendumve 16 dierum periodo exiſtimaverim. Cum autem ſcirem etiam orbitæ terreſtris, qua nos circa Solem ferimur, ipſiuſque Saturni motus rationem habendam eſſe, ſi accuratè comitis periodum definire vellem, proinde ſequenti methodo eam deinceps inveſtigavi. TAB. LI, fig. 3.

Bina tempora quæſivi quibus in apogæo vel perigæo comes verſatus eſſet; quorum alterum inveni 14 Martii, anno 1659, veſperi circa horam octavam. Quia enim hora noctis 12 tantum prætergreſſus erat locum perigæi quantum ex obſervatione illo tempore habita apparet, oportet eum circiter octavam in perigæo ipſo fuiſſe. Alterum ſimilem comitis ſitum colligo contigiſſe die 23 Martii, anno 1656, hora itidem octava poſt meridiem. Etenim quia die 16 & 30 ejuſ- *Eadem periodus accuratius ſupputata.*

dem menſis hora 8 p. m. æquali ſpatio à Saturno remotus apparuit, quibus diebus circa partem ſuæ orbitæ ſuperiorem verſatum conſtat, ſequitur 16 Martii medium locum eum tenuiſſe inter puncta 1 & 2 circuli modò deſcripti; 30 verò Martii medium fuiſſe inter puncta 15 & 16; quoniam 14 dierum intervallum eſt. Ac proinde neceſſario perigæus fuit die 23 Mart. poſt meridiem circa horam octavam.

TAB. XLIX. fig. 1. Cognitis hiſce temporibus deſcribo circulum ABC, qui Saturni orbitam deſignet, itemque GF orbitam Telluris, in cujus centro Sol. Saturni locum ſumo ad diem 23 Martii 1656, hora 8 poſt mer. fuiſſe in A; quo tanquam centro deſcribo comitis orbitam DEL; Tellurem vero eo tempore fuiſſe in G. Locus itaque comitis erat in D, ubi recta GA circulum comitis interſecat, ſiquidem perigæum fuiſſe conſtat. Rurſus poſito ad diem 14 Martii 1659 hora 8. poſt mer. loco Saturni in B, tellure vero in F; neceſſe eſt comitem fuiſſe in H, ubi recta FB ſecat circulum ejus NHK. Eſt autem temporis intervallum inter 23 Martii 1656, & 14 Martii 1659, dierum 1086, quibus Saturnus ab A progreſſus eſt ad B: Comitem vero ſpatio dierum 16 circuitum unum abſolvere ſcio, atque inſuper exiguum quid, quod in annis tribus circuitum integrum conficere nequeat. Quum igitur diviſis diebus 1086 per 16 fiant 67, atque aliquot dies abundent, apparet 68 circuitus integros noſtri reſpectu comitem peregiſſe, quia in H rurſus perigæus fuit. Sit BK parallela AG. Si igitur 14 Mart. 1659, comes non in H ſed in K poſitus fuiſſet; ſequeretur eum hiſce 1086 diebus ſexagies octies orbitam ſuam decurriſſe fixarum reſpectu, hoc eſt, totidem menſes periodicos, ſive ſidereos potius, Saturni incolis præbuiſſe. Nam quando rectæ AD, BK ſecundum quas ex Saturno comes proſpicitur, inter ſe parallelæ ſunt, eundem inter fixas locum illis obtinere cernitur. Nunc verò inſuper arcum KH emenſus eſt, qui totidem eſt graduum quot apparenti motu Saturnus inter prædicta duo tempora tranſivit; quoniam angulus HBK æqualis eſt ei quem conſtituunt rectæ FB, GA, motus apparentis indices;

TAB. XLVIII.

Fig. 1. a b 27. Mart. 1655.

Fig. 2. a 3. Apr.

Fig. 3. a c 9. Apr.

Fig. 4. a c 10. Apr.

Fig. 5. a c 11. Apr.

Fig. 6. a c 12. Apr.

Fig. 7. c 13. Apr.

Fig. 8. a 17. Apr.

Fig. 9. 19. Apr.

Fig. 10. 20. Apr.

Fig. 11. 21. Apr.

Fig. 12. 29. Apr.

Fig. 13. 3. Maii.

Fig. 14. 6. Maii.

Fig. 15. 7. Maii.

Fig. 16. 10. Maii.

Fig. 17. 11. Maii.

Fig. 18. 12. Maii.

Fig. 19. 14. Maii.

Fig. 20. 15. Maii.

Fig. 21. 18. Maii.

Fig. 22. 19. Maii.

Fig. 23. 20. Maii.

Fig. 24. c a 27. Maii.

Fig. 25. c a 31. Maii.

Fig. 26. 13. Iun.

Fig. 27. 16. Ian. 1656.

Fig. 28. 19. Febr.

Fig. 29. 16. Mart.

Fig. 30. 30. Mart.

Fig. 31. 18. Apr.

Fig. 32. 17. Iun.

Fig. 33. 19. Oct.

Fig. 34. 21. Oct.

Fig. 35. 9. Nov.

Fig. 36. 27. Nov.

Fig. 37. 16. Dec.

Fig. 38. 18. Ian. 1657.

Fig. 39. 29. Mart.

Fig. 40. 30. Mart.

Fig. 41. 18. Maii.

Fig. 42. 19. Maii.

Fig. 43. 17. Dec.

Fig. 44. 18. Dec.

Fig. 45. 27. Dec.

Fig. 46. 11. Mart. 1658.

Fig. 47. 16. Mart.

Fig. 48. 23. Mart.

Fig. 49. 3. Apr.

Fig. 50. 10. Nov.

Fig. 51. 16. Ian. 1659.

Fig. 52. 12. Febr.

Fig. 53. 24. Febr.

Fig. 54. 25. Febr.

Fig. 55. 14. Mart.

Fig. 56. 16. Mart.

Fig. 57. 21. Mart.

Fig. 58. 22. Mart.

Fig. 59. 26. Mart.

ces; isque motus ex Ephemeridibus invenitur fuisse gr. 40, 48′. Sic itaque colligo; si diebus 1086 absolvit periodos 68, atque insuper gr. 40, 48′, hoc est gr. 24520, 48′, quantum ergo die una? Prodeuntque gr. 22, 34′, 44″, qui motus comitis diurnus est respectu fixarum. Ad mensis siderei longitudinem inveniendam ita calculum instituo; si gr. 24520, 48′ percurrit diebus 1086, quot dies impendet gradibus 360? fiunt dies 15, horæ 22, scr. 39. spatium quo ad eandem fixam Saturni incolis Luna sua revertitur.

Deinde medium motum diurnum à sole (qui minor est motu quo respectu fixarum comes progreditur, ut in nostra quoque Luna evenire novimus) ita reperio; Saturni motum medium diurnum qui 2 est minutorum, aufero ab invento motu diurno respectu fixarum gr. 22, 34′, 44″. unde supersunt gr. 22, 32′, 44″, diurnus motus à Sole. Atque hinc facile quoque mensis Synodici Saturnicolarum media longitudo computatur. Nempe si gr. 22, 32′, 44″, uno die percurruntur, quot igitur diebus gr. 360? Fiuntque dies 15, horæ 23, scr. 13. Reliquis duntaxat 47 scrupulis ad dies 16. Atque illud etiam medium tempus est quo nostri respectu ad apogæum suum Saturni comes revertitur, sive intra quod cum Saturno bis conjungitur.

Mensis Saturnicolarum vera longitudo.

Cæterum quia ex motu comitis illud præcipue investigari meretur, quo pacto ad datum quodvis tempus situs ejus apud Saturnum exhiberi possit; ostendemus nunc brevissimam ad hoc calculi rationem, sequentium tabularum ope absolvendam; in quibus motum comitis æqualem qualis ex Saturno fixarum respectu appareret, proponimus. Hunc autem diurnum adsumsimus gr. 22, 34′, 44″, sicut modo inventus fuit. Etsi enim expertus sum, iterato eodem examine adhibitisque aliis duobus temporibus quibus comes fuit apogæus aut perigæus, aliquot secundis scrupulis majorem interdum minoremve eundem motum reperiri, istum tamen medium quodammodo inter alios retineri posse ratus sum, post plures abhinc elapsos annos facile emendandum. Nam & inæqualitas puto aliqua, & eccentricitas, quemadmodum in Luna nostra, ita circa hanc quoque, diligenti observatione olim deprehendi poterit.

Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita sua respectu fixarum.

In Annis Julianis.

	Gr.	Min.
1	321	18
2	282	35
3	243	53
4	227	45
5	189	3
6	150	21
7	111	38
8	95	31
9	56	48
10	18	6
11	339	24
12	323	16
13	284	34
14	245	51
15	207	9
16	191	2
17	152	19
18	113	37
19	74	55
20	58	47

In Mensibus anni Juliani ineuntibus.

Janu.	0	0
Febr.	339	57
Mart.	252	9
April	232	6
Maji	189	28
Junii	169	25
Julii	126	47
Aug.	106	43
Sept.	86	40
Octo.	44	2
Nov.	23	59
Dec.	341	21

Si fuerit datus annus intercalaris, post Februarium unus dies, eoque & unius diei motus addendus est.

In Diebus.

	Gr.	Min.
1	22	35
2	45	9
3	67	44
4	90	19
5	112	54
6	135	28
7	158	3
8	180	38
9	203	13
10	225	47
11	248	22
12	270	57
13	293	32
14	316	6
15	338	41
16	1	16
17	23	50
18	46	25
19	69	0
20	91	35
21	114	9
22	136	4
23	159	19
24	181	54
25	204	28
26	227	3
27	249	38
28	272	13
29	294	47
30	317	22

In Horis.

	Gr.	Mi.
1	0	56
2	1	53
3	2	49
4	3	46
5	4	42
6	5	39
7	6	35
8	7	32
9	8	28
10	9	24
11	10	21
12	11	17
13	12	14
14	13	10
15	14	7
16	15	3
17	16	0
18	16	56
19	17	52
20	18	49
21	19	45
22	20	42
23	21	38
24	22	35

Primo Jan. anno 1653, meridie, distantia Lunæ Saturniæ ab apogæo erat gr. 274. 21'. Saturni locus apparens, eodem tempore in ♌ gr. 11. 41.

Harum

Harum tabularum auxilio primùm Epocham, quæ præcederet omnes obſervationes noſtras, conſtitui diem 1 Jan. meridie, anno 1653. Nempe ex eo, quod 14 Martii, 1659, hora 8 pom. in perigæo Saturni Luna verſaretur, collegi retrorſum numerando, ad prædictam diem 1 Jan. 1653, abſuiſſe illam ab apogæi loco gr. 274, 21′. Jam vero ut ad quodlibet datum tempus, epocha poſterius, inveniatur ejus ab apogæo diſtantia, (namque hinc facile deinde perſpicere eſt quam propinqua Saturno apparitura ſit) *addendus eſt ad motum Epochæ, motus comitis uſque ad tempus datum, ex tabulis collectus; hinc auferendus Saturni motus apparens per idem temporis intervallum, qui ex Ephemeridibus cognoſcitur; reliquum erit diſtantia comitis ab apogæo quæſita.* Ut ſi datum fuerit tempus dies 25 Martii, anno 1655, hora 8 pom. quæ prima noſtra fuit obſervatio: Motus Epochæ, ſive diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo tempore Epochæ, quæ eſt gr. 274, 21′, addita ad motum ejuſdem Lunæ inde ab Epocha ad tempus datum, colligit gr. 278, 31′; Hinc ablato Saturni motu apparente per idem tempus, qui invenitur gr. 22, 58′, relinquuntur gr. 255, 33′, diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo, quæ invenienda erat. Unde apparet in circulo (Tab. LI. fig. 3.), ubi A apogæi locum referebat, fere ad numerum 12 illam conſtitiſſe, eoque in maxima propemodum diſtantia viſam, uti revera contigit. Calculum autem ſubjicimus qui ſic ordinatur.

Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur.

Gra-

	Gra.	Mi.
Motus Epochæ,	274	21
Anni 2	282	35
Martii 1	252	9
Dies 24	181	54
Horæ 8	7	32
Summa	278	31
Motus Saturni apparens	22	58
Reliquum	255	33

distantia Lunæ Saturni ab apogæo.

	G.	M.	
♄ Locus app. 25 Mart. 1655,	4	39	♍
♄ Locus app. tempore Epochæ,	11	41	♌
Restat ♄ motus apparens,	22	58	

Ejus calculi comprobatio. TAB. XLIX. *fig.* 1.

Ut verò constet methodi ratio, intelligatur in superiori diagrammate, Saturnus die 1 Jan. 1653 positus fuisse in A, terra in G, Luna Saturni in E, gradibus 274, 21′ ab apogæo L. Rursumque 25 Martii 1655, Saturnus ponatur in B, terra in F, Luna Saturni in M: sitque BN parallela AL. Quoniam igitur Lunæ motus periodicus inter bina illa tempora, additus motui Epochæ, hoc est, arcui LDE graduum 274, 21′, efficit gr. 278, 31′; erit idcirco arcus NKM hoc graduum numero. Distantia autem Lunæ Saturniæ ab apogæo est arcus OKM, qui ut cognoscatur, auferendus est ab arcu NKM arcus NO. Ergo cum arcus NO totidem sit graduum atque angulus quem constituunt rectæ OF, LG; hujus autem quantitas definiatur apparenti Saturni motu inter duo prædicta tempora; apparet nos rectè ab inventis gr. 278, 31′, hoc est ab arcu NKM, subtraxisse Saturni motum apparentem gr. 22, 58′ (quippe æqualem arcui NO) ad consequendum arcum OKM, gr. 255, 33′, distantiam nempe Lunæ Saturni ab apogæo.

Nondum hic locus est explicandi alium quendam hujus lunulæ motum in latitudinem, observationibus aliquot præcedentibus jam sese prodere incipientem; quo nempe ab linea recta per ansarum extrema transeunte plerumque exorbitat, apparetque circa Saturnum ellipsin percurerre, interdum quidem satis latam, alias verò angustiorem, & rotun-

do

do Saturno lucente, in rectam lineam abeuntem. Etsi enim, ad verum lunulæ situm respectu Saturni determinandum, hujus quoque motus ratio est habenda, cum tamen causæ ejus cum cæterorum phænomenôn causis prorsus conjunctæ sint, simul cum illis atque una opera exponendum censeo.

Illam igitur Systematis hujus partem alteram nunc aggredior, in qua formæ Saturni instabilis atque à se ipsa discrepantis ratio reddenda, tum qua periodo singulæ mutationes contingant dicendum est. Harum aliquas quæ nobis sese obtulere supra exhibui; sed eæ partem tantummodo periodi complectuntur. Ideoque ut omnem phænomenôn diversitatem ab iis quas dicemus causis pendere constet, aliorum quoque temporum observationes examinare necesse erit, quas à 40 atque amplius annis complures scriptis prodiderunt. At verò cum Saturni figuras omnes quas nobis delinearunt oculis lustro, eas multiplices adeo ac prodigiosas invenio, ut si qua hypothesis comminiscenda foret quâ cunctis fieret satis, nemo non, ut opinor, in ea excogitanda operam lusurus sit: cum nulla tam crebræ atque enormis transformationis causa esse possit, nisi ponatur ipsam Saturnii corporis molem identidem aliam atque aliam faciem induere, quod ab omni verisimilitudine est alienum. Quamobrem delectus adhibendus est observatis illorum, & inquirendum quænam ex iis fidem mereantur, quæve contra ut suspecta rejicienda sint. Quo in examine illud concedi nobis postulamus, ut quoniam Saturni comitem primi perspicillis nostris deteximus, ac quoties libet clarè intuemur, præferantur propterea nostra hæc illis quibus alii ad stellam eandem nequaquam pertingere potuere, licet quotidie Saturno observando intenti: eoque nostræ etiam circa formam planetæ observationes veriores habeantur, quoties eodem tempore nobis atque illis diversæ phases animadversæ fuerint. Adjuncta itaque tabella omnes eas exhibet quas ex variis autoribus descripsimus. TAB. LII.

Hæ singulæ examinantur. Ac prima quidem harum formarum est quam Galilæus ad-

TAB. LII. fig. 1. notavit anno 1610, in qua triceps Saturnus ſpectatur, minoribus duobus orbiculis majori utrinque adjacentibus. Hanc alii quoque permulti viderunt, aut certè ſe vidiſſe crediderunt. Nam ſi grandiores tubos adhibuiſſent atque optimis vitris inſtructos, haud dubiè pro triplici hac globulorum facie eadem ſeſe illis obtuliſſet quam nobis diximus anno 1655, ac rurſus anno inſequenti, die 13 Oct. viſam. Hoc enim inde colligimus quod dum illis bini ad latera globuli apparent, nobis porrecta in longitudinem brachia tubi noſtri referunt; uti contigit eo ipſo anno 1655, menſe Aprili ac Majo, quo tempore triſphærica illa figura Ricciolo Helvelioque obſervata fuit. Etenim quo certius conſtet ob perſpicillorum parvitatem talem hanc cerni, experimur nobis quoque, quoties breviori perſpicillo, quinûm puta aut ſenûm pedum, Saturnum aſpicimus, binos globulos dictorum loco brachiorum apparere; etiam illâ anni 1658 jam exiſtente phaſi.

Quænam autem fallacis imaginis cauſa ſit facile perſpicitur. Quippe enim quum circa extremas cuſpides ampliorem lucem brachia hæc ſive alæ emittant, quam qua parte medio Saturni diſco adhærent, ubi ſemper umbræ aliquid intercedit, non modo cum manifeſto jam bifida evaſerunt, velut anno 1658, ſed antea quoque ut anno 1657; non mirum eſt lucem illam intenſiorem, debiliori interjecta, penitus à medio orbe ſeparatam videri. Neque item rotundam ex oblonga fieri mirandum eſt, cum idem accidat omni figuræ eminus, nec ſatis diſtinctè ob exilitatem, perceptæ, atque eo magis quo fuerit lucidior. Itaque plane conſtat teleſcopiorum culpa phaſin hanc vitiatam eſſe, licet obſervatores bona fide eam tradiderint.

TAB. LII. fig. 2. Quæ ſequitur hanc nihilo melius ſe habet, à Scheinero obſervata anno 1614. Atque equidem dubito, perfectioribuſne an deterioribus perſpicillis, quam qui præcedentem dederunt, hanc deprehenderit. Quoniam hactenus quidem ad veram magis accedit, quod affixas Saturno auriculas exhibet; at contra in eo aberrat, quod plus juſto earum contra-

trahat longitudinem. Hæc autem phaſis tum ſibi ipſi tum ſuperiori fidem derogat, alterutram certe haud veram fuiſſe arguit; quoniam eodem tempore, anno nimirum 1614, altera à Scheinero, altera à Galilæo aliisque obſervata perhibetur. Ut proinde dubitandum non ſit, quin & hæc ſimilis extiterit ei quam nos anno 1657 vel 1658 in commentaria retulimus. Neque aliud de tertia hujus tabellæ exiſtimandum eſt, quæ Ricciolo ſecunda ponitur, quamque anno 1640 & 1643 obſervatam ſcribit. Veritati tamen propior hæc videri poteſt, quod pro orbiculis oblongas atque olivæ ſimiles figuras habeat. TAB. XLII. fig. 3.

Quarta eſt quam in locum triſphæricæ formæ Hevelius adſumſit in libro *de Saturni nativa facie;* ubi ſecundum leges hypotheſeos ſuæ aſſerit talem quandoque cerni debere, quæ tamen ex viſus hallucinatione in triſphæricam degeneret. Quanquam mihi ne iſtiuſmodi quidem forma ſatis convenire hypotheſi illius videatur, ut poſtea oſtendemus. fig. 4.

Ejuſdem Hevelii etiam quinta eſt, cui ſimilem Gaſſendus edidit. Et hæc quidem ſatis prope cum noſtra illa anni 1658 conſentit, niſi quod partes brachiorum tenuiores, qua medio diſco adnectuntur utriuſque tubi non ſint aſſecuti. fig. 5.

Idemque in 6 & 7 contigit, quæ ambæ ab Hevelio quoque traduntur, ſimiles iis quas circa eadem tempora Ricciolus obſervavit, nimirum anno 1648, 1649 & 1650, quæ hic octavo nonoque loco exhibentur. Neque alia re differunt, quàm quod medius orbis Hevelio nonnihil oblongus apparuit, cum Ricciolo rotundus fuerit: quodque hic connexas anſas cum inter ſe tum Saturno ipſi ſpectaverit, quæ Hevelio pauxillo à contactu abeſſe viſæ ſint. Verum ipſe Hevelius cauſam cur ſeparatæ videantur viſus imbecillitati adſcribit, cum alioqui reipſa cohærere eas Saturno ſtatuat. fig. 6. 7. fig. 8. 9.

Tales autem & Euſtachius de Divinis notavit anno 1646, 1647 & 1648, à quo editum ſchema ad num. 10 hic exhibuimus. Iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex habeatur, credibile eſt omnium emendatiſſimè nativam Saturni faciem nobis deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas quæ in fig. 10.

ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.

TAB. LII. fig. 11. Porro ab hiſce figuris non multum recedit ea quæ à Fr. Fontana vulgata fuit, undecima tabellæ noſtræ. Quam quidem & Ricciolus anno 1646 ſibi viſam ſcribit. Sed minus bonis teleſcopiis tunc uſum crediderim, quam quibus modo dictas octavam nonamque detexit. Siquidem eodem anno 1646 ſeptimam formam ſe vidiſſe teſtatur Hevelius, cui potius hic ſtandum eſt. Nam Fontanæ obſervationes quominus in dubium vocare verear facit, quod etiam olim magis monſtroſas formas Martis publicavit, veluti trilateræ cujuſdam rupis, ac rurſus aliter cum nigra in medio orbe macula; quæ nos cum aliis multis fabuloſa comperimus. Hæc tamen, quam in Saturno prodidit formæ diverſitatem, neque magna eſt, ut dixi, neque miranda.

fig. 12. 13. Plus negotii poſteriores duæ, duodecima decimatertiaque, exhibituræ videntur: quarum priorem præter Blancanum etiam Gaſſendus prodidit; reliquam Ricciolus, aliunde tamen acceptam, nobis impertiit. Mirabilis præſertim illa Gaſſendi apparet. Verumtamen ſi bene perpendatur, facile eſt intelligere, quo pacto ab nona figura hæc defluxerit. Nam ſi tantum in locum rotundarum lacunarum, lunatæ ſubſtituantur, cornibus ſeſe mutuo reſpicientibus, jam profecto nona illa exiſtet, quam Ricciolus adnotavit. Nihil mirum autem Gaſſendo ac Blancano, cum non magnis perſpicillis uterentur, rotundas potius eas maculas quam lunularum forma apparuiſſe, ſiquidem partes harum acuminatas diſtinctè percipere illis negatum fuit. Tertiadecima denique quam Ricciolus à Fontana, itemque ab aliis Romæ viſam memorat, anno 1644 & 1645: eam quoque pro octava ac nona ſuppoſitam eſſe certum eſt, vel etiam pro ſeptima quam Hevelius prodidit. Non ſolum enim Ricciolus hanc ſibi unquam oblatam negat, ſolas octavam, nonamque cum anſis ſe vidiſſe affirmans: ſed & eodem anno 1645 Heveliano teleſcopio ſeptima illa conſpecta fuit. Nempe anſas Saturno conjungi rectè hîc Fontana animadvertit; ſed cum præcipuus earum ſplendor à parte gibba procederet, orbicularem ibi figuram conſtituere viſus eſt.

Non

Non adſcripſi phaſibus hiſce eam qua Saturnus ellipſis formâ conſpectus dicitur, abſque illis comitibus brachiiſve; quoniam ſatis conſtat ob exilitatem teleſcopiorum, in ipſo inventi hujus exortu, talem apparuiſſe; poſtquam verò ad majorem perfectionem eadem adducta ſint, neminem amplius ſolitarium Saturnum vidiſſe niſi ſimul & rotundus fuerit.

Omiſi etiam phænomenon aliud à nonnullis quidem relatum, ſed vanum proculdubio atque à ſola imaginatione profectum: quo nempe alterum quandoque Saturni ſive comitem ſive anſam altera minorem deprehendi aſſerunt. Ego vero exiſtimo non tam ab indiſcreta perceptione phaſin hanc enaſci (cur enim hanc anſam potius quam illam minorem dicerent?) quam quod ubi hypotheſin quiſpiam commentus fuerit, ex qua talem prodire neceſſe ſit, facile ſibi ipſi imponat, quodque cupit evenire credat. Itàque viro eximio J. Hodiernæ qui ad nos è Sicilia Syſtema ſuum Saturnium, de quo pluribus mox agemus, miſit, accidiſſe reor. Hic enim anno 1655 & ſub finem anni inſequentis, orientalem globulum reliquo minorem ſibi apparuiſſe ſcribit, quum tamen eodem tempore, nobis inſpectantibus, eadem utrique magnitudo, claritas ac figura adfuerit, non quidem orbicularis, ſed rectà in longitudinem utrinque à Saturni diſco procedens. Quin etiam fruſtra cauſam hujuſce rei ex hypotheſi ſua addúcere Hevelius laborat, quum planè contrarium ex ea ſequatur, perpetua videlicet utriuſque anſæ æqualitas. Nam cum faciem Saturni nativam ejuſmodi fingat, qualis ſuperiori tabella ad numerum ſeptimum exhibetur, utrâque ſcilicet anſâ pari formâ ac magnitudine corpori medio adnexâ, non ſinunt ullæ opticorum leges, ut qualicunque hujus corporis converſione, aliter una atque alia anſa ſeſe videndam nobis præbeat. Nobis, inquam, in tam immenſa poſitis diſtantia. Cum enim 3000 fere diametris Saturni maximis ab eo remoti ſimus, quo pacto exiſtimat vir Clar. nos percepturos diſcrimen angulorum quibus propior remotiorque anſa ſpectari debeat?

Non eſſe alteram anſarum quandoque altera minorem.

TAB. LII. fig. 7.

Æquè parum rationi conſentaneum eſt quod, ob eandem il-

Non etiam unamquam.

alteram citius ad medium Saturni corpus applicari.

illam distantiæ differentiam, unam ansarum citius quam alteram cum medio disco coalescere posse existimat. Hoc enim, admissa licet Heveliana hypothesi, atque etiamsi centuplo præstantiores tubos haberemus, nequaquam tamen nobis visu deprehendere liceret. Cæterum & hujus sententiam viri solertissimi, quo certè nemo hac tempestate majori animo atque industria rem promovet Astronomicam, pluribus exponere, & aliorum insuper de propria Saturni forma opiniones, priusquam nostram adferamus, recensere placet, quas post editam de Luna Saturni observationem omnes accepimus. Hevelius igitur, in eo libro quem peculiarem huic argumento dicavit, causas phænomenôn redditurus, sphæroidis oblongi figuram medio corpori Saturni tribuit, cui ab utroque latere appendices istæ, ut jam dixi, brachiorum sive ansarum forma, firmiter adhæreant, quemadmodum supra 7 loco expressimus. Porro simul cum Saturno hasce ansas, spatio 30 circiter annorum, circa minorem sphæroidis axem converti facit, qui quidem axis plano orbitæ Saturni sit ad angulos rectos. Enimverò his positis septimæ quidem superioris figuræ phasin nec non rotundam quoque repræsentari certum est: ut nimirum in duobus eclipticæ locis oppositis ansata hac facie Saturnus appariturus sit, aliisque rursus duobus rotundus ansisque prorsus exutus. Quinimo & sexta ac quodammodo quinta quoque exhiberi possent, nisi quod conjunctæ cum medio disco ansæ videri debebant. Sed quarta phasis nequaquam ab eadem forma proficisci poterit. Nam cum ponatur Saturnus cum annexis sibi ansis, qualem 7 figura ostendit, rectus consistere ad planum eccentrici sui, atque ita perpetuo manere, licet circa axem proprium vertatur; eveniet quidem ea conversione, ut paulatim arctius ad medium orbem ansæ applicentur, veruntamen semper geminas lunas referent ejusdem cum dicto orbe altitudinis, minimeque in tam compressas formas abibunt. Nam quod hoc efficere posse declinationem Saturni orbitæ ab ecliptica Vir Cl. censet (ita enim mihi respondit cum difficultatem hanc ei movissem) si diligentius rem expendat in-

Hevelii hypothesis circa ansas Saturni examinatur.

TAB. LII. fig. 7.

intelliget fieri non posse, cum Saturni orbita tantum 3 gradibus ab eclipticæ plano recedat, ut inde ansarum figuris ulla nobis percipienda mutatio adveniat. Cæterum nec veram quidem esse hanc quartam phasin superius indicavimus, sed cum hæc, sive trisphærica potius, minoribus telescopiis cernitur, nostris prægrandibus illam comparere quam adnotavimus anno 1655 & 1657. Quæ cum adhuc minus Hevelianæ hypothesi conveniat, clarius demonstrat illam scopum non attigisse. Neque sanè vel rotundæ phasis phænomena satis congruunt præstitutis ab Hevelio limitibus; ut patet non tantum ex prædictione ejus, eventu refutata, quæ ferebat rotundam phasin anni 1656 continuatum iri usque in Mensem Septembrem anni 1657, cum tamen jam inde à 13 Oct. 1656, ansas Saturnus recuperaverit, neque postea amiserit; sed & ex Galilæi observatis circa rotundam phasin anni 1612. Solstitio enim hujus anni, Saturnus gr. 18, 22'. ♓ obtinens, tricorpor adhuc Galilæo apparuit, quum per tabulas Hevelii debuisset rotundus observari, ac vicissim 1 Dec. ejusdem anni 1612, cum versaretur in gr. 11, 27'. ♓ rotundus Galilæo repertus est, quo loco Hevelius trisphæricum expectasset.

Alteram hypothesin, ingenio suo acutissimo dignam, summus Geometra E. Robervallius nobis exposuit. Qua quidem Saturnum perinde ut cæteros planetas rotundum statuit; egredi autem è Zona ejus torrida, hoc est, quæ rectiores solis radios excipit, vapores quosdam non admodum spissos, qui procul à superficie ejus in sublime evolantes, undique illum ambiant, præterquam polos versus, ubi fortassis intensum frigus eos à sole attrahi prohibeat. Hi si quando omne spatium complent à Saturno ad usque extremam ipsorum regionem, elliptica forma, inquit, eum videri faciunt. Cum vero minus densi exoriuntur, interque eos ac Saturnum locus ingens medius relinquitur, ob tenuitatem solares radios non reflectunt, nisi inde ubi magis conferti iisdem opponuntur; quod nostri respectu necesse est fieri in partibus à medio disco Saturni remotioribus. Ubi

Causa phænomenon Saturni à Robervallio excogitata.

pro-

proinde ansarum formam ex ea reflexione produci oportet, illasque inter ac Saturnum spatia utrinque obscura vel certè minus lucida intercedere. At quoties nullæ prorsus hujusmodi exhalationes ascendunt, rotundus planeta spectabitur.

Equidem rectè hoc consideravit vir sagacissimus esse aliquid quod æqualiter undique Saturnum circumdaret; suadente scilicet periodo Lunæ Saturniæ dierum 16, etiam ipsum circa axem suum, & breviori tempore, conversiones facere; ex quibus conversionibus intra paucos dies diversas phases nasci oporteret, nisi undique eodem modo materia quædam circumposita esset. Nec dissimili collectione usi fueramus dum nostrum Systema effingeremus, ut postea dicetur. Verumtamen ex illa sua hypothesi neque phasis nostra anni 1655 & 1657, satis commodè exponitur, neque certis Saturni orbitæ locis phases quæque peculiares sunt, quod tamen ita se habere observationes omnes evincunt, & rotundi Saturni inprimis. Hæ enim in duobus oppositis Eclipticæ locis accidere animadversæ sunt, contraque in iis qui quadrante hinc distant, ansæ quam maximè expansæ: cum tamen causa non appareat cur aliis quidem orbitæ partibus nullos vapores Sol è Saturno, aliis maximam eorum copiam extracturus sit. Deinde vapores isti, nescio quam bene, at multum certè dissimiles nostris hisce qui terram ambiunt ponuntur, tum quod immenso spatio, prout hi solent, à Saturno ascendant, tum quod versus polos paucissimi aut nulli sint, cum circa terræ polos plures contra atque altiores existant quam circa Zonam torridam. De elliptica autem forma Saturni diximus supra, eam revera nunquam talem cerni, ut proinde causam ejus adferre superfluum fuerit.

Hodierna Siculi circa eadem phænomena opinio.

Nunc verò tuam quoque Hodierna doctissime sententiam excutiamus, quam novo nuncio meo de Saturni Luna & promisso Systemate excitatus, subitò publicam fecisti. Meretur tuus ille in hæc studia non vulgaris amor, ut melioris notæ telescopia tibi suppeditentur, qui qualibuscunque etiam instructus, non cessas in cælum quà licet eniti, summum-

mumque illum planetarum, formarum varietate omnes frustrantem, certis legibus astringere aggressus es. At ille te quoque ut opinor delusit. Nam si posthac ea facie se tibi offerat, qua mihi anno 1655 & 1657 apparuit, vel ea quoque quæ successit anno 1658, cognosces utique has non quadrare illi quod tibi finxisti corpori. Sphæroidi nimirum, cujusmodi aut ovum aut prunum est, sed magis etiam oblongo quam Hevelianum illud, similem Saturnum imaginaris; in quo binæ utrinque sint maculæ lucis expertes, quales in tabula superiori phasis octava exhibet, quæ nobis interstitia illa inter ansas Saturni mediumque ejus discum referant. Inde conversiones hujus corporis circa axem, eadem periodo qua & Hevelius, definis; & rotundum tunc videri asseris, cum longior sphæroidis axis ad nos dirigitur, ideoque bis hoc accidere annorum 30 decursu. Verùm enim cum prorsus rotundus ac orbe integro lucens appareat Saturnus, quoties brachiis suis nudatus est, expendendum tibi amplius relinquo, qua ratione lacunas quasdam expleas quas à maculis illis nigris superfuturas rectè ipse prævidisti. Præterea & phases illas te considerare velim quas hæc tua hypothesis non potest non producere, nec à quoquam tamen observatæ perhibentur. Quas ut facilius omnes coram inspicias, ovum aut aliud quod eam formam habeat, istis maculis ornatum, tibi proponito, atque ita ut Saturnum converti vis circumducito; videbis non pauca in tuo hoc Saturno phænomena quæ cælestis Saturnus nunquàm exhibuit, atque alia rursus, quæ inesse huic certo tibi affirmare audeo, non videbis, ipséque de Systemate tuo statues.

TAB. XLIX. fig. 6. 7.

TAB. LII. fig. 1.

Quod autem rei veritatem neque tu neque illi viri egregii, quorum antea opiniones recensui, assecuti sitis, minimè mirandum est, aut vobis imputandum, utpote ad quos falsa plurima pro veris phænomenis delata sint; alia vero quæ de Saturno citra visus fallaciam observantur, non pervenerint. Quæ si nobiscum aspicere vobis contigisset, eadem inde quæ nos de nativa Planetæ forma collecturos fuisse credibile est. Me vero præter phases illas syriceriores, etiam Lunæ Satur-

niæ motus jam inde à principio animadverſus, non parum hîc adjuvit; ſiquidem ex hujus circa Saturnum gyratione, prima mihi ſpes de conſtituenda hypotheſi affulſit. Quæ cujuſmodi ſit deinceps explicare aggredior.

Noſtra hypotheſis qua ratione excogitata.

Quum ergo 16 dierum periodo circumferri Saturno planetam novum comperiſſem, haud dubiè minori etiam temporis ſpatio Saturnum in ſeſe ſuper axem ſuum revolvi arbitratus ſum. Namque antea quoque, in eo cum Tellure hac noſtra cæteris primariis Planetis convenire, ſemper credidi, quod ſinguli in ſe ipſis rotentur, atque ita tota eorum ſuperficies lumine ſolis per vices gaudeat. Quin imo in univerſum ita cum magnis Mundi corporibus comparatum eſſe, ut illa quibus alia minora circumferuntur, ipſa quoque in medio poſita minori tempore circumeant. Ita enim Solem diebus 26 circiter in ſe redire maculæ ejus declarant: circa Solem vero Planetarum ſinguli, inter quos Tellus quoque reponenda eſt, prout quiſque remotior eſt ita tardius curſum conficiunt. Rurſus Tellus hæc diurno ſpatio gyratur, quam Luna menſtruo motu ambit. Jovis autem Planetam quatuor minores, hoc eſt, totidem Lunæ circumſtant; eâdem hac lege, ut propiores quæ ſunt, celeriore curſu ferantur. Unde Jupiter quidem breviori forſitan tempore quam 24 horarum converti cenſendus eſt, cum citima ei lunularum minus biduo impendat. Quæ omnia cum pridem cognoviſſem, Saturno quoque jam tum ſimilem motum ineſſe judicabam. De celeritate autem periodi, comitis ſui obſervatio me certiorem fecit. Qui cum 16 diebus orbitam expleat, Saturnum in centro orbitæ ſitum, multo frequentius circumagi arguit. Jam verò & hoc credibile videbatur, omnem cæleſtem materiam, Saturnum inter comitemque ejus interjectam, eidem motui obnoxiam eſſe, hoc pacto ut quo Saturno propinquior eſt, eo magis ad ipſiuſmet celeritatem accedat. Unde illud ſequebatur denique, etiam appendices ſive brachia Saturni, vel medio globoſo corpori conjuncta atque affixa, ſimul cum eo volvi, vel, intervallo aliquo diſcreta, non multò tamen lentiorem periodum ſortita eſſe.

Fi-

Figura porro brachiorum, dum hæc circa motum eorum mente agitabam, ejusmodi apparebat, qualis in superioribus observationibus anni 1655 expressa est. Nempe medium Saturni corpus omnino rotundum erat, brachia vero utrinque secundum eandem rectam lineam protendebantur, velut si axe quodam medius planeta trajiceretur, quanquam tubo illo 12 pedum quo tunc utebar, utraque versus extremas cuspides paulo crassiora clarioraque videbantur, quam ubi mediæ sphæræ cohærebant, ut indicat figura. Quum itaque quotidie eandem hanc speciem præ se ferret, intellexi id alia ratione fieri non posse, siquidem tam brevis esset Saturni eorumque quæ illi cohærent circuitus, nisi ut globus Saturni à corpore alio æqualiter undique cinctus poneretur, atque ita annulus quidam medium eum ambiret. Hinc enim, quacunque celeritate circumvolveretur, eandem semper faciem nobis oblatum iri, si nimirum axis ad istius annuli planum erectus esset.

TAB. XLVII. fig. 6.

Annulo Saturnum cingi.

Et sic quidem ei quæ per id tempus aderat phasi causa sua constabat. Ergo deinceps expendere cœpi anne reliquæ etiam, quæ de Saturno ferebantur, eidem annulo imputari possent. Hoc autem non tardè successit ex animadversa, per frequentes observationes, brachiorum Saturni ad eclipticam obliquitate. Cum enim lineam rectam, secundum quam utrinque ea extabant, non sequi ductum eclipticæ, sed intersecare eam angulo 20 partibus majore comperissem, statui proinde planum annuli quem imaginatus eram tali circiter angulo ad eclipticæ planum inclinari. Perpetua videlicet constantique inclinatione, quemadmodum in tellure hac nostra plano æquatoris contingere notum est. Hinc autem necessario illud sequebatur, ut diversis aspectibus nunc ellipsin satis latam, nunc eandem strictiorem, nonnunquam denique & rectam lineam idem annulus nobis exhiberet. Quod autem ansæ effingerentur, intellexi id inde fieri, quod non arctè Saturni globo annulus cohæreat, sed pari interstitio undique ab eo removeatur. Quibus proinde sic ordinatis, ac præterea adsumta ea quam dixi annuli inclinatio-

Eum ad Eclipticæ planum obliquè positum esse.

ne, omnes mirabiles Saturni facies ſicut mox demonſtrabitur, eo referri poſſe inveni. Et hæc ea ipſa hypotheſis eſt quam anno 1656 die 25 Martii permixtis literis una cum obſervatione Saturniæ Lunæ edidimus *.

* vide ſupra pag. 523.

Erant enim Literæ aaaaaaa ccccc d eeeeeg h iiiiiii llllmm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu *; quæ ſuis locis repoſitæ hoc ſignificant, *Annulo cingitur, tenui, plano, nuſquam cohærente, ad eclipticam inclinato.* Latitudinem vero ſpatii inter annulum globumque Saturni interjecti, æquare ipſius annuli latitudinem vel excedere etiam, figura Saturni ab aliis obſervata, certiuſque deinde quæ mihi ipſi conſpecta fuit, edocuit: maximamque item annuli diametrum eam circiter rationem habere ad diametrum Saturni quæ eſt 9 ad 4. Ut vera proinde forma ſit ejuſmodi qualem appoſito ſchemate adumbravimus.

* vide pag. 526.

TAB. XLIX. fig. 2.

Occurritur iis quæ de annulo objici poſſent.

Cæterum obiter hic iis reſpondendum cenſeo, quibus novum nimis ac fortaſſe abſonum videbitur, quod non tantum alicui cæleſtium corporum figuram ejuſmodi tribuam, cui ſimilis in nullo hactenus eorum deprehenſa eſt, cum contra pro certo creditum fuerit, ac veluti naturali ratione conſtitutum, ſolam iis ſphæricam convenire, ſed & quod annulum hunc ſolidum ac permanentem (talem enim arbitror) Saturno ita circumponam, ut nullis compagibus retinaculiſve ei cohæreat, ac nihilominus æqualem ab omni parte diſtantiam ſervet, unáque cum Saturno motu velociſſimo transferatur. Hos autem reputare illud oportet, non ex mera inventione atque arbitrio meo hanc me fingere hypotheſin, ſicut Aſtronomi ſuos epicyclos, nuſquam in cælo apparentes; ſed oculorum ſenſu, quo nempe reliquarum rerum omnium figuras dignoſcimus, hunc quoque annulum ſatis evidenter me percipere. Neque verò cauſam eſſe cur corpus aliquod inter cæleſtia hac forma præditum exiſtere nequeat, quæ ſi non ſphærica at ſaltem rotunda eſt, atque ejuſmodi ut motum circa centrum æquè commodè atque ipſa ſphærica ſuſcipiat. Nam minus utique mirandum, hujuſmodi figuram tali corpori tributam, quam inconcinnam quam-

quampiam miniméque tornatilem. Porrò quum certo satis colligi posse videatur, ob similitudinem ac cognationem magnam quæ Saturno cum Tellure nostra intercedit, illum perinde ut hæc in medio sui vorticis situm esse, centrumque ejus versus omnia naturâ suâ tendere quæ illic gravia habentur; inde necessario quoque efficitur, annulum istum omnibus sui partibus æqualivi ad centrum nitentem, hoc ipso ita consistere, ut undiquaque pari intervallo à centro absit. Planè sicuti quidam contemplati sunt, quod si continuum fornicem per totum terrarum ambitum exstrui possibile esset, is absque ullo fulcimine semet ipsum esset sustentaturus. Ergo tale quid in Saturno reipsa effectum esse ne protinus absurdum credant, sed suspiciant potius infinitam naturæ potentiam & majestatem, quæ subinde nova suorum operum specimina in lucem promens, plura etiam superesse admonet. Verum ad propositum jam revertamur.

Diximus brachiorum lineam anno 1655 eclipticæ occurrere visam angulo partium plus minus 20. Quod cum præcipuè faciat ad phænomena ex hypothesi nostra deducenda, antequam ad illa accedamus; ita se habere ex observationibus ostendendum est. *Saturni major diameter Æquatori parallela ostenditur.*

Cum igitur 25 Martii, anno 1655, Saturni in A positi ad stellam fixam B ea fuerit constitutio quæ hîc adnotata est, ut constat ex superioribus observationibus; die autem sequenti sicut in D & B, tertioque item die sicut in C & B, ita ut quotidie linea ansarum producta altius supra stellam B ascenderet; hinc perspicuum fit viam Planetæ A C nequaquam congruere directioni ansarum, sed diversam ferri angulo A C E, quem 20. gr. majorem invenio. Eo autem tempore nihil admodum mutabatur latitudo Saturni apparens, unde constat viam A C eclipticæ parallelam fuisse; ac proinde eodem illo 20 gr. angulo etiam ab ecliptica lineam ansarum deflexisse. TAB. XLIX. fig. 3.

Rursus 9 Apr. & tribus sequentibus continuè diebus ad aliam fixam C talis annotatus fuit Saturni positus qualis in L, M, N, O cernitur. Ubi similiter apparet, lineam an- TAB. XLIX. fig. 4.

ſarum OP, Saturni tramitem LO ſecare angulo LOP, qui 20 plus minus graduum deprehenditur. Eclipticam verò vel eclipticæ parallelam lineam RQ; angulo PQR, paulo etiam majore quam LOP, quoniam decreſcebat per eos dies Saturni latitudo, quæ borea erat.

TAB. XLIX. fig. 5. Denique cum poſt ſtationem Saturnus ad fixam eandem C revertiſſet, factuſque eſſet auſtralior, die 27 Maji, eo poſitu juxta hanc adſtabat quo hîc ad S deſignatus eſt. Die vero Maji poſtrema, eo qui ad T. Ita ut hic quoque linea SV, quæ ſecundum brachia ducitur, interſecet ST, quam quatriduo illo Saturnus permeaverat, angulo VST, 20 gradus exiguo ſuperante. Eclipticam vero vel eclipticæ parallelam XY, paulo minore angulo SXY, quoniam minuebatur adhuc continuè Planetæ latitudo, etſi directus jam incedebat.

Et his quidem intellectis, inclinatio brachiorum Saturni ad eclipticam, in dubium vocari amplius nequit, etſi, fateor, non admodum accuratè quanta ſit hoc modo definiri poſſit. Si tamen 21 graduum per id tempus apparuiſſe ponatur, quantam ferè adductæ obſervationes comprobant, ac porro ad locum Saturni, qui tunc fuit, attendamus, inveniemus æquatori planè parallela brachia extitiſſe. Cum enim circa 3 gr. Virginis Saturnus verſaretur, ubi parallelus æquatoris eclipticam interſecat angulo gr. 21. quo angulo etiam brachiorum linea illam interſecabat; manifeſtum eſt hanc ſecundùm dictum parallelum atque adeo ſecundùm ipſum æquatorem incedere debuiſſe.

Cæterum alio nunc irrefragabili argumento eandem hanc brachiorum inclinationem, & cum æquatore circulo paralleliſmum confirmabimus. Suprà in obſervationum Hiſtoria ad diem 13 Octob. anni 1656, adnotatum eſt, motum Saturni, quo cùm cælo quotidie defertur, ſecundum ipſam anſarum lineam procedere nobis viſum, non ea die tantum, ſed quotieſcunque exinde idem inquirere libuit: inquiritur TAB. L. fig. 1. autem hoc modo. Teleſcopio ad Saturnum obverſo, eoque intra tubi aperturam, quam hic refert circulus AB, recepto, ita ut primùm in extremo margine conſiſtat, vergat-

que

que linea brachiorum ad aperturæ centrum, immotum inde tubum sistimus, quo ita manente, mox totam tubi capacitatem A B percurrere Saturnus conspicitur, motu qui cælo tribuitur abreptus, atque exire ad partem oppositam B, quo tendebat brachiorum linea. Quoniam ergo Saturnus, hoc motu suo, circulum æquatori parallelum percurrit, cujus circuli pars est linea A B, manifesto patet brachiorum lineam æquatori quoque parallelam extendi. Hujus vero rei periculum facere licet quoties Saturni observandi facultas datur, neque alia certiori ratione directionem ansarum investigari posse credimus. Non defuere tamen qui diversimode idem examen instituerunt, quorum observationes sententiam hanc nostram comprobant. Nam Galilæus quidem ipse, qui primus phænomeni hujus indicium fecit, non omnino eclipticæ parallelam lineam, in qua Saturni comites positi essent, sibi visam scribit, sed evidenter ab ea deflectere; & fortasse, inquit, æquatori parallela est.

Post hunc vero quicunque rem examinaverunt, omnes hanc ejus conjecturam nequaquam aberrasse ostendunt, & in his Astronomi insignes Gassendus, Bullialdus & Ricciolus; quorum hic stellarum fixarum ope (alia tamen methodo quam qua modo nos usi sumus) non semel illum ansarum cum æquatore parallelismum liquido sibi compertum demonstrat.

Clarissimus tamen Hevelius, suis observationibus confisus, quæ cujusmodi fuerint non indicat, diversam hic opinionem tuetur, contenditque excentrico Saturni parallelam esse brachiorum inclinationem, ut proinde eclipticæ quoque ferè conveniat, non amplius unqnam quam $2\frac{1}{2}$ gr. deflectens: & hoc quidem cum circa nodos intersectionis Saturnus versatur. Quo fiet ut cum in Libræ & Arietis gr. 20, ubi limites statuuntur, positus fuerit, prorsus eclipticam sequatur brachiorum dispositio. At circa hæc loca maximam omnium inclinationem nostræ & aliorum observationes produnt, nam nostræ quidem, Saturno prope libræ signum atque in ipso signo versante, habitæ sunt; aliorum vero quædam

Hevelii de inclinatione ansarum contraria opinio.

cum

cum non procul ab opposito limite distaret. Ergo quod & plurium autoritas & propria experientia confirmat, haud cunctanter hac in re amplectemur: Neque vero dubito, quum certam semperque obviam observandi methodum tradiderim, quin ea adhibita vir veri amantissimus priorem sententiam volens abdicaturus sit. Illud utique nobiscum novit, frustra sive hunc sive alium quemlibet observandi modum, ad dirimendam inter nos hanc litem, usurpari, quando circa signa Cancri vel Capricorni Saturnus commoratur, quoniam ibi discerni nequit utrum æquatori an eclipticæ parallela sit quæ per ansas ducitur, eò quod in his locis parallelus æquatoris eclipticam non intersecet sed tangat. Quamobrem miror etiam quo pacto Ricciolus, observationem Grimaldi adferens anno 1650, 18 Martii habitam, quæ probat eo tempore hanc ansarum lineam eclipticæ obliquam incidisse, non animadverterit contrarium ejus quod intenderat illa observatione evinci: si enim tunc, Saturno prope initium Cancri agente, non erat eclipticæ parallela ansarum linea, ne quidem æquatori parallela fuerit, ut constat ex modo dictis. Semper autem æquatori parallelam cerni, & aliis multis observationibus docuit, & hac ipsa ostendere voluit. Ergo & experientiæ propriæ & sententiæ suæ, quam veram esse demonstravimus, planè hîc adversatur. Grimaldi autem observatio, quanquam alioqui in hoc negotio versatissimi atque experientissimi, vitio aliquo laborare censenda est; in qua forsitan priore fixa à Saturno contecta, vel ob fulgorem cerni prohibita, aliam deinde telescopio detexerit prius non animadversam, proque eadem illa habuerit. Nos verò, cum parallelam æquatori brachiorum lineam esse indubitatis rationibus satis jam adstruxerimus, deinceps ad annuli nostri hypothesin hunc ejus situm applicemus, indeque phænomenôn causas singulas derivari doceamus.

Ricciolus sibi contrarius. lib. 7. Almag. novi.

Esto itaque Saturni orbita, quam 30 circiter annis ille emetitur, ABCD; & in eodem plano (nam exiguæ declinationis gr. 2½ non hic rationem habebimus) circulus FE, orbem magnum sive telluris orbitam referens, quam an-

Ulterior hypotheseos nostræ explanatio. TAB. L. fig. 2.

annuo ſpatio cum illa nos obimus: inque hujus centro G conſiſtat Sol. Jam ſicuti axem terra habet ſemper ſibi parallelum, circa quem in ſeſe volvitur, ita Saturnus quoque habere ponatur, qui ſit ad annuli ſibi circumdati planum erectus. Adeo ut circa unum eundemque axem gyrentur & corpus Saturni ſphæricum, & annulus, & in eodem annuli plano poſitus Saturni comes ſive Luna. Intelligatur autem Saturni hic axis axi terræ circiter æquidiſtans. Unde & planum annuli plano æquatoris noſtri parallelum erit, ac proinde angulo pàrtium $23\frac{1}{2}$ ad planum eclipticæ inclinabitur. Nam ſic conſtituendum eſſe inde intelleximus quod anſarum Saturni inclinatio æquatori parallela deprehendatur, ut modo demònſtratum fuit.

Nobis itaque in circulo EF circumlatis, varias annuli hujus, à Sole pariter cum Saturno illuſtrati figuras cerni debere perſpicuum eſt, prout nimirum nunc has nunc illas orbitæ ſuæ partes Saturnus peragrabit. Nam eodem quidem orbitæ loco, quacunque tandem celeritate ſuper axem ſuum converti dicatur, diverſas phaſes non exhibebit, quoniam ea converſione ſitum annuli, noſtri reſpectu, nihil immutat, ſed ita demum ſi in eccentrico ſuo ſive orbita ſpatio aliquo progreſſus fuerit. Cumque triginta fere annis ad loca eadem revertatur, hinc neceſſario intra id tempus omnium phaſium viciſſitudinem conſpici neceſſe erit, atque alias quidem bis, alias quater: quas ſingulas nunc expendemus.

Cauſa phaſeos anſarum latiſſimarum.

Primò itaque duos orbitæ locos eſſe liquet è diametro oppoſitos, velut A & C, in quibus Saturnus conſtitutu latiſſimas, maximeque omnium diductas anſas exhibeat; cum nimirum à plano per centra Telluris & Saturni acto, atque ad orbitæ Saturniæ planum erecto, annuli quoque planum ad angulos rectos ſecatur, eoque viginti trium circiter partium angulo ſupra planum annuli viſus noſter attollitur.

TAB. L. fig. 3.

Cujus phaſeos vera proinde forma, ſecundum ea quæ ſupra circa annulum definivimus, ejuſmodi erit qualis hìc de-

lineata cernitur, majori ellipsis diametro ad minorem se habente fere ut 5 ad 2. Atque hæc ea figura est quam ab Hevelio, Ricciolo, & Eustachio de Divinis, anno 1648, 1649, & 1650 spectatam fuisse diximus. Cujus itaque locum, hinc inter signa ♊ & ♋, inde inter ♐ & ♑ constitui oportere certum est, quandoquidem istis annis signum ♊ Saturnus peragrabat & in ♋ signum transibat. Postea verò accuratius hunc locum latissimè ansarum phaseos inquirentes ostendemus eum cadere in 20½ gr. ♊ & ♐.

Clarior Saturnus propter ansas cernitur.

Illud vero manifestum est, Saturnum, quoties hanc præfert speciem, multo lucidiorem sese intuentibus ostendere debere, quàm dum nullis brachiis auctus est: quum tantundem luminis fere ab hisce emanet, quantum ab toto interiore disco. Atque ita semper quo propius versus Cancri & Capricorni signa accesserit, eo majorem, aut certè splendidiorem, etiam absque telescopio appariturum; quippe annuli ellipsis semper latius se pandente, ut in sequentibus declarabitur.

Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus.

Sed & aliud circa hanc phasin observandum occurrit, motus nimirum insolens Saturnii comitis, qui quidem motus observationibus anni 1659 adnotari jam cæpit, verùm hac latissimâ ansarum phasi existente, omnium evidentissimè ut sese prodat necesse est. Etenim quum eodem plano & annulus Saturni & comitis orbita contineantur, aut certè parum diversis; constat simul cum annulo etiam orbitam hanc latissimam omnium ellipsin nobis explicaturam: eoque futurum ut comes apparente motu altè supra Saturnum atque infra transire conspiciatur, ita ut corpore ejus vel radiis nimium propinquis nequaquam nobis occultetur, quemadmodum aliàs accidere solet. Atque ea quidem ellipsis quam tali motu describere hisce in locis cernetur, longitudinem latitudinis suæ duplam sesqui alteram habere invenietur, sicut & annuli, quam diximus, ellipsis latissima. Verum recedente hinc Saturno sensim angustior ipsa quoque evadet, quippe annuli ellipsi semper similis, adeo ut primum fulgore planetæ transitus comitis conspici prohibeatur, deinde corpo-

ris,

ris ipſius Saturni ante vel pone comitem objectu. Ita namque obſervationes anni 1655 & 1657, quo tempore exilia & quam maximè compreſſa brachia erant, oſtendunt comitem etiam in ea recta tunc perpetuo apparuiſſe quæ per utrumque illorum extendebatur.

Et hac quidem in re diſſidet Saturniæ Lunæ curſus ab eo qui in noſtrate Luna animadvertitur; ſiquidem hæc non æquatoris noſtri ſed magis eclipticæ plano obnoxia eſt, à quo quinque tantummodo partibus exorbitat.

Verum ad Saturni phaſes revertamur: quo poſito ad H vel I, vel ex adverſo ad O vel P, paulo anguſtiorem jam annuli ellipſin, eadem tamen qua prius longitudine nobis aſpici oportet, quum ſupra planum annuli minus altè hoc ſitu viſus noſter efferatur. Unde illa phaſis exorietur quæ in tabellæ LII. ſerie octava poſita eſt; vel, minus accuratè perſpicere valentibus, ea quæ ſexta eſt efficietur. *Quomodo anſarum latitudo ſenſim contrahatur.* TAB. L. fig. 2.

Rurſus autem eum ad K aut L Saturnus pervenit, vel ad loca hiſce oppoſita N & M, magis adhuc contrahi apparet minorem ellipſis diametrum, quippe magis ex obliquo inſpectam. Ut jam ea Saturni facies proditura ſit quam nos anno 1658 obſervavimus (T. XLIX. *fig.* 7.); quæ minus bonis teleſcopiis excepta degeneravit in illam quæ quinta in tabella LII. recenſetur; pejoribus etiam in triſphæricam.

Deinde cum penè quadrante circuli à latiſſimæ phaſeos loco Saturnus remotus invenitur, velut in Q & R, vel S & T; uſque eo ellipſis annuli conſtringitur, ut ſi qua adhuc rima ſuperſit viſui pervia, ea tamen propter exilitatem & reliqui corporis ſplendorem conſpici nequeat; ac proinde Saturni forma ejuſmodi appareat qualem anno 1655 & 1657 nos ſpectaſſe ſupra meminimus (T. XLIX *fig.* 6. T. LI. *fig* 5.), quæ quomodo aliis omnibus hactenus teleſcopiorum culpâ triſphærica exiſtimata ſit, antea quoque oſtenſum eſt. *Quomodo patulæ videri anſæ deſinant.*

Sola dehinc rotunda phaſis explicanda reſtat; ad quam priuſquam tranſeam, de inclinatione magnæ Saturni diametri, ſive anſarum lineæ, ut ſupra eam vocavi, pauca adnotanda ſunt.

Majorem Saturni diametrum necessario Æquatori parallelam semper videri.

Ajo itaque in omnibus prædictarum phasium, posito, ut hactenus fecimus, parallelum esse annuli planum plano æquatoris, necessario fieri ut major diameter Saturni, sive ellipseos ejus cui annulus assimilatur, semper æquatori circulo parallela spectetur, planè quemadmodum revera contingere nostris aliorumque observationibus supra probavimus. Quum enim visus noster respectu cælestium in centro æquatoris circuli, atque adeo in plano ejus collocatus sit, cui plano planum annuli parallelum ponitur, necesse est maximam longitudinem annularis ellipseos eidem æquatori circulo parallelam extendi: eâdem prorsus ratione, quâ, si in aëre plano terræ parallelum circulum suspendamus, oculo nostro altiorem, indeque passibus aliquot retro absistamus, major diameter ellipsis quam suspensus circulus visui offert Horizontis circulo æqui distare comperietur. Hoc enim procul dubio eventurum, cuivis vel citra experimentum intelligitur.

Revera tamen minimum quid nonnunquam aberrare.

Esse autem annuli planum plano æquatoris omnimodis parallelum, etsi observationibus, quas quidem expendimus hactenus, minimè repugnantibus statuere licuit; exiguum tamen quid deesse, quo minus omnino perfectus sit eorum parallelismus, alia ratione deprehenditur. Etenim si prorsus inter se parallela forent utraque plana, sequeretur ut cum in pr. ♈ & ♎ Saturnus spectaretur, omnium arctissima annuli ellipsis, & quasi recta linea existeret, latissima verò in pr. ♋ & ♑. Atqui arctissimam annuli phasium in gr. 20½ ♍ & ♓ cadere invenimus, ut in sequentibus demonstrabitur, ac proinde latissimam in gr. 20½ ♊ & ♐. Non igitur exactè parallela esse plana annuli & æquatoris hinc patuit, ideoque nec semper revera parallelam, licet ita videatur, magnam Saturni diametrum æquatori circulo fore. Quæsitoque per sphærica triangula, quibus in locis & quanta sit maxima inclinatio, inveni eam gr. 4 8'. quando Saturnus in gr. 25, 15'. ♊ & ♐ versatur. Tali nimirum angulo, nec unquam majori, ansarum linea circulum æquatori parallelum per Saturnum transeuntem iis in locis intersecabit; qui cum sit adeo exi-

guus,

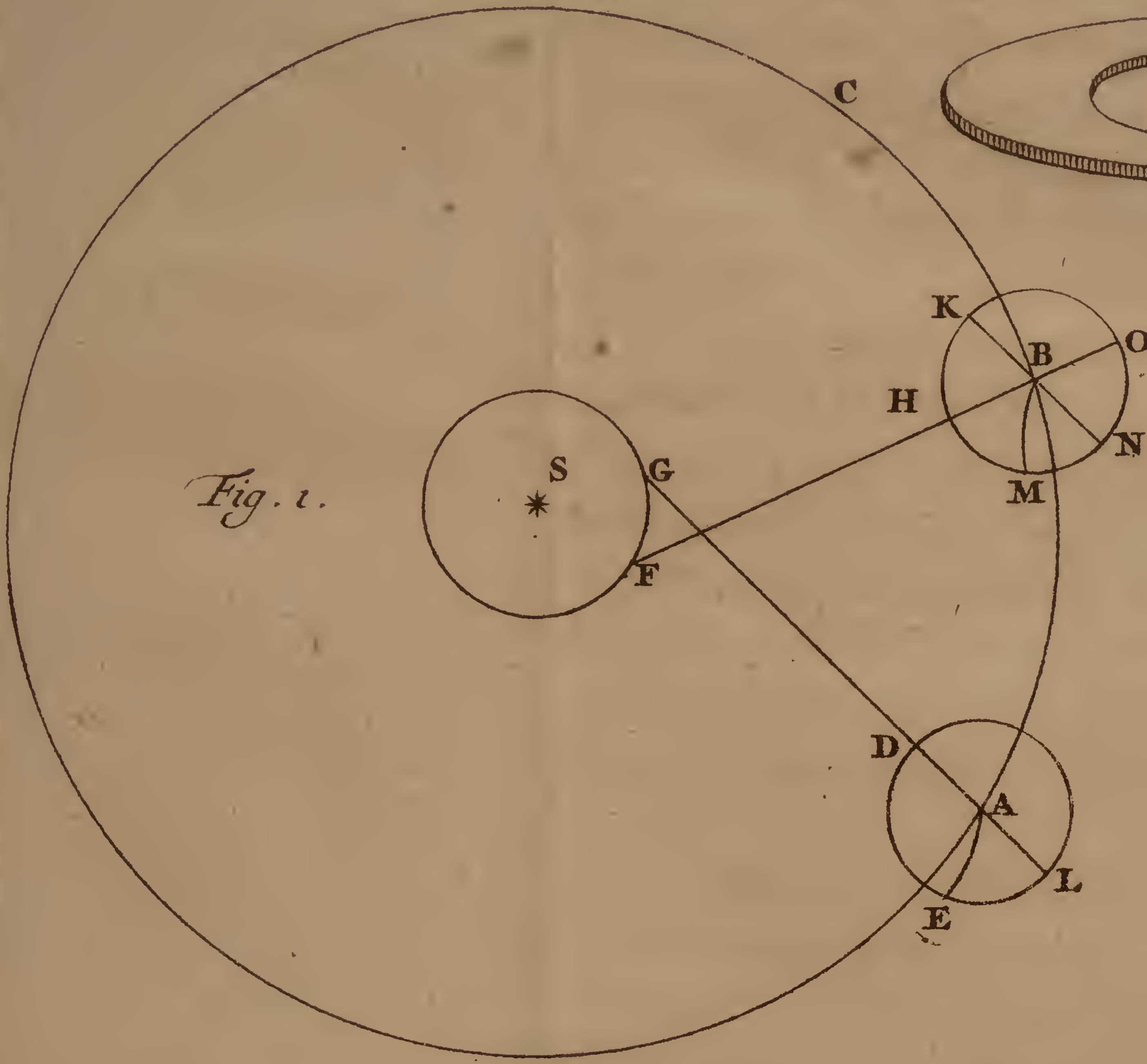
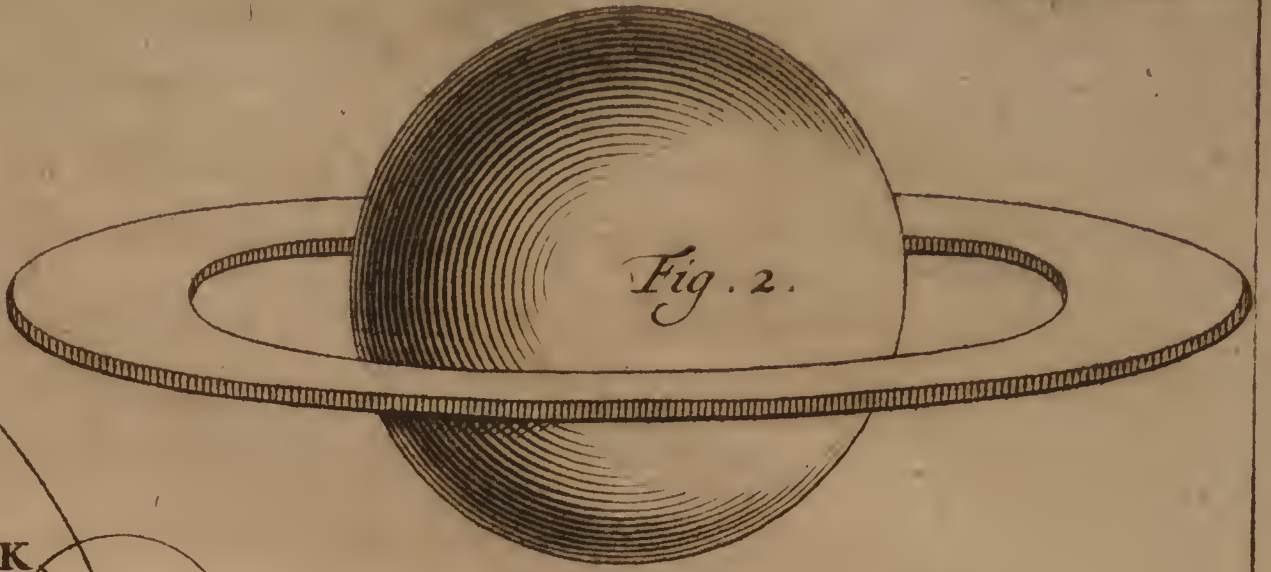


Fig. 1.


Fig. 2.

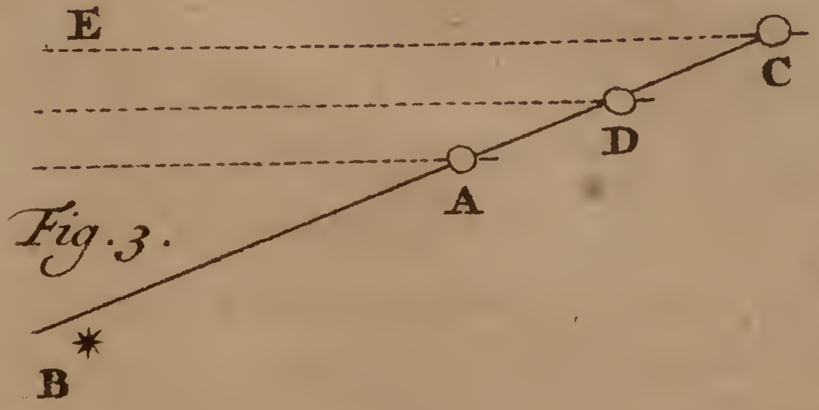


Fig. 3.

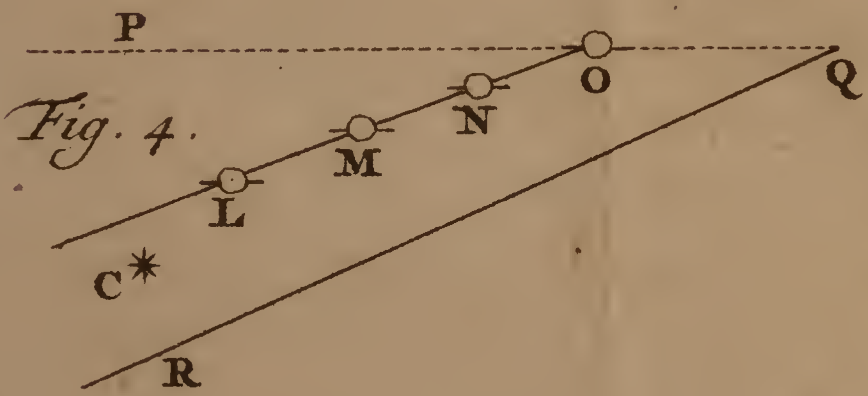


Fig. 4.

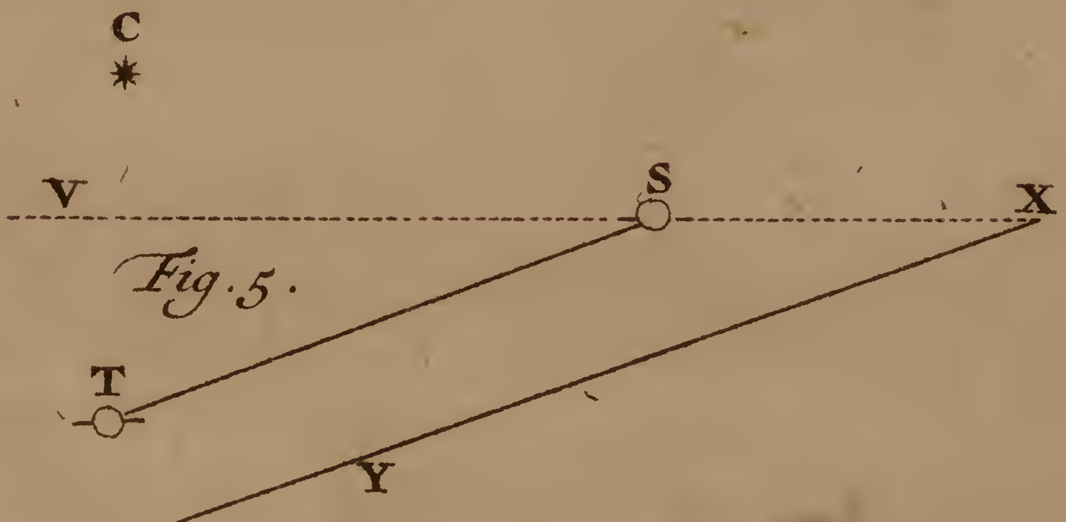
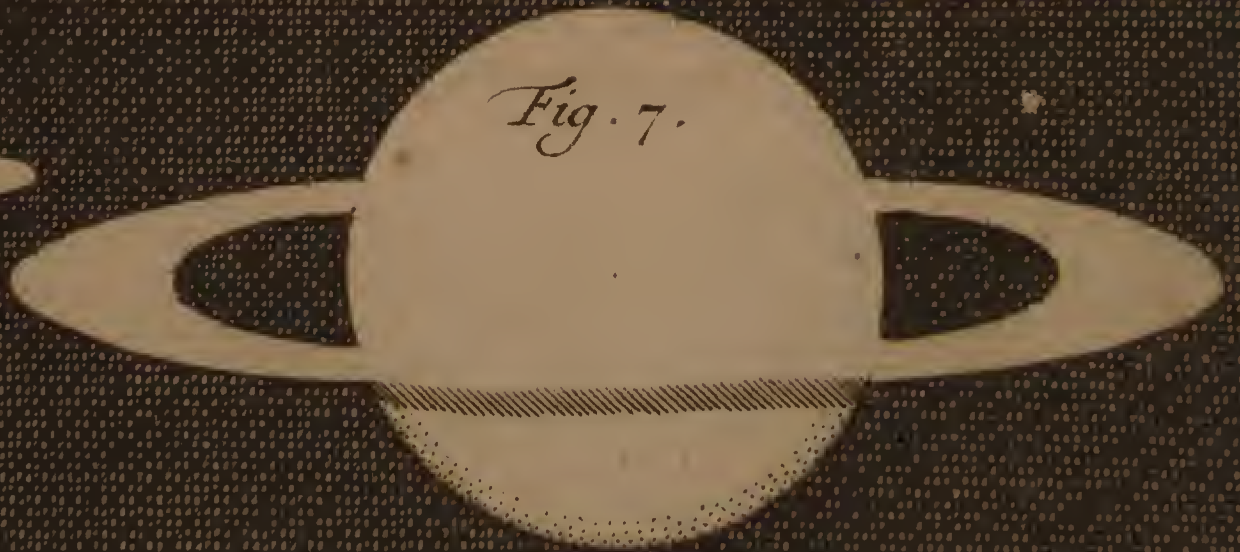


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.

guus, vix puto obſervabilis erit: aliis autem locis multo minus. Nam iis quidem quæ quadrante Zodiaci inde abſunt, nempe cum gr. 25.15′. ♍ aut ♓ Saturnus obtinebit, prorſus parallela æquatori eadem anſarum linea conſpicietur. Eclipticæ vero parallela fiet Saturno gr. $20\frac{1}{2}$ ♊ aut ♐ tenente: quippe quam in locis per quadrantem circuli inde diſtantibus, nempe in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ & ♓, maximo angulo interſecat. Hunc autem maximum angulum quo linea anſarum eclipticam interſecat eſſe circiter gr. $23\frac{1}{2}$ obſervationibus anni 1655, 1656 & 1657 apparuit, talemque ad iſta ſupputanda adſumſimus. Fortaſſe autem, longo ſæculorum lapſu, ſenſim omnia hæc loca mutari continget, ſimili quodam motu Saturni globum inclinante atque in Tellure noſtra eſt is qui præceſſiones æquinoctiorum efficit: atque ita phaſium quoque omnium loca transferri neceſſe erit. Hoc vero non tam facile in cæteris phaſibus quam in rotunda pateſcet, ad cujus conſiderationem deinceps veniendum.

Schema itaque repetenti manifeſtum eſt Saturnum integro orbitæ ſuæ circuitu non poſſe non ad eum locum bis pervenire, (eſto in B & D) ubi planum annuli recta ad nos dirigatur, productumque in oculos noſtros incurrat. Quod quidem in locis è diametro oppoſitis contingeret, inque iiſdem perpetuò, ſi ex Sole Saturni motum proſpiceremus; at nunc propter motum Terræ in ſua orbita annuum, nonnulla oritur inæqualitas. Annulo igitur ſecundum latus inſpecto, nec niſi rectam lineam referente, quum neutra planarum ejus ſuperficierum appareat, ad nihilum rediguntur brachia ac prorſus intereunt, ſolo rotundo Saturni corpore quod intueamur reliquo. Cujus phænomeni primum teſtem Galilæum ſupra commemoravimus, qui anno 1612 ſimplicem hanc Saturni formam obſervaverit. Inde verò poſt annos 30 Gaſſendum alioſque complures; ac nos etiam denique anno 1656. Verùm enim ſi hôc tantum annuli poſitu anſæ evaneſcerent, nequaquam tanto tempore perſtare rotunda phaſis poſſet atque obſervationes teſtantur, toto enim ſemeſtri rotundus Saturnus ſpectatus fuit. Quamobrem porro

Rotundæ phaſeos cauſa.

ro quærendum eſt quæ cauſa, præter eam quam jam attulimus, anſas quandoque cerni prohibeat: eſt autem quæ ſequitur manifeſtiſſima.

Frequenter nimirum evenire conſtat Saturno circa locos modo dictos B vel D commorante, ut tum hujuſce tum Solis reſpectu ita poſiti ſimus, ut ſi produci planum annuli intelligatur, id inter nos ac Solem tranſiturum ſit: velut in ſchemate, cum Saturnus prope D conſiſtit, nos autem cum Tellure in E. Quo fit ut illam annuli ſuperficiem quæ ſolis radiis illuminatur conſpicere nequeamus, ſed alteram tantummodo quæ tunc umbræ vices patitur. Nulla itaque ne hîc quidem brachia Saturno annulus præſtat, ſed oculis noſtris ereptus orbum ac ſolitarium relinquit. Atque hæc cauſa ad continuos quinque aut ſex menſes rotundæ phaſi interdum ſufficit, uti poſtea accuratius docebimus.

At non immerito dubitari poſſit, cur & hôc & præcedenti quoque annuli poſitu cum planum ejus rectà ad nos vergit, non ſaltem exterior ejus limbus à Sole illuſtratus appareat: quid enim dicemus? anne tam tenue eſſe totum annuli corpus, ut licet revera ſplendeat extrema ejus margo, exilior tamen ipſa ſit quam quæ noſtris teleſcopiis percipi poſſit? Nequaquam: verùm res eadem quæ cauſam hanc prætexi vetat, eadem veram cauſam quoque haud dubiè ſuppeditat: faſcia nimirum illa reliquo Saturni diſco obſcurior, quam & rotundo illo apparente, & rurſus brachiis aucto, nobis viſam narravimus. Hæc ita comparatum eſſe exteriorem illum annuli ambitum evincit, ut aliqua quidem craſſitudine præditus ſit, verum ejus naturæ, ut ſolis lumen, vel nihil prorſus, vel certè leviter admodum reflectat. Quia enim in Saturno etiam brachiis prædito tractus iſte nigricans animadvertitur, nempe cum ſuperficiem annuli eandem quæ à Sole illuſtratur deſpicimus; quo poſitu nulla ejus regio obumbrata oculis noſtris obverſa eſt; ſequitur nigredinem illam ex alia cauſa manare non poſſe, niſi quod ejuſcemodi quadam materia annuli margo cooperta ſit, quæ non perinde ut reliqua ejus ſuperficies repercutiendo lumini ſit idonea.

Quid ſit in Saturni diſco Zona nigricans.

nea.

nea. Sic in lunari quoque disco maculas aliquas, cæteris partibus multo obscuriores, cernimus; quæ quidem non planè omni luce defectæ apparent, verùm si æquè procul ac Saturnus à Sole distarent, ubi tantum centesimam partem ejus, quod nunc accipiunt, luminis ab illo mutuarentur, credibile est penitus nobis invisibiles fore, nisi quatenus lucidioribus undique terminantur; præsertim si tenuem modo lineam, ut Saturnii annuli margo, constituerent. Alioqui vel illud forsitan dici possit, materiam quandam aquæ similem, aut certè lævi & splendida superficie præditam, extrema annuli præcingere, quæ unico tantum veluti puncto Solis radios reflectens, nequaquam nobis conspicua erit, ut rationibus opticis clarum est.

Sed quæ ad rotundam phasin attinent ulterius etiam expendamus, in qua plura animadvertenda supersunt. Diximus paulò ante, tunc eam potissimum existere, cum productum annuli planum inter nos Solemque medium transit. Hoc verò quando contingat, quo pacto cognoscere possimus, atque ex Astronomicis tabulis definire, deinceps explicandum est. Sit itaque denuo Saturni orbita A B C, Telluris annua D E F, locus solis L. TAB. I. fig. 4.

Jam quia positum fuit, Saturni axem, qui ad annuli planum erectus est, semper sibi parallelum ferri, sequitur communem quoque planorum annuli & orbitæ intersectionem uni cuidam lineæ semper fore parallelam. Esto ea linea per Solem ducta A C, quæ proinde in cælo locum Saturni æquinoctiorum designabit. Posito igitur Saturno in H, Tellure verò in D, utroque ad partem eandem rectæ A C, verum ita ut minus ab ea Saturnus quam Tellus distet: necessario intersectionis linea planorum annuli & orbitæ Saturni H M, quæ nimirum ex H parallela ducitur A C inter Solem L, Terramque in D positam excurret, ac propterea annuli quoque planum manifestò inter utrumque medium incedet. Quod ubi contingit, rotundæ phasi locum esse demonstravimus. Contra verò, cum Saturnus quidem ac Tellus ad eandem partem rectæ A C consistunt, verum ita

ut

ut illa propius ad eam accedat, ut cum ille est in N, hæc in F: vel cum diversas partes respectu A C obtinent, velut cum Saturnus est in N, Tellus in *f*; utroque casu linea intersectionis annuli atque orbitæ Saturni, ut hic N Q, quæ nimirum ipsi A C æquidistans acta est, Terram Solemque ab eadem parte habebit. Unde intelligitur, utrovis positu eandem annuli superficiem à Sole & nobis aspici: quod requiri jam supra advertimus, ut brachia Saturni aut ansæ apparere possint. Quanquam ne sic quidem semper cernuntur, uti postea manifestum fiet.

Saturnus quando necessario rotundus spectari debeat. Hi autem diversi situs ut ex tabulis Astronomicis parvo negotio cognoscantur, indeque rotunda phasis, quatenus ab hac causa pendet, prædici possit, sciendum est, quandocunque Saturni locus apparens locusque ex Sole sive eccentricus, diversas partes obtinent ejus loci quem inter fixas designat recta A C, (quam in gr. 20½ ♍ & ♓ incidere post hæc ostendemus) id ejusmodi situm Saturni ac Telluris indicare qualis in H & D, ut nimirum ab eadem parte ambo reperiantur rectæ A C, atque propior huic Saturnus consistat; eoque tunc rotundam phasin conspiciendam dari. Illo enim posito, sit Saturnus in H. Primùm itaque dico ab hac parte lineæ A C etiam Tellurem consistere. Etenim si ad alteram partem sita esse dicatur, velut in P; liquet rectam ex P ad H ductam & versus fixas porro continuatam, quæ locum Saturni apparentem, itemque rectam L H, quæ producta locum ejus ex Sole demonstrat, ab eadem parte puncti æquinoctiorum, quod L A producta inter fixas determinat, utraque ea loca exhibituras; contra quàm positum fuerat. Est ergo Tellus necessario ab eadem parte lineæ A C, qua Saturnus H. Esto jam ea alicubi puta in D. Quoniam igitur D H ad fixas protracta locum Saturni apparentem designat, L H vero, uti diximus, locum ejus eccentricum, inter quæ loca intercedere ponitur locus æquinoctiorum quò tendit L A, necesse est rectam D H tandem ipsam L A intersecare, ideoque punctum D, locum videlicet Telluris, amplius distare à linea A C quam punctum H in quo Saturnus.

nus. Constat itaque quando locus Saturni apparens & eccentricus ad partes diversas cadent loci æquinoctiorum, necessario tunc Tellurem cum Saturno ab eadem parte rectæ A C inventum iri, atque ita ut minus ab ea Saturnus removeatur. At vero quoties apparens locus Saturni itemque eccentricus ab eadem parte habentur rectæ A C, sive loci æquinoctiorum Saturni, inde certo colligi ajo, Tellurem ac Saturnum ita positos esse uti in F & N. Nempe ut vel diversas ad partes ipsius A C collocati sint, vel ad easdem quidem, sed ita ut Saturnus amplius ab ea quam Tellus distet. Ideoque, secundum ante demonstrata, eandem annuli superficiem quæ à Sole illustratur oculis quoque nostris obversam esse. Nam cum L N producta ostendat inter fixas locum Saturni excentricum, F N vero locum ejus apparentem, ac uterque cadere ponatur in partem eandem loci illius quem inter fixas exhibet L C: manifestum est rectam F N ab N porrò productam neque secare debere neque parallelam esse rectæ L C, sed semper ab ea magis recedere. Quare necessario punctum F vel propinquius erit rectæ A C quam punctum N, si sint ambo ad eandem partem dictæ lineæ; vel N ad istam, F ad illam partem situm erit. Quod probandum erat.

Denique advertendum etiam, quando vel Saturni locus ex Sole, vel apparens locus incidit in alterutrum æquinoctiorum, quæ determinat producta A C, nempe in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ vel ♓, necessario quoque rotundam phasin exoriri. Si enim locus ex Sole inibi reperiatur, hoc est, si Saturnus occupet punctum A vel C, tunc planum annuli protractum per Solem transire liquet: unde sequitur neutram annuli superficiem tunc luce aliqua perfundi. Rursus vero cum locus ejus apparens incidit in dictos æquinoctii locos, hoc est, quando recta à Tellure ad Saturnum extensa parallela incedit ipsi A C; velut cum Saturnus situs est in O, tellus in *f*, eo positu productum annuli planum oculo nostro occurrere constat, quoniam communis ejus intersectio cum plano orbitæ Saturni ipsa est O *f* recta: Unde fit ut neutram superfi-

ciem annuli, etiamsi altera jam illarum Solis radiis splendeat, conspicere possimus.

Quaenam Saturnicolis sint loca aequinoctiorum.

Nunc illud videamus, quemnam Eclipticae locum teneat recta A C Saturni aequinoctiorum linea: quam quidem in ♍ & ♓ gr. 20½ cadere diximus, verum qua ratione id ex observationibus collegerimus declarandum est.

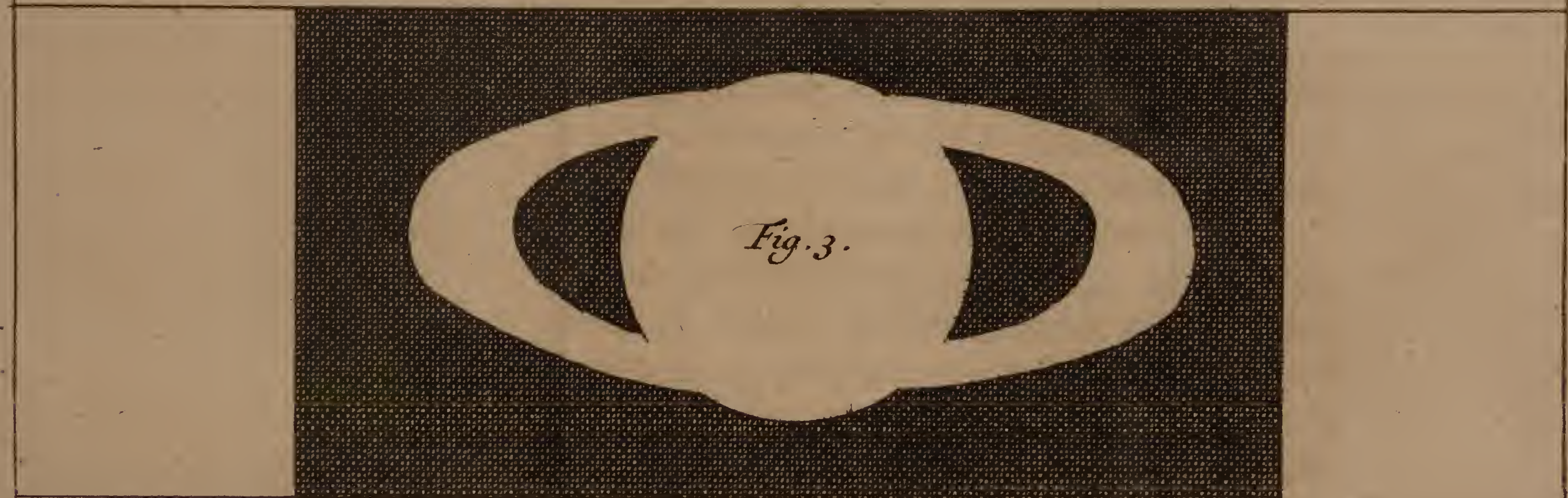
Saturnum brachiis carentem ac prorsus rotundum spectavimus à Mense Decembri anni 1655, usque in Jun. 1656. Quae phasis ex ea causa, quam modo retulimus, tanto tempore durare potuit, si linea A C eum ipsum locum obtinere ponatur quem & Saturnus tenebat tunc cum Soli esset oppositus, hoc est, ♍ gr. 20. Hinc enim fieri debuit ut toto illo tempore Saturnus ac Tellus ab eadem parte lineae A C simul consisterent, atque ita quidem ut Saturnus ei vicinior esset; semel autem eodem momento, nempe oppositionis tempore, in ipsa A C reperirentur: unde non nisi rotunda phasis potuit existere, sicut ex praedictis intelligitur.

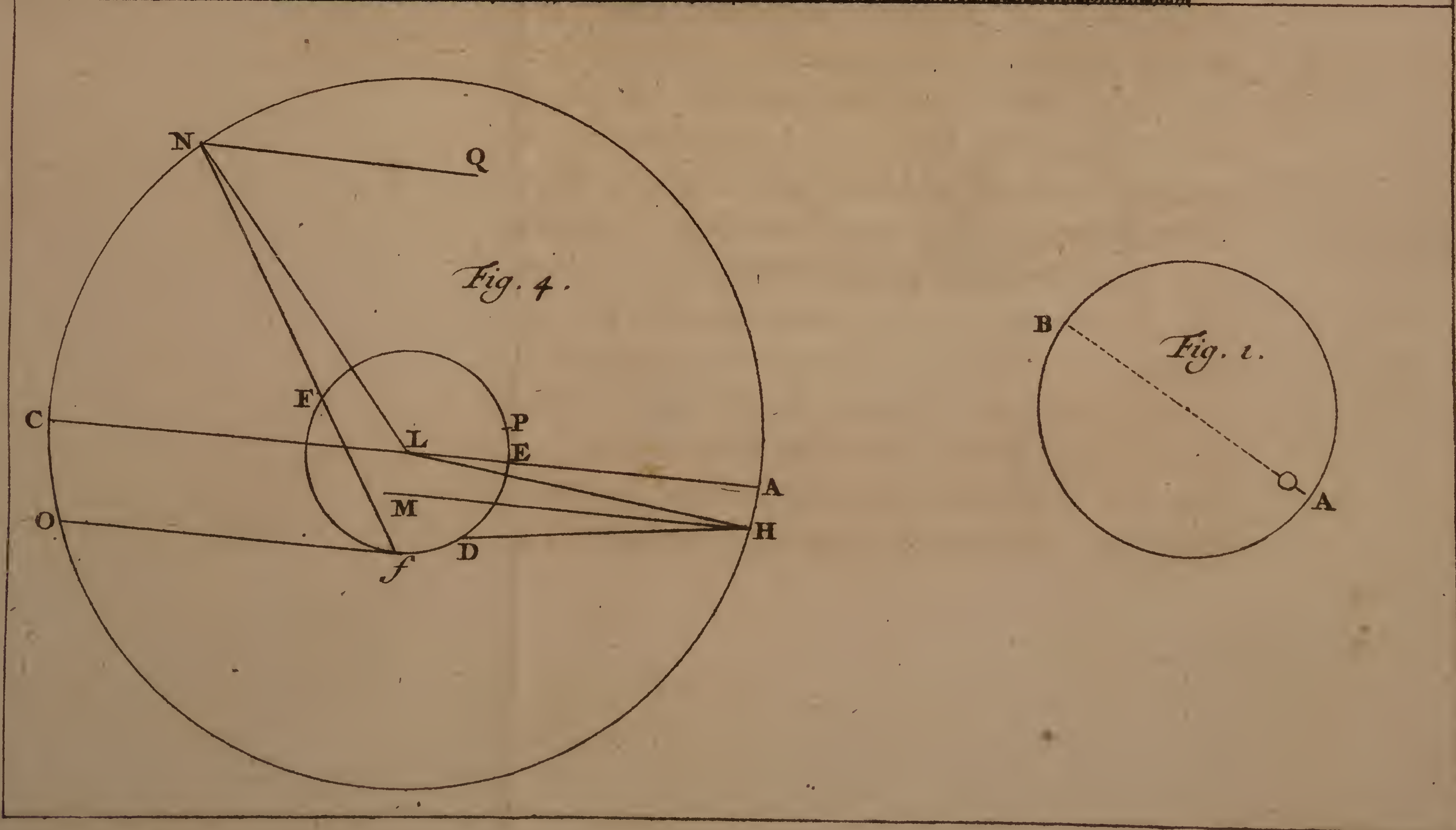
Caeterum uti non admodum versimile est (etsi fieri potuerit) eo ipso tempore oppositionem illam contigisse cum Saturnus in aequinoctii sui linea A C situs esset, ita non verebimur hanc lineam dimidio gradu emovere loco illo, atque in gr. 20½ ♍ eam transferre; quum hoc positu melius satisfiat aliis rotundae figurae observationibus, anni 1642 & 1612, ac nihilo secius nostra illa anni 1656 conciliari queat, ut ex sequentibus liquebit. Posita itaque A C in gr. 20½ ♍ & ♓ sequitur rotundam phasin, ab usque principio Augusti anno 1642, ad Febr. 1643, continuè perseverasse, prorsus quemadmodum à Gassendo aliisque fuit adnotatum. Erat enim ineunte Augusto locus Saturni eccentricus in 20 gr. ♓, hoc est, dimidio gradu praecedebat locum aequinoctii: at locus apparens in 24 gr. ♓, atque ita gr. 3½ eundem aequinoctii locum transierat. Quare superficiem annuli illuminatam Gassendus nequaquam conspicere potuit, sed eam quae tenebris tegebatur sibi obversam habuit. Et sic quidem locus Saturni apparens eccentricusque perpetuo diversis in partibus loci aequinoctiorum persliterunt usque ad initium fere

Febr.

TAB. L.


Fig. 2.
L
R
D
I
T
A
N
H
G
E
P
F
K
C
Q
B
S
M
O


Fig. 3.


N
Q
Fig. 4.
F
C
L
P
E
A
M
O
H
f
D
B
Fig. 1.
A

Febr. 1643, unde non nisi rotunda forma prodire potuit, ut antea demonstratum est.

Idem quoque phænomenon anno 1627, proculdubio sese obtulit, sed observatorum penuria an supinitate præteriit inobservatum; cum nemo, quod sciam, prodiderit, utrum Saturnus eo anno cum globulis apparuerit an secus.

Anno autem 1612, à Galilæo primo omnium rotunda facie animadversus est. Scribit is ad Marc. Velserum Epistola de Solaribus maculis 3. circa solstitium quidem illius anni, tricorporem adhuc Saturnum sibi visum, inde verò, cum duobus mensibus atque amplius telescopio eum inspicere omisisset, ut qui nullam formæ mutationem animo præsagiret, postea nihil minus cogitanti solitarium oblatum, talemque deinceps in illam usque diem, quæ prima Decembris erat, permansisse. Quæ quidem observatio hactenus hypothesi nostræ consentit, ut si eo transitu lineæ A C rotundus apparere Saturnus debuerit, id hoc anno neque alio accidere fuerit necesse. Sed cum per totum hunc annum Saturni locus, quà apparens, quà eccentricus, ab eadem parte manserit loci æquinoctiorum, sive ♓ gradus $20\frac{1}{2}$; videbatur ex præcedentibus colligendum, salvis brachiis suis eum præterlabi potuisse, quod tamen contra evenit. Et sexto quidem Septembr. dicti anni 1612, quo tempore jam rotundum Galilæus reperit, erat ejus locus ex Sole simul & apparens, in gr. 14, 44′ ♓. Hoc est g. 5. 46′ citra locum æquinoctii sui. Adeo ut solares radii atque ii qui à visu terricolarum fluebant in eandem annuli Saturnii superficiem inciderent: non tamen angulo g. 5. 46′ desuper in planum ejus directi, sed gr. 2. 15′ duntaxat. Hic enim elevationis angulus, ut hoc obiter adnotemus, sic se habet ad illum gr. 5. 46′, quo Planetæ locus distat ab æquinoctio suo, quemadmodum apud nos declinatio Solis ad ejusdem ab æquinoctio distantiam. Quandoquidem non aliud respectu Saturni est planum annuli sui, atque nobis est planum æquatoris, similique etiam angulo ad eclipticæ planum inclinatur. Proinde cum cognita est distantia loci Saturni eccentrici ab æquinoctio suo,

si scire libeat quali angulo Solis radii in superficiem annuli deferantur; quærendum in tabula declinationis Eclipticæ, qualis apud Astronomos in usu est, quanta sit declinatio loci alicujus qui tantundem à princ. Arietis absit. Ea enim est ipse angulus quæsitus. Ac simili quoque ratione cum data erit distantia loci Saturni apparentis ab æquinoctio suo, hoc est, à gr. 20½ ♍ aut ♓, invenire licebit quonam angulo desuper planum annuli nos inspectemus; qualemque propterea ellipsin ille nobis exhibere debeat. Ex eadem nimirum tabula capiendo declinationem huic distantiæ à pr. Arietis respondentem, quæ declinatio rursus hîc quæsitum angulum æquat. Quorum demonstrationem adferre operæ pretium non est, quippe quam Astronimiæ periti facile perspicient.

Illud verò videndum, qui evenerit ut visu nostro ac Sole simul supra planum annuli plus quam 2 gr. altis, nullum tamen brachiorum apud Saturnum vestigium apparuerit. Anne hæc fortasse causa fuit quod ellipsis annuli, tam obliquè inspecta ut magis tenuissimæ lineæ similitudinem præferret, exiliorem lucem emittebat quam quæ Galilæi tubo percipi posset. Hoc quidem non improbabile videri queat, nisi eodem tubo, circa solstitium ejusdem anni 1612, brachia Saturni sive bini illi, ut tum putabant, satellites Galilæo animadversi fuissent, quo tempore Saturnus observabatur circa gr. 18 ♓. hoc est gr. 2½ ab æquinoctio suo remotus, ideoque visus noster vix uno gradu plano annuli superior. Etenim si hoc positu brachia cerni potuere, multo clarius cerni debuissent tunc cum gr. 2. 15′ supra idem planum visus extolleretur, initio nimirum Septembr. magisque etiam 24 Nov. ejusdem anni 1612, tempore stationis Saturni; quia tunc gr. 11. 10′ ♓ tenebat, eoque gr. 9. 20′ ab æquinoctio suo aberat; adeo ut angulo gr. 3. 42′ radii visus in planum annuli descenderent. Atqui hîc, vel certe circa hæc loca brachiorum expers mansit, quum satis utique diligentem ac intentum observationibus Galilæum fuisse per eos dies credibile sit, qui rotundæ phaseos miraculo nuper esset excitatus.

Ita-

Itaque in tenuitatem brachiorum, cur ea penitus latuerint causa conferri non potest. At neque transponendo amplius Saturni æquinoctiorum locum, quicquam proficimus; ne quidem si mobilem statuamus lento quodam progressu, ad similitudinem nostrorum æquinoctiorum, quæ sensim in præcedentia referuntur. Quamobrem non aliam hujus rei causam esse crediderim quam quæ nunc dicetur.

Certum est cognitæque experientiæ, superficiem quamlibet ab eodem lumine plus minusve illustrari, prout directis vel obliquis radiis exposita est: quod & à Galilæo, dialogo 1. de Mundi systemate, optimè est demonstratum. Quamobrem cum exiguo admodum angulo supra annuli Saturnii planum Sol attollitur, puta gradus unius vel duorum vel etiam duorum cum dimidio, hoc est, cum Saturni locus eccentricus non ultra gr. 6. ab æquinoctio suo aberit, etiam prætenui tantum luce annuli superficies à Sole impertietur. Hanc autem, ita leviter splendentem, verisimile est à meris tenebris nos discernere non posse, præsertim Saturnii globi vicino fulgore præpeditos; eoque ansas tunc nullas animadverti. Qua tamen in re illud ante omnia statuere necesse est, superficiem annuli non esse asperam montibusque obsitam, veluti maxima ex parte Lunæ nostræ est superficies: sed æqualem planamque velut in iis Lunæ regionibus, quas nonnulli maria esse ob insignem planiciem arbitrati sunt.

Alioqui enim, sicut Luna plena circa disci sui extrema, ubi tamen obliquos Solis radios excipit, nihilo languidiori lumine quam versus medias partes cernitur, scilicet quia illic tota montosa atque aspera est, ita annuli quoque superficies si simili natura prædita foret, non secus obliquè incidentibus radiis quam directis splendesceret. Quamobrem necessario plana, uti diximus, censenda est. Atque hinc jam intelligere licet cur Galilæo à Mense Septembri anni 1612 usque in Febr. 1613, quoad nempe Heliacè Saturnus occideret, nullæ circa eum ansæ conspicerentur. Quia nempe inde à Septembri continuè locus Saturni eccentricus ad æquinoctii locum appropinquavit, eoque altitudo Solis supra an-

nuli planum, quam initio Sept. tantum gr. 2. 15′, fuisse diximus, simul imminuta est. Pari ratione nec Gassendus brachia ulla percipere potuit mense Febr. anni 1643. etsi tunc quoque Sol oculusque observantis eandem annuli superficiem intuebantur; scilicet quia Saturni locus eccentricus in gr. 26. ♓ inveniebatur, hoc est 5½ gr. à loco æquinoctii, eoque altitudo Solis supra annuli superficiem tantum g. 2. 11′. Denique & anno 1656, mensis Martii diebus aliquot, quibus similiter eadem annuli superficies ad nos Solemque spectabat, multo minus brachiorum ullum vestigium apparere debuit, quod nunquam dimidio gr. supra planum annuli Sol attolleretur. Nam reliquo tempore fulsionis illius, diversas partes loci æquinoctiorum locus Saturni ex Sole atque observatus locus obtinebant, unde ex superius allata causa brachiorum expertem cerni oportuit.

Neque verò magis conspicuum nobis annulum fieri credendum est, si altius supra planum ejus oculus attollatur, Sole tamen ex obliquo tantum radiis suis eum perstringente, quemadmodum contigit dicta Saturni statione ad 14 Nov. 1612; quippe quo tempore Sol gradu 1. 36′ supra planum annuli ascenderat, visus autem noster gr. 3. 53′. Idem enim in quacunqne plana superficie experiri licet, in quam si à latere radii luminis incidant, non apparebit illustrior quocunque in loco visus statuatur, sed tum demum, si radios à lumine rectiores accipiat. Uti contra quoque si amplius ad lumen obversa directiusque illuminata fuerit, non refert quàm obliquè in eam radii visus incidant, sed undecunque spectata æque lucida apparebit. Atque ita fit ut cum Sol paulo altius supra planum annuli sese extulit, tribus puta gradibus aut paulo amplius; visu licet nostro non nisi uno gradu extante; splendere jam nunc annulus incipiat, Saturnoque brachia adnascantur. Sicut anno 1612. circa solstitium accidit, Saturno ex Sole circa gr. 12. ♓, hoc est, gr. 8½ ab æquinoctio suo agente, ac proinde Solis altitudine supra planum annuli graduum 3. 23′: Galilæi verò oculo vix uno gr. supra idem planum elevato. Videbatur enim Saturnus

nus in gr. 18. ♓, hoc eſt 2½ gr. à loco æquinoctii, quæ diſtantia dat declinationem gr. unius.

Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur.

Ut igitur ſecundum hæc de rotunda phaſi judicium feratur, illud in primis reſpicere oportet, quod gradibus ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ vel ♓, Saturni locus eccentricus abſit. Ac mihi quidem phænomena antecedentia expendenti, videtur ita ſtatuendum, ut quoties non amplius quam 6 gr. circiter in alterutram partem, à dictis locis Saturni locus ex Sole diſtabit, nunquam brachia ejus conſpici queant, quicunque demum oculi noſtri ſitus fuerit; hoc eſt, nulla ducta ratione Saturni loci apparentis. Quod tamen ita accipiendum eſt, ſi perſpicillis non melioribus quam quibus Galilæus & Gaſſendus uſi ſunt Saturnus inſpiciatur. Nam ſi noſtris ſimilia adhibeantur, forſitan jam in illa 6 graduum diſtantia tenue quoddam brachiorum exordium percipi poſſit. Certè anno 1656, 13. Oct. renata illa vidimus, cum Saturni locus ex Sole tantum gradibus 6. 46'. æquinoctii ſui punctum prætergreſſus eſſet. Erant autem æquè conſpicua ferè atque ante phaſin rotundam, anno 1655. At ii qui minoribus teleſcopiis eum tunc obſervitabant, ut Joh. Hodierna, penè adhuc rotundum repererunt: ait enim is, tantum tenuiſſimos quoſdam veluti radios utrinque è lateribus Saturnum vibrare viſum. Quamobrem noſtris teleſcopiis fortaſſe arctiores paulò prædicti limites ſumendi ſint; quod tamen minimum quid erit, ſequentiumque annorum experientiâ definiendum.

Rurſus cum amplius 9. gradib. vel forſan ſupra 8. gr. ſolum, ab æquinoctiis ſuis ſive 20½ gr. ♍ aut ♓ locus Saturni eccentricus diſtare invenietur, jam inde brachiis anſiſve præditum dicemus: nullâ ne hic quidem apparentis loci conſideratione, quoniam hinc jam apparens locus & eccentricus ab eadem parte loci æquinoctialis habentur; ac propterea eadem annuli ſuperficies, per ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, Soli & viſui noſtro obverſa eſt, idque ita ut Sol plus tribus gr. ſupra ipſam elevatus ſit, viſus vero noſter ut minimum gr. uno: quo fit ut brachia ſaltem tenuia animadverti debeant.

At

At cum nondum gr. 8 aut 9, plus verò quam ſenis, eccentricus locus Saturni à 20½ gr. ♍ aut ♓ aberit, videtur etiam apparens locus expendendus eſſe, nempe circa quadratum quem vocant Saturni cum Sole aſpectum. Fieri enim poterit ut non ultra gradus unius ſemiſſem locus apparens ab æquinoctii loco remotus ſit, ideoque viſus noſter tantum 12′ ſuper annuli ſuperficiem exurgat; quæ cum à Sole ſimul debiliter illuminetur, vix puto ſe videndam præbebit. Quum autem duo contingant quadrati aſpectus ſingulis Saturni fulſionibus, priori eorum ita demum illud quod diximus perpendere opus erit, ſi locus planetæ ex Sole præcedat gr. 20½ ♍ aut ♓, poſteriori verò non niſi ſequatur. Nam ſi ſecus fuerit jam certo brachiis auctus cernetur.

Et ſic quidem quod maximè perplexum in toto hoc negotio inerat, nulla diſſimulata difficultate, pertractavimus. Illud enim inquirere voluimus an certis locis rotunda phaſis alligari poſſet, ita ut omnibus huc uſque obſervatis fieret ſatis. Quod & præſtitimus tandem, etſi arctis adeo limitibus circumſcripti, ut ne minimum quidem ultra citrave ab iis diſcedere ſalvis apparentiis licuerit. Simul verò hoc operæ pretium fecimus, quod de futuris Saturni phaſibus haud dubia prænuntiare in poſterum licebit. Etenim ſi modo tabularum Aſtronomicarum ope inveniatur, quo tempore Saturni locus ex ſole ſive eccentricus, cadat in gr. 20, 30′ ♍ vel ♓; ſenis menſibus qui id tempus præcedunt totidemque ſequentibus brachia nulla percipi poſſe manifeſtum erit; quoniam ſcilicet in menſes ſingulos gradu uno Planetæ locus ex Sole promovetur. Præterquam quod aliquando uno etiam atque altero menſe citius rotunda phaſis exiſtet, aliquando tanto diutius videri perſeverabit; ſi nempe quadrante cæli per id tempus Saturnum à Sole diſtare contingat, locuſque Planetæ eccentricus, ea qua diximus lege, præcedat vel ſequatur ♍ aut ♓ gr. 20. 30′.

Secundùm hæc igitur, quoniam in gr. 20, 30′ ♓ incidit locus eccentricus die 12. Jan. 1672″, exiſtimo anno 1671 & 1672 Saturnum brachiis cariturum; non toto utriuſque anni tem-

tempore, sed hoc pacto, ut mensibus quidem Aprili, Majo, Junioque anni 1671, nondum iis spoliatus cernatur, sed tenuia etiamnum utrinque extent qualia sub finem anni 1656 observavimus. Julio autem aut Augusto gracilescant prorsus tandemque dispareant & rotundum Saturnum relinquant. Quo vultu non tantum ad Heliacum occasum usque conspiciendus erit, hoc est usque ad finem Februarii anni 1672; sed eundem quoque exoriens rursus mense Aprili referet, nec amittet nisi Julio mense aut Augusto. Circa hoc enim tempus adcrescere denuo brachia cernentur, ac paulatim evidentiora fieri; tandemque etiam singula prope medium Saturni orbem bifida evadent, quemadmodum ab anno 1656 deinceps augeri ea vidimus.

Quibus temporibus rotunda phasis reversura sit prædicitur.

Manebunt autem ad annum usque 1685, quando rursus evanescentia spectare continget, nempe circa Martii initium. Inde rotundus planeta observabitur per annum integrum, excepto eo tempore quo propter Solem delitescit. Adeo ut mense Martio sequentis anni 1686 brachia demum recuperaturus sit, sed tenui tantum incremento quandiu illa vice visendus erit. Locum Saturni ex Sole reperio in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ die secunda Sept. anni 1685, unde prædictas vicissitudines consequi necesse erat.

Rursus verò anno 1701, 15 Jun. redit Saturni locus ex Sole ad ♓ gr. 20, 30′. Unde circa finem anni 1700, principiumque 1701, priusquam Heliace occidat, rotundus lucebit, ac porro quoque ubi jam ex Solis radiis emerserit, ea facie permanebit ad initium usque anni 1702: à quo tempore ad occasum usque Heliacum tenuia fortasse brachia cerni poterunt. Absque dubio autem, mense Majo ejusdem anni, cum denuo observari cœperit, restituta invenientur.

Atque ita porro singulis quatuordecim aut quindecim annis, nimirum bis ad singulas Saturni in sua orbita revolutiones, rotunda forma conspicienda dabitur; neque enim unquam æquinoctii sui locos transire quin brachia amittat potest. Ac facile quidem accurata mutationum ejusmodi tempora vestigiis nostris insistendo, quilibet inposterum præfi-

niet, certiusque etiam ubi renascentes Saturni ansas conspexerit.

Cæterum ad eos observandos, quos hic adnotavimus, alatæ formæ ad rotundam transitus, Astronomos omnes intentos esse cupimus. In quorum prædictione si à veritate aut nihil aut pauxillum tantum aberrasse nos invenient, tum procul dubio causas quoque horum phænomenôn germanas qualesque revera sunt sibi explicitas credant. Sin longè hallucinati fuerimus, adeo ut brachiis præditus planeta cernatur, quo tempore ex sententia nostra vel maximè iis carere deberet; indicio id erit, quædam circa rotundam phasin accidere nobis nondum satis perspecta, nec ulli mortalium forsitan pervidenda. Nec tamen annuli propterea hypothesin rejiciendam existiment, quandiu reliquis quæ circa ansas animadvertentur ad amussim, uti hactenus, consentiet.

Quando latissimæ omnium ansæ apparituræ sint.

Porro in hisce ansatis Saturni phasibus, cum nulla adeo subita mutatio locum habeat, ideo nec tempora singularum tam accuratè ut in rotunda distinguere necesse fuit; sed in universum scire sufficit, phasin ansatarum latissimam medio tempore inter duas rotundas incidere; ut proinde circa annum 1663 & 1664 illa reversura sit; iterumque anno 1678 & 1679; ac postea anno 1693. Reliquis enim inter istos intercedentibus annis, tanto angustior annuli ellipsis cernetur, quanto magis rotundæ phaseos tempus imminebit. Et hactenus quidem eorum quæ circa Saturnum observantur causas ac tempora digessimus.

Nunc fortasse haud alienum proposito videatur, si quemadmodum ex nostra hac statione hucusque systema ejus contemplati sumus, ita ad ipsius Saturni globum deinceps cogitationem transferamus, atque illud dispiciamus, qualis inde universi facies, quænam futura sint intervalla annorum mensium ac dierum, quæve æstatis hyemisque vicissitudo, ac præsertim qualia ob annulum planetæ circundatum contingere eum inhabitantibus necesse sit: ut nonnunquam longo tempore aliquos conspectu Solis privet, aliàs rursum nocturnas tenebras imminuat, arcus lucidi specie horizonti il-

lo-

lorum superstans. Verum eo labore supersedere rectius arbitror, tum quod Astronomiæ gnaris singula hæc expendere, sibique ob oculos ponere, non sit difficilè futurum; tum quod in his ipsis multi sint, (ut alios mittam) quibus otiosa & inanis ejusmodi disquisitio videretur; ac tanto quidem magis, quanto absurdius putant ut animantia aliqua ratione prædita Saturnum ac reliquos Planetarum incolere credamus.

De magnitudine autem Saturni ejusque à terris distantia operæ pretium videtur ut sententiam nostram his subjiciamus, siquidem & alio modo illas inquisivimus quam quo fieri solet, & aliquanto aliter de utraque statuimus. Nempe sphærulam illam annulo cinctam quam sub exiguis modò lineamentis spectavimus, diametrum quindecies circiter majorem habere, quam nostra hæc in qua degimus terra, putandum est; abesse autem à nobis, cum poxima est, terræ diametris 100344; cum longissimè distat, 122000. Quæ quidem sequenti ratiocinio nituntur.

De Saturni magnitudine & à terris distantia.

Docuit nos novo suo ac divinitus invento systemate Copernicus, quamnam inter se proportionem servent singulorum à Sole Planetarum distantiæ, apparentes vero eorundem diametri quanto aliæ aliis majores sint telescopii ope innotescit. Collatis ergo invicem rationibus utrisque, tum distantiæ tum magnitudinis apparentis, vera inde planetarum ad se mutuo, nec non ad Solem magnitudo cognoscitur. Et ad Saturnum quod attinet, primùm annuli ejus diameter, quum in minima à nobis distantia comprehendatur angulo sexaginta & octo scrupulorum secundorum; talem enim ad summum reperimus; cumque minima hæc Saturni distantia ad mediocrem Solis distantiam sit fere octupla; sequitur, si tam propinquus nobis fieret Saturnus quam Sol in distantia mediocri, apparituram tunc annuli diametrum octuplam ejus quæ nunc apparet, hoc est 9′, 4″. Solis autem diameter in media distantia est 30′, 30″. Ergo revera ea erit proportio diametri annuli Saturnii ad diametrum Solis quæ 9′, 4″, ad 30′, 30″, hoc est, fere quæ 11 ad 37. Diameter verò Satur-

Quanta appareat major Saturni diameter.

turni ipsius, quam superius diximus ad annuli diametrum se habere ut 4 ad 9, hoc est fere ut 5 ad 11, ad diametrum Solis erit paulo minor quam 5 ad 37.

Quanta vero sit Saturni diameter ad Telluris diametrum collata haud æque certo definiri potest. Astronomi ita hoc investigant, ut primò intervallum inter terram ac Solem ad certum terrestrium diametrorum numerum revocent, inde quæsitam magnitudinum rationem eliciant. At in illo Solis terræque taxando intervallo nimium quantum inter se dissentiunt; nec mirum, quum nulla adhuc tolerabilis methodus ad dimetiendum hoc spatium reperta sit. Nam sive per Eclipses sive per Lunæ dichotomias id deprehendere conentur, facile ostendi queat inanem operam sumi. Quare mihi quidem unica illa, quam dicam, ratio reliqua esse videtur, qua saltem verisimiliter de Planetarum omnium ad terram magnitudine ac distantia statui possit. Telescopio diametri Planetarum apparentes explorentur; ex his singulorum deinceps ad Solem comparata magnitudo investigetur, ut de Saturno modo exemplum dedimus; omnibusque perpensis, ea Telluris ad cæteros assumatur magnitudo, quæ totius systematis ordini aptæque dispositioni quàm maxime congruere videbitur. Ita cum proportio diametrorum Telluris ac reliquorum Planetarum ad Solis diametrum constituta fuerit, constetque insuper quot suis diametris Sol à nobis distet, ex angulo videlicet quem subtendit diameter ejus apparens, jam terræ quoque ad Solem magnitudo nota erit; atque unà Solis distantia, tum à terra tum à cæteris Planetis, Terræ diametris æstimabitur. Hanc itaque nunc viam ingredi placet, ideoque sicut Saturnum cum Sole modo comparavimus, ita de reliquis quoque simile examen instituemus.

Jovis terris proximi diameter apparens quanta observetur.

Jovis diameter, cum proximè nobis adest, sexaginta quatuor secunda scrupula comprehendere mihi videtur; quumque hæc ejus distantia ad mediam Solis distantiam sit ut 26 ad 5, hinc si fiat ut 5 ad 26 ita 64″ ad aliud, invenientur 5′, 35″, amplitudo anguli quem obtineret Jovis diameter si tam propinquus nobis fieri intelligatur atque Sol in distantia

me-

mediocri. Sol autem hîc apparet diametro 30′, 30″. Ergo Jovialis diametri ad Solarem hæc proportio erit quæ 5′, 35″ ad 30′, 30″, hoc est paulo major quam 1 ad 5½.

Veneris diameter apparens. Accuratè etiam diametrum Veneris dimensus sum, ea quam postmodum exponam methodo, invenique cum terris proxima est, non majorem fore quam octoginta quinque secundorum scrupulorum. Est autem distantia hæc Veneris perigææ ad mediam Solis à Tellure distantiam circiter ut 21 ad 82. Ergo si apud Solem Venus consisteret appareret ejus diameter duntaxat 21″, 46‴. Unde constat ita esse diametrum Veneris ad Solis diametrum ut 21″, 46‴ ad 30′, 30″, hoc est ut 1 ad 84.

Martis diameter. At Martis diametrum terris proximi non excedere 30″ deprehendi, etsi observatione non tam exacta quam qua in Saturno, Jove & Venere usus sum, quippe cujus rationem novissimo Martis ad Tellurem accessu nondum inveneram. Unde quum distantia Martis minima sit ad mediocrem Solis ut 15 ad 41; colligitur ratio diametri Martis ad diametrum Solis ea circiter quæ 1 ad 166. Mars itaque duplo minor Venere secundum diametrum hac ratione efficitur. Atque adeo manifestum est in Planetis non ubique eum servari ordinem, ut qui remotiores à Sole sunt iidem quoque majori sint mole: nam & Jovis sphæra Saturno sine annulo major inventa est. Quo fit ut minus liquido de Terræ ad cæteros Planetas proportione æstimatio iniri possit. Nam si pro ratione ordinis magnitudines essent attributæ, ut Saturnus Jove major esset, Jupiter Marte, hic Venere, hæc Mercurio; inde quidem penè certo colligere liceret, Telluris magnitudinem esse inter Martem Veneremque mediam. Cum verò in aliquibus contrarium deprehendatur, non æquè quid sequendum sit apparet. Veruntamen ut quatenus fieri potest totius systematis concinnitas observetur, id nunc quoque maximè consentaneum videtur, ut sicut loco media Terra est inter Martem & Venerem, ita quoque sit magnitudine. Martis diametrum diximus diametri Solis esse $\frac{1}{166}$; Veneris vero diametrum $\frac{1}{84}$. Inter utramque mediam igitur terræ dia-

metrum ponendo fiet ea $\frac{1}{111}$ diametri Solis. Hujus autem $\frac{5}{37}$ diametro Saturni æquales repertæ ſunt; ergo Saturni diameter Telluris diametrum continebit quindecies, diameter vero annuli Saturnii eandem Telluris diametrum circiter trigeſies & quater. Unde eximia horum corporum magnitudo cognoſcitur; quæ ſane omnem ab aliis hactenus traditam facile exuperat.

Hinc verò & intervallum inter Terram ac Solem neceſſario omnium exiſtimatione majus conſtabitur. Si enim diameter terræ diametri Solis $\frac{1}{111}$ continet; Solis autem diameter ſuæ à nobis mediæ diſtantiæ $\frac{1}{113}$ æquat, uti ſequitur ex eo quod diameter ejus obſervetur 30′, 30″; erit certè Terræ diameter $\frac{1}{12543}$ diſtantiæ quæ eſt inter ipſam ac Solem. Deinde cum Saturni minima diſtantia ſit ad mediam Solis diſtantiam ferme octupla, hinc Saturni, cum Terræ proximus eſt, diſtantia habebitur diametrorum terreſtrium 100344; cum verò plurimum aberit, circiter 122000.

Fateor equidem lubrica eatenus ratione hæc niti, quatenus nimirum Terræ magnitudinem inter Martem Veneremque mediam adſumſimus, nullo niſi veriſimilitudinis argumento: adeoque vel millenis aliquot Terræ diametris facile à veritate aberrari potuiſſe. Verùm ut jam duplo majora minorave quam reipſa ſunt intervalla iſta definiverimus, aut triplo etiam; non tamen parum videri debet hactenus ſaltem menſuram eorum comprehendiſſe, quum alia nulla ratio ſuppetat qua non vel decuplo major error timendus ſit. Ita enim omnino exiſtimo. Ad reliquum verò calculum quod attinet, quo Planetarum diametros Solis diametro comparavimus, ſciendum eſt nihil in eo conjecturæ tribui, ſed ex iis quæ data ſunt certa ratione illum procedere. Atque adeo poſitis iis Planetarum diametris apparentibus quas à nobis obſervatas diximus; non poſſe non Solis diametrum ad diametrum annuli Saturno circumdati ſeſe habere ut 37 ad 11; ad diametrum vero Saturni ipſius, ut 37 ad 5; ad Jovis diametrum ut 11 ad 2; ad Martis ut 166 ad 1; ad Veneris ut 84 ad 1. De Mercurio non definiam priuſquam ritè eum dimen-

Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio.

menſus fuero; quod hactenus non ſucceſſit, cum ob exilitatem ſideris, tum quod horizonti plerumque vicinum inveniatur, ubi vapores è Terra ſurgentes tremula quadam refractione figuram ejus præciſo ambitu terminari non ſinunt. Patet autem & Saturnii globi diametrum ad diametrum Jovis rationem habere quam 55 ad 74: diametrum vero Martis continere amplius quam vicies & bis, ad Veneris diametrum eſſe ut 34 ad 3. Jovis item diametrum diametri Martis amplius quam trigecuplam eſſe; diametri vero Veneris amplius quam quindecuplam; ac denique Martis diam. ad diametrum Veneris circiter ſubduplam. Quæ omnes proportiones ratæ fixæque permanent, quantacunque diſtantia Solem inter ac Tellurem ſtatuatur, ſi modo apparentes diametri quales tradidimus retineantur. Haſce autem quo modo obſervaverimus denique dicendum eſt, atque eo magis quod longè ab aliorum ſententia alicubi recedamus: veluti cum Veneris diametrum triplo minorem aſſerimus quam à Ricciolo definita eſt, qui tamen ſumma cura circa hæc verſatus videtur. Noſtrum igitur artificium eſt hujuſmodi.

Ratio obſervandi Planetarum diametros apparentes accuratiſſima.

Locus quidam eſt intra tubos qui Solis convexis vitris inſtructi ſunt, circiter altero tanto amplius quàm convexum oculare ab oculo diſtans; quo in loco ſi quid intra tubi cavitatem viſui objiciatur, quantumvis ſubtile aut exiguum, id diſtinctè prorſus ambituque exquiſitè terminato conſpicitur, atque ita pro ratione latitudinis ſuæ partem aliquam rei lucidæ, velut Lunæ per teleſcopium ſpectatæ, viſui ſubducit. Exacta loci determinatio, his quibus nullo vitio viſus laborat, in focum convexi ocularis cadit; myopi aliquanto propinquius punctum accipiendum eſt, contraque, qui tantum à longinquo clare vident, paulo remotius; quod experientia protinus docere poteſt. Hîc igitur ſi primò annulus ſtatuatur cum foramine paulo anguſtiore quam ſit vitrum ipſum oculo proximum, eo tota tubi apertura, ſive ſpatium circulare quod uno obtutu in cælo detegitur, præciſâ circumferentiâ deſcriptum habetur. Cujus ſpatii diameter, quot ſcrupula comprehendat, aliquo pacto inquirendum eſt, atque optimè qui-

quidem ex transitu sideris alicujus, cujus tempus numeretur vibrationibus perpendiculi, vel ope Horologii nostri oscillatorii nuper inventi, telescopio interim immoto manente. Scimus enim 4 scrupulis horariis unum cæli gradum & exiguum quid amplius transire: ideoque si verbi gratia numerentur scrupula secunda 69 interea dum stella quædam fixa totam telescopii capacitatem emetitur, argumento id erit $17\frac{1}{4}$ scrupula prima, telescopii hujusmodi apertura comprehendi, sicut nostro evenit. Quo invento virgulam unam atque alteram ex ære aliave materia parare oportet, decrescente paulatim latitudine, tubumque perforare utrinque circa locum illum paulo ante memoratum, quo possint in ipso ejus puncto virgulæ transversæ ante oculum obtendi. Cum igitur Planetæ alicujus diametrum metiri cupimus, adhibitâ eo quo diximus loco virgulâ, notandum est quænam hujus latitudo totum Planetam contegere possit. Eâ enim latitudine acuto deinde circino acceptâ, atque ad totius foraminis amplitudinem collatâ, Planetæ diameter apparens facili ratiocinio innotescet. Sic die 29 Dec. 1658 diametro Veneris invenimus convenire virgulam cujus latitudo æquabat $\frac{1}{20}$ totius foraminis: est autem hoc, uti diximus, 17′, 15″. Ergo Veneris diameter erat 51″, 45‴. Distantia autem Planetæ ad minimam suam à Terris distantiam se habebat circiter ut 27 ad 16, ergo diameter ejus terris proximæ efficitur 87″, 20‴. Rursus anno 1659, 8 Mart. hora 6 mat. Veneris diametrum observavimus quæ æquabat $\frac{4}{67}$ aperturæ telescopii. Ideoque erat 61″, 30‴. Distantia autem eo tempore ad minimam Veneris à terris distantiam se habebat ut 430 ad 316, ergo diameter ejus maxima fit 83″, 40‴. Sed & alias eadem methodo semper tantum paulo majorem minoremve invenimus, nam sæpius examen hoc repetivimus, atque ex omnibus medium quid sumentes, 85″ pro maxima Veneris diametro supra statuimus. Hanc autem Ricciolus 4′, 8″, taxavit, atque adeo triplo quam nos majorem existimat, sed procul dubio nuda illa oculi æstimatione, qua hîc usus est, in tantum deceptus fuit. Nam Saturni Jovisque diametros, quas methodo certio-

Diameter Veneris observata.

tiori, appulſu nimirum ad fixas inveſtigavit, eadem fere qua & nos amplitudine definiit, paullum tantum excedens: Saturni enim maximam 72″ continere aſſerit, Jovis item maximam 68″, quæ mihi ſunt 68″ & 64″. Certum autem eſt non magis in Venere, quam in Jove aut Saturno dimetiendis, errori obnoxiam eſſe rationem noſtram. Et Veneris quidem diametrum Hevelius quoque, ad Lunæ maculas inſtituta comparatione, tantum 82″ ſe inveniſſe teſtatur cum circa perigæum verſaretur, unde diameter ejus maxima non multum ſanè noſtram ſuperabit. Porro illud in methodo à nobis tradita commodiſſimum accidit, quod nec Lunæ, nec ſideris cujuſquam conjunctionem, cum eo quem metiri volumus planeta, opperiri neceſſe eſt, ſed omni tempore ejus uſus conceditur. Nec ad planetarum tantum diametros pertinet, ſed ad lunares quoque maculas accuratè deſcribendas, comitumque Jovialium diſtantias accipiendas rectiſſimè adhibebitur. Ad planetarum autem diametros longis atque optimæ notæ teleſcopiis opus eſſe ſciendum eſt. Nec negligendum in Venere ac Mercurio, ut fuligine leviter inficiatur lens oculo proxima, quo perfectius planetæ ambitus circùm terminetur.

F I N I S.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO

IN

SYSTEMA SATURNIUM

CHRISTIANI HUGENII.

AD

SERENISSIMUM PRINCIPEM

L E O P O L D U M

Magni Ducis HETRVRIÆ Fratrem.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO IN SYSTEMA SATURNIUM CRISTIANI HUGENII.

SERENISSIME PRINCEPS.

NOn ita pridem Christiani Hugenii liber de Saturnio systemate Celsitudini tuæ Serenissimæ inscriptus in meas manus incidit, in quo, & de me unum quidpiam, & de reipsa nonnulla esse comperi, quæ cum veritate minùs consentiant. Nollem literatos homines, quibus telescopii majoris copia non est, in errorem induci; cum jam alioquin satis proclives sint ad excipiendam credulis auribus, vel oculis eam rerum cœlestium novitatem, quæ hactenus incompertæ orbi fuerunt: Accedit, quod libelli auctor eam diligentiam à se adhibitam esse attestatur, qua certè quispiam majorem in illo non desideret; quod revera non parvi ponderis est, ad captandam hominum credulitatem, erroremque in eorum animos insinuandum. Itaque meum esse duxi, tum ea, quæ mihi affictá sunt, tum ea, quæ cœteris omnibus errandi occasionem facilè præbere possent, brevi hoc & publico scripto refellere; brevi quidem, ne plus æquo legentibus molestum sit; publico verò, ne privati Hugenii errores publici fiant; aut si jam publici facti sunt, ne quid in-

inde respublica literaria detrimenti capiat, ut publicè à me configantur. Quia vero Hugenius tuis auspiciis libellum suum vulgavit, iisdem ego potiori jure brevem hanc discussionem in publicam lucem prodire volui, qui tot nominibus Celsitudini tuæ Serenissimæ, totique plusquam regiæ Mediceorum familiæ obstrictus sum.

Tria igitur in hac scriptione præstabo; primò enim affictam mihi fraudem amoliar; aliquot deinde Auctoris errores indicabo, ea tamen styli moderatione, quæ & Christianum, & ingenuum, ne dicam, EUGENIUM, hominem deceat: cum demum Auctor scripserit pag. 1. phænomeni Saturni rationem & causam nec Galilæo, nec Astronomorum cuiquam compertam fuisse, eamque dumtaxat explicari posse, inserta Saturnio globo splendentis annuli corona, ne Jovi, quem astra Medicea jure coronant, detrahi corona & jam olim exauctorato Saturno restitui videatur, Fabriani systematis rudimentum quoddam breviter exponam, in quo, adducta Saturni phænomena ea facilitate explicantur, qua, nescio, an major excogitari possit; in ea scilicet terræ quiescentis hypothesi; quam catholici Astronomi amplecti dumtaxat & contra Heterodoxos Aristarchos tueri debent. Cæterùm illa omnia, quæ à me scribentur, æquissimæ tuæ censuræ, ac recto judicio subjecta esse velim; nec abs re, opinor, cùm te literati omnes, ut Mecænatem; & politiorum operum artifices, ut singularem patronum colant; sed ad rem venio.

Primo igitur loco Hugenius, antequam systema Saturnium aggrediatur, præmittit sui telescopii descriptionem; cum enim, ut ipse ait, alia perspicilla non essent, nisi quinque aut sex pedes longa, seriò & maximo studio ad longiora fabricanda animum & manum applicuit: sed advertere potuit ac debuit, in illa observatione mea Saturni, quam ipse refert, mentionem à me factam fuisse telescopiorum variæ longitudinis, quæ ad prædictas observationes adhibueram, scilicet 15. 24. & 36. palmorum; multa autem hujusmodi fabricavi; Illustrissimus Eques Dighby, vir ut nobili genere, ita ingenio perspicacissimo & omni doctrinæ genere conspicuus sex, cum

Ro-

Roma discessit, secum detulit; unum Thomas Paggi nobilis Anglus; Taurinum alterum missum est; Fabritius Guastaferrus Romanus, vir consuetudine & amicitia mihi conjunctissimus, rerumque optimarum studiosissimus, unum habuit; Bononiam unum misi ad Illustrissimum Comitem Carolum Antonium Manzinum, virum sanè rerum istarum peritissimum, doctorem eximium, cujus Dioptricam in dies expectamus, in qua haud dubiè ea legemus, quæ multi hactenus desiderarunt: Unum etiam fabricavi Illustrissimo D. Caramuel Campaniæ Episcopo; omitto alia; nihil enim aliud jam à multis annis ago.

Tum describit telescopium à se fabricatum, longum pedes Rhenolandicos 23. qui si reducantur ad palmos Romanos, quos adhibent architecti, faciunt palmos 31. uncias 4. Vitri objectivi (sic vulgò vocant) orbis apertus diametrum habet pollicum 2. cum triente: seu palmi Romani unc. 3, scrupul. 1. Vitrum oculare ex duobus invicem unitis constans, lenti æquivalet, & radios, parallelos colligit, ac projicit in focum, distantem pollic. 3. prædicti pedis, id est, uncias 4. scrup. 2. palmi Romani: inde porrò deducit Hugenius, vitrum suum objectivum exquisitum esse, cum sit patiens lentis adeo acutæ, ut vocant, & ad veras Saturni observationes, ejusmodi tubos, & vitra adhiberi vult.

Hæc facilè omittere Hugenius potuisset; nec enim his regulis opus erat, cum longè ante fabricata fuerint telescopia, quæ tum longitudine, tum vitrorum figura, tum operis perfectione Hugenianis minimè cedunt; adhibui aliquando tubum 36. palmos longum, ac proinde longiorem Hugeniano palmis 4. unc. 8. orbis autem aperti diameter fuit unc. 4. scrup. 2. sed sublatis 2. illis scrup. propter longitudinis differentiam 4. scilicet palm. unc. 8. restat diameter orbis mei vitri, major diametro orbis vitri Hugeniani unc. 1. ac proinde vel hoc nomine, meum telescopium Hugeniano præferendum, ex vulgari & ab omnibus accepta regula; cum scilicet majoris aperturæ, ut sic loquar, vitrum objectivum patiens sit.

Præ-

Præterea frustra omnino duo vitra in vitrum oculare utrinque convexum conjunxit; cùm unica lens sufficiat: Ego lentem in prædictis observationibus adhibui, radios parallelos colligentem, & projicientem in focum distantem unc. 3. scrup. 2. sed hæc distantia minor est distantia projectionis Hugenianæ unc. 1. igitur lens mea acutior: licet tubi mei longitudo major sit; & cum ex hoc telescopia censeantur, ut optimè ipse observat; inde certè pari jure deduco, meum telescopium præstantius esse; idque triplici nomine. Primò, quia longius est. Secundò, quia vitrum objectivum habet majoris aperturæ patiens. Tertiò quia lentem acutiorem sustinet.

Hugenius pagina libelli 37. de me ita scribit. *Tales autem* (Saturni scilicet ansas) *Eustachius de Divinis notavit annis* 1646. 1647. 1648. *à quo editum Schema ad numerum* 10. *hic exhibuimus; isque cum præstantissimus perspicillorum artifex habeatur, credibile est, omnium emendatissimè Saturni faciem descripsisse, nisi quod umbras illas, quæ in schemate apparent, de suo, ut opinor, adjecit.* Est sanè, quod multas illi gratias habeam, pro iis laudibus, quas mihi ignoto homini ac minimè cogitanti aspersit; sed quid hoc est, *de meo adjecisse*, nisi hominibus imposuisse? Si enim de meo est, fictum est, nec reipsa talem Saturnum exhibui, qualem observavi; quia de meo umbras illas adjeci, quas in Saturno non vidi, nec videre potui, cùm revera in Saturno non sint; fabula igitur est, fictio est; immo in re tanta pro luculenta fraude haberi debet, cum inde homines in errorem facilè inducantur. At si umbras de meo adjeci, Hugenius ejusdem criminis reus est, qui passim, ut suum annulum Saturno injectum meliùs exprimeret, longe majores umbras adjecit: sed profecto neuter adjecit de suo; ut enim globus, corpus scilicet solidum, in plano describatur; aliquid umbræ accersendum est, quo figura solida exprimatur & appareat, alioquin merus circulus evadet: Quis vel tyro in arte graphica hoc nescit? Umbras scilicet accersendas esse ad figuras solidas designandas. Umbram igitur de

TAB. LII. fig. 10.

meo

meo non adjeci, ſed globum in plano deſcripſi, qui tamen ſine umbræ beneficio deſcribi non potuit; Umbra enim facit, ut reliquum figuræ quaſi extare, ac prominere videatur; in quo uno ſtereometria ab ichnographia diſcrepat: aut fortè dicere voluit, cavitatem anſulæ Saturniæ nigriore, quàm par ſit, umbra, à me fuiſſe fœdatam: cum tamen ejuſdem cum reliquo cælo coloris eſſe videatur; ſed pace illius dixerim; quotquot anſarum cavitates vidimus, nigriores reliquo cælo, & magis atras aſpeximus, neque hoc teleſcopii vitio quiſquam tribuat; nempe ſi revera anſæ illæ vacuæ ſunt, & ad ipſum cælum radii viſorii per illas trajecti terminantur, ejuſdem cum cælo coloris erunt, quocumque tandem teleſcopio aſpiciantur. Itaque, quod mihi Hugenius pro ſua humanitate, præſtantiſſimi artificis elogium attribuit, ut me præſtantiſſimum eſſe non admitto, ita pro iis laudibus, quæ in me non quadrant, gratias, ut jam dixi, habeo; quia tamen unde altiùs extollit, inde profundiùs deprimit, dum fabricacati à me teleſcopii fidelem uſum deſiderat, utpote quod Saturnios ſatellites ea forma, eoque vultu non exhibeat, quo revera exhibendi eſſent, ad alterum caput venio, in quo luculenter oſtendam, Hugenium in nonnullis hallucinatum eſſe, quod an perſpicillis ab eo fabrefactis tribuendum ſit, an verò auctoris fictioni, alius fortè dubitaret; ego ſanè doctiſſimi hominis candori nihil detractum velim, quare haud dubiè teleſcopii vitio, quidquid erroris admiſit, tribuendum eſſe judico: leges porro, quas vitris ſuis pag. 3. & 4. præſcripſit, ſufficiat ſupra indicaſſe.

Conſtat verò auctorem duobus teleſcopiis uſum fuiſſe, in traditis obſervationibus; primum fuit 12. pedum, vel palmorum 16. more Romano paulò plus, duobus convexis inſtructum; alterum 23. pedum, de quo ſupra; In hoc, ejus dictis ſtandum eſſe puto: Ego tamen, ut dixi, longius teleſcopium adhibui, ſcilicet triginta ſex palmorum; quare non dubitarim, quin Saturnum mihi æquè perſpicuè exhibeat; præſertim cum vitra ſatis accuratè, & diligenter elaborari, tornari, formari, lævigari à me ſoleant: ſi Hugeniani tele-

ſcopii mihi copia fieret, facilis comparatio inſtitui poſſet, quam certè ab ipſo Hugenio inſtitui poſſe, nihil vetat; cum enim per totam Europam perſpicilla à me fabrefacta, diſtracta jam & quaſi diſſeminata fuerint, in ejus manus facilè venire potuerunt: rem narro, quæ mihi ante aliquot dies, accidit; Jam unus, vel alter annus elapſus eſt, ex quo R. P. Antonius Maria de Reitha Bononiam veniens, teleſcopium, quod ſecum habebat, 24. palmorum, mirificè prædicabat, aſſerebatque, nullum ejuſdem longitudinis in Italia eſſe, quod ſuo non cederet; hujus rei certior factus ab Illuſtriſſimo Comite Car. Ant. Manzino viro, ut dicam iterum, rerum iſtarum peritiſſimo, & curioſiſſimo, ad eum miſi, ut ipſe petierat, teleſcopium ejuſdem longitudinis, utrumque æqualium virium, & ejuſdem bonitatis repertum eſt; hæc jam penè mihi exciderant, cùm ecce Illuſtriſſimus Dominus de Monconis, nobilis Lugdunenſis, vir, tum ingenio, tum genere pleriſque notus, incogitanti mihi, poſtridie cinerum adfuit; poſt ſolita urbanitatis officia, cùm inter colloquendum, de perſpicillis mentio facta eſſet, non habeo ampliùs, inquit, tuum illud teleſcopum 24. palmorum, illudque ſanè optimum, quod ante aliquot annos Lugdunum ad me ignotum licèt hominem miſeras; illud enim bonus P. Reitha ſuis precibus à me extorſit; mecum igitur, inquam, pugnavi, ejuſdemque parentis liberos quaſi hoſtes inter ſe commiſi; in riſum prorupimus ambo; non tamen eſt, quod aliquis hoc vitio vertat Patri Reithæ, qui pro ſuo candore ultro fatebatur, præfatum teleſcopium non à ſe, ſed ab alio elaboratum fuiſſe: Scripſi hæc, ut vel inde conſtet, fieri potuiſſe, ut aliquod ex meis teleſcopiis in manus Hugenii veniret, ad comparationem inſtituendam; dum id fiat, facilè mihi perſuadebo, nihil eſſe, cur mea Hugenianis primas deferant; ac proinde ſuppoſita eadem longitudine, æquè clare, & fideliter Saturnios ſatellites exhiberi à meis, ac ab Hugenianis.

His præmiſſis; conſtanter aſſerit Hugenius, pag. 547. & 556. Saturni ſatellites nunquam ab eo ſejunctos figura ſphærica videri, quales prima figura ab eo excuſa, & à me recuſa-

ſa exhibet; quod tamen falſum eſſe, omni aſſeveratione affir- TAB. LII. fig. 1.
mo, cùm anno 1657. cœptis obſervationibus die 30 Junii,
& ſepties, vel octies, ad vigeſimum uſque Julii repetitis, adhibito ad hunc finem teleſcopio triginta ſex palmorum, accuratiſſimè fabrefacto, prædictos ſatellites figura ſphærica tornatos à Saturni globo omnino ſejunctos obſervarim, quales prima figura Hugenii illos repræſentat, & quales jam antè Galilæus viderat, idem obſervavi anno proximè ſequenti, teleſcopio 24. palmorum uſus; adfuerunt teſtes omni exceptione majores; præ cæteris, vir clariſſimus Alphonſus Borrelli, Magni Etruriæ Ducis inſignis Mathematicus, & Geometra, typorum gloria orbi ſatis notus: neque hæc contradicendi ſtudio à me adſtrui, quiſquam ſibi perſuadeat; quo enim tempore, hos ſatellites ſphæricos à Saturni globo, modico quidem, ſed quod ſenſu, adhibita teleſcopii opera, percipi poterat, intervallo disjunctos vidi, nunquam mihi perſuadere potuiſſem, aliquem fore, qui ſejunctos unquam videri poſſe negaret; Dico igitur, disjunctos à me viſos fuiſſe; negat Hugenius disjunctos videri poſſe; produco teſtes omni exceptione majores, qui una mecum viderunt; Utri quæſo habenda fides? Sejunctos videri poſſe contendo, cùm reipſa ſejunctos viderim, adductis teſtibus omni exceptione majoribus; negat Hugenius, videri poſſe; quia ſcilicet nunquam ipſe vidit; ſed alii viderunt; negat tamen videri poſſe; adſunt & jurant teſtes; illos ejurat, & fidem alienis teleſcopiis detrahit; perperam quidem, meo judicio; nempe breviore teleſcopio diſcerni non poterant, licèt revera disjuncti eſſent: igitur cùm eos ſejunctos viderim meo teleſcopio, ideo neceſſaria conſecutionis vi deduco, hoc perfectius, & melius eſſe; nec enim longitudo æqualis, immo, nec major defuit; nec accurata operantis manus vel artificis diligentia deſiderata eſt. Teleſcopium igitur Hugenii, longiùs licet, breviorum vitio laboravit, cum illius opera, ſejunctos diſtinctè videre non potuerit, quo vitio, ut dixi, breviora perſpicilla laborant; falſum enim eſt, quod habet pag. 35. breviore teleſcopio 8. circiter palmorum ſejunctos, longiore

verò 16. palmorum conjunctos videri, nempe, ut dixi, potiore jure, sejuncti, majore telescopio, conjuncti verò, minore viderentur; cùm verò suo minore sejunctos viderit, majore verò ad instar brachiorum, hinc inde adnatorum extantes, perspicuum majoris telescopii vitium est, cujus operâ radii minùs accuratè projiciuntur, & ut vulgò dicimus, inepta fit terminatio. Telescopium igitur Hugenianum meo primas deferat, oportet; quo scilicet ea distinctè vidi, quæ ille suo distinctè videre non potuit.

At non me latet causa qua fiat, ut Hugenius obstinatè neget, sejunctos videri posse; commentus est ipse hypothesim annuli Saturni globum cingentis, cujus operâ, illas phases explicare conatur, quæ in hoc planeta observatæ fuere: ut autem suæ opinioni, vel suo commento consulat, illud profectò ipsi negandum fuit, quo semel admisso commentitia illa hypothesis penitùs corruebat; si enim annulus Saturnum ambit, nunquam sejuncti satellites videri queunt: pari modo fingit, præfatas ansarum vacuitates ejusdem cum reliquo cælo coloris esse, ut suæ hypothesi consulat; supposito enim illo annulo in iis vacuitatibus, nihil nisi cælum videtur; at revera, ut jam suprà dixi, nigriores illæ apparent, ex quo Hugeniana hypothesis corruit. Ut igitur suam illam opinionem indemnem servaret, ea removenda esse putavit, quæ si adessent, illius opinionis falsitas manifesta evaderet: & hæc sibi persuasit, nobis tamen minimè persuasurus, qui rem secus esse, oculari demonstratione prorsus evicimus.

Alterum est quod Hugenius vel finxit, vel leviter sibi persuasit, quod tamen ejusdem furfuris est; dicit enim, fasciam quandam nigricantem in Saturni globo videri, quæ quidem ex æquo medium discum secat, quando solus Saturni globus suo satellitio destitutus apparet; ubi verò satellites adsunt, modò suprà, modò infra brachiorum lineam fascia videtur; sed hoc etiam merum figmentum est ab auctore excogitatum, ut annulo suo consuleret; nam cùm ipsi opponeretur, admisso semel hoc annulo nunquam Saturnum videri posse, vel ansulis, vel brachiis destitutum, quod tamen omnibus ob-

ser-

ſervationibus repugnat; nempe ubi planum annuli directè in oculos incidit, annulus appareret ad inſtar zonæ rectæ, æqualis diametro annuli, ac proinde majoris diametro Saturni; igitur ad inſtar brachiorum duæ appendices hinc inde Saturnio globo adhærerent: cum igitur hac difficultate, & hoc nodo inſolubili annularis illa hypotheſis laboraret; finxit illius auctor, extimam annuli ſuperficiem ineptam eſſe ad luminis repercuſſionem, ac proinde faſciam illam nigricantem inde ortum ducere, & ob penuriam luminis repercuſſi, extantes illas appendices ſub aſpectum noſtrum non cadere: Hæc habet pag. 542. 545. 576. Aliam cauſam ſubnectit pag. 585. ab obliquitate radiorum illapſorum petitam, qua fiat ut pars annuli ad nos obverſa obliquè dumtaxat illuminata non videatur; immo hoc alterum addit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam minimè à Sole illuminari; ac proinde mirum non eſſe, quod minimè videri poſſit; omiſeram, quæ habet pag. 551. de Saturnicolis.

Cuncta hæc facilè difflantur; nunquam enim faſciam illam nigricantem, quamvis exquiſito teleſcopio uſus videre potui; nemo unquam præter illum obſervavit; nec tamen teleſcopia noſtra Hugenianis deteriora eſſe crediderim; fictitia igitur cenſenda eſt illa faſcia, aut certè vitrorum vitio tribuenda: quod autem dicit, extimam illam annuli ſuperficiem ad lumen reflectendum ineptam eſſe, vel ex eo falſum eſſe conſtat, quòd in Saturni diſco partes omnes æquali lumine perfuſæ videantur: Nulla igitur pars ad nos obverſa ad luminis reflexionem inepta eſt. Præterea demus ita eſſe, & faſciam illam paulò obſcuriorem in Saturni diſco videri; nihil tamen obſtaret, quin brachia eodem lumine perſpicua eſſent; id eſt extrema ſegmenta apparentis zonæ, in quam annulus hoc ſitu aſpectus projicitur, extantia, & excurrentia hinc inde extra Saturnium globum, viderentur, eodem licèt nigricante colore diluta. Ad obliquitatem illapſorum radiorum perperam confugit; alioquin in cæteris planetis eadem ratio militaret; nempe fieri non poteſt, quin major pars ſuperficiei convexæ, obliquum radiorum ſolarium illa-

 pſum

psum excipiat. Id demum, quod subnectit, superficiem annuli ad nos obversam à sole aliquando non illuminari, ex regulis opticis omnino refellitur; supposita scilicet maxima illa Saturni distantia, nec non solis diametro longè majore, quo fiat, ut superficies Saturni ad nos obversa semper illuminetur; hinc totus Saturni discus semper apparet. De Saturnicolis nihil est, quod dicam, risu potiùs, quàm argumentis hoc commentum refellitur; accedit, quòd catholicis dogmatis adversatur, quæ homines tantùm illos agnoscunt, qui ab Adamo duxerunt ortum.

Nonnulla etiam falsa admiscuit, ut pag. 539. ubi dicit fascias Jovis lucidiores esse reliquo disco; cùm tamen obscuriores certò videantur: Item globo Martis latiorem fasciam sub obscuram obduci; nihil tale unquam observatum est; deinde nunquam Saturnum vidimus ea forma, quam illi tribuit pag. 542. 545. tractum illum cæli circa Oriona, illustriorem esse vidimus, cum iis stellis splendentibus, quas ipse recenset. Multa etiam de Saturni phasibus statuit, ex paucorum annorum observationibus, quæ pro certis habere non possum, donec subsequentium annorum observationibus congruant; nempe ipse observationes suas primum cœpit 25. Martii anno 1655. easque ad 19. Februarii anni 1656. breviore tamen telescopio usus, 12. pedes longo perduxit; ac proinde minùs fideles censendas, ut ipse ultrò fatetur. Standum igitur observationibus deinceps ab eo factis, ac repetitis identidem, adhibito longiore tubo, 23. circiter pedum, perductisque ad 26. Martii anno 1659. Si aliquæ essent ab eo notatæ à 30. Junii ad 20. Julii anno 1657. viderem utrùm meis consentirent; sed nullas toto illo tempore factas invenio; an fortè paucæ illæ observationes sufficient ad certum quid statuendum? præsertim cum toto illo, quo factæ sunt, temporis intervallo, vix Saturnus 38. gradus confecerit, traductus scilicet à 20 grad. Virginis ad 28. Libræ; an fortè inquam modicus ille arcus decursus sufficiet ad certam & indubitatam hypothesim statuendam? Statuit autem, ansas magis apertas, & patentes videri, Saturno existente

in grad. 20, 36. Gemin. & in opposito 20. 36. Sagitt. Sphæricum verò sine ansis, & satellitio in grad. 20. 36. Pisc. Itemque in 20. 36. Virg. quod sanè utrùm futurum sit, sequentes anni docebunt. Ipse hactenus in 20. Virg. observavit, in aliis punctis non vidit, nec est, quod aliorum observationes adducat, quibus fidem omnem detraxit, ac proinde illi suffragari non debent. Unum, quod habet, omittere statueram; sed quandoquidem in mentem venit, saltem indicabo; dicit enim, Saturni globum circumagi quodam vertiginis motu; sed hoc tantummodo divinat, non probat; licèt enim Sol hoc vertiginis motu gaudeat, quod probari solet ex maculis: inde tamen nemo rectè deducat, hunc motum reliquis planetis competere. Hoc ii præsertim insinuare & inculcare non cessant, qui globo terraqueo motum adstruunt; sed frustra, cùm Lunam hoc vertiginis motu non agi, certissimum sit: quod certe non dico, quasi hic vertiginis motus in Saturno alicujus momenti sit, quod ad rem hanc pertineat, ultrò enim fateor fieri posse ut prædicto motu agatur: dico tamen, ex observationibus huc usque factis haberi non posse.

Quia verò nemini suam laudem ereptam velim, admitto & osculor alia multa ab Hugenio tradita, cum veritati apprimè consentiant. 1. planum illud, in quo videntur esse satellites, æquatoris plano parallelum rectè judicat: hoc jam indicarat cum aliis Galilæus; & facilè crediderim, licèt autor nullam hujus rei rationem adducat. 2. Ansas illas hinc inde semper æquales esse contendit; jure quidem: licèt enim fortè aliquando altera longior visa sit, alterius tamen cujuspiam per accidens adjuncti extrinsecus, accessio illa facta est. 3. vult, Lunam quandam esse Saturniam, (sic enim vocat, licèt propriè loquendo Luna non sit, cùm circa Saturnum suum orbem non agat) supremum scilicet omnium satellitem, ad instar stellulæ sæpe à se observatum, modò ad ortum, modò ad occasum, modò conjunctum Saturno, cujus primus ille inspector fuit, in quo sanè maximam laudem meretur: ego quidem cùm jam anno 1657. de hoc aliquid inau-

diis-

diissem à clarissimo viro Michaele Angelo Riccio, eodemque nobilissimo hujus temporis Geometra: Eundem sæpe observavi à 30. Junii ad 20. Julii, scilicet die 30. Junii hora 2. noctis juxta horologium Italicum, id est 2. horis cum dimidia post solis occasum, illum observavi ad ortum Saturni; item 2. Julii, 4. 9. 12. eadem hora, die 14. non apparuit; die 20 ad occasum visus est. Ad prædictas observationes adhibui telescopium 36. palmorum. Cur verò ab aliis Luna illa Saturnia observata non fuerit ante Hugenium, non quidem telescopiorum vitio, sed vel inadvertentiæ, vel nimiæ ejusdem à Saturno distantiæ, vel parvitati, vel conjunctioni tribuendum est. 4. Ansæ Saturni nunquam mihi visæ sunt una vice acutiores, alia obtusiores; majores tamen seu latiores aliquando esse comperi. Quod autem sæpè ac sæpius inculcat, prædicta omnia explicari non posse, nisi annulus ab eo excogitatus Saturni globum circumdet, pace illius dixerim, à veritate alienum est; non desunt alii modi, quibus res ista facili designatione exponatur: præ cæteris, mihi satis arridet illa systematis Saturnii ratio, quam P. Honoratus Fabri Societatis Jesu vir mihi maxima familiaritate conjunctus excogitavit, cujus breve schema subjicio.

Supponit. I. terram immobilem in centro mundi, circa quam cælestes globi suos gyros agunt; hanc enim sententiam mordicus defendit, ut catholicis decretis, sacris literis, observatis phænomenis, ac rectæ rationi probè consentientem. II. Motum realem Saturni æqualem esse, apparentem verò inæqualem; abhorret enim hominis intellectus, ut vel ipse Copernicus prudenter monet, à reali motuum inæqualitate. III. Supponit, motu æquali, æqualibus temporibus, æqualia spatia decurri, reali scilicet, seu recta, seu curva; ac proinde majorem orbem tardiùs, minorem citius, eodem motu describi. IV. Supponit, motum circularem diurnum ab ortu ad occasum. V. motum rectum ab apogæo versus perigæum, & vicissim; acceleratum quidem, ab utroque termino ad mediocrem distantiam, quæ lineam apogæum, & perigæum connectentem bifariam secat; retardatum verò à mediocri distan-

tia

tia ad utrumque terminum; hunc autem primum motum rectum vocat. VI. Supponit alium motum rectum, secundum scilicet, ac declinationis ab Austro ad Boream, & vicissim; fines porro diversi sunt in diversis planetis, pro diversa declinatione maxima cujuslibet planetæ; est etiam hic motus eodem modo acceleratus, & retardatus, quo prior; & mediocris distantia est in æquatore: ex his tribus motibus, Saturni motus componitur; vel potiùs est motus quidam simplex circulari affinis, prædictis duabus determinationibus instructus; vel, ut ajunt Scholastici, modificatus; primus motus brevior est; secundus diuturnior; cujus sanè discriminis causam affert. Sed ut rude aliquod schema exhibeam, omisso secundo motu recto, sit centrum mundi B. hic terram collocat immobilem. Sit G B distantia Saturni apogæi; B O distantia perigæi; B P distantia mediocris, Saturnus circulum, vel orbem radio G B tardius percurrit, quàm Stella vel punctum primi mobilis, cui respondet; citius verò percurrit orbem radio B O, & æquè citò radio B A minore mediocri distantia B P. His præmissis, sit Saturnus in apogæo G, respondens puncto C primi mobilis, vel initio arietis v. g. & supponatur punctum C per S describere suum circulum, motu diurno; item Saturnus in G suum, per R, scilicet versùs occasum; punctum C citiùs absolvit suum gyrum, quàm Saturnus; igitur Saturnum à tergo relinquit, versùs ortum, scilicet in aliquo puncto curvæ G H; nempe primo motu recto, à circulo apogæi L R sensim descendit ad circulum perigæi Z X, donec tandem multis orbibus actis, perveniat in H, & respondeat puncto E primi mobilis, v. g. 20. gradui Arietis: toto illo tempore, moveri dicitur in consequentia; id est, juxta seriem signorum, initio quidem, motu accelerato; & sub finem, retardato; in H stare videtur: hîc enim æquè citò ac punctum E suum gyrum agit: Quia verò adhuc descendit versùs perigæum, decurrit deinceps suos orbes citiùs, quàm puncta primi mobilis, quibus respondet; ac proinde illa relinquit à tergo, versùs ortum ab H quidem; ad perigæum I: ab I verò, ad K; hinc videtur regredi ab E ad D,

TAB. LI. fig. 1.

D, quæ ſunt puncta primi mobilis; idque motu retardato, circa H & K, id eſt, circa puncta ſtationum, accelerato verò, hinc inde circa I. hinc duplex ſtatio, in punctis ſcilicet E & D. hinc regreſſio, vel motus retrogradus brevior directo; quia radius circuli æquè diuturni (ſic eum vocat, quem planeta æquè citò conficit, ac punctum primi mobilis ſuum) eſt brevior, radio mediocris diſtantiæ B P. ex his ſequitur latitudinis mutatio ſingulis ferè diebus: ſed hæc rudi Minerva deſcripſiſſe ſufficiat; ex quibus omnia Saturni phænomena, nullo ferè negotio, per cauſas phyſicas explicat. Jam ad ſatellites Saturni orationem converto. Quinque Fabrius agnoſcit; minimus & ſupremus omnium eſt quem Hugenius, primus opinor, ſub aſpectum hominum adduxit, quemque, ut dixi, ab illuſtriſſimo, & doctiſſimo Riccio certior factus, adhibito 36. palmorum teleſcopio, an. 1657. per multos dies, menſe Julio conſpexi, ortivum modò, mox occiduum; dicta autem die non comparuit, quia conjunctus Saturno erat. Hic ergo ſupra Saturnum eſt, & dum in perigæo verſatur, citiùs ſuum orbem abſolvit, quàm Saturnus ſuum, quando eſt in apogæo, tardiùs; & æquè citò in mediocri diſtantia, æquè ab utroque termino diſtante: hinc aliquando Saturnus illum à tergo relinquit, aliquando ille Saturnum; hinc aliquando ortivus, aliquando occiduus, aliquando latet in conjunctione; à conjunctione apogæi, ſemper ortivus; à conjunctione perigæi, ſemper occiduus; quid plura? in Mediceis appoſitam analogiam habemus.

TAB. LI. fig. 2. Alii quatuor inferiores ſunt, Saturno licèt ſuperiores, quorum ſyſtema ſic Fabrius explicat: Sit centrum terræ, & mundi A, Saturni diameter G C, centrum B, ducta cenſeatur recta A B P; ſint duo N H, S D, in maxima digreſſione N H ortiva; S D occidua, hinc inde æquali; in qua ſit illorum ſtatio; & mediocris diſtantia A I; hoc loco, diametros dumtaxat pro globis exhibeo: tendat autem N H versùs perigæum; & S D, versùs apogæum, pari greſſu, & paribus intervallis, ita ut hic apogæum, & ille perigæum ſimul attingant; iſtud eſt inter B I, illud verò inter I O. tunc

uter-

uterque simul erit in conjunctione, alter perigæi, alter apogæi, sed paulò post N H à perigæo ascendit ad maximam digressionem occiduam S D, & S D ab apogæo descendit ad maximam digressionem ortivam N H; atque ita deinceps, repetitis ac reciprocis recursibus: idem prorsus dictum sit de duobus K L, K E, quorum mediocris distantia communis est in O; perigæum commune inter O I; apogæum supra O, æquè distans; maxima digressio ortiva K L, occidua R E; est autem digressio istorum, qui superiores sunt, major digressione illorum, quos inferiores esse supponit; superiores appellat lucidos, inferiores obscuros; lucidi constant ex materia aptissima ad repercussionem luminis; obscuri verò, ex ineptissima, ad eundem finem; nec difficile fuit auctori naturæ, hujusmodi materiam invenire, cùm etiam in hoc sublunari tractu hujusmodi habeamus: mediocris distantia in utrisque ab apogæo, & perigæo æquè distat: vult etiam idem Fabrius, quinque satellites ejusdem esse cum Saturno declinationis, ac proinde semper in eodem plano esse æquatori parallelo: quod facilè obtinetur, modò ab initio eandem declinationem habuerint, eundemque simul inierint declinationis motum, in eodem semper plano æquatori parallelo siti: nec est, quod quisquam miretur, quinque satellites Saturno adesse, cum Jovi quatuor adsint, Soli duo, Terræ unus, Marti fortè tres, quis scit, nondum explorati; quia à Martis globo longius digrediuntur, quàm Medicei à Jove; non tamen tam longè, quàm Venus aut Mercurius à Sole; vult demum, obscuros citiùs suam revolutionem absolvere, & lucidos tardiùs; cujus rei analogiam habemus in Venere, & Mercurio.

His positis, omnes Saturni phases, omnia phænomena facilè omnino explicantur. Solus Saturni globus suis satellitibus aliquando destitutus apparet, scilicet figura sphærica; nec enim alia cælestibus corporibus indita est: hujus phænomeni ratio ex eo petitur, quòd duo lucidi (de primo enim omnium supremo hoc loco non agitur) vel sint conjuncti, id

eſt, alter in apogæo, alter in perigæo, vel ab obſcuris penitùs tecti, etiam extra conjunctionem:

II. Duo lucidi aliquando videntur à globo Saturni omnino ſejuncti, & figuramſ phæricam præferentes; hoc ipſum toties accidit, quoties duo obſcuri in conjunctione verſantur, alter ſcilicet in apogæo, alter in perigæo, & lucidi hinc inde digreſſi.

III. Aliquando lucidi apparent, quaſi lucidæ anſulæ eſſent, vel Lunæ falcatæ; hoc evenit quando obſcuri ſunt quidem interpoſiti, non tamen integrum lucidorum diſcum tegunt.

TAB. LII. IV. Hinc modò plus, modò minùs diſci lucidi ab obſcuris tegitur; unde diverſa phaſis, & diverſa figura; neque hoc teleſcopii vitio Hugenius tribuere debuit, cùm alioqui optima ab authoribus, quos citat, adhibita fuerint; Galilæo ſcilicet, Scheinero, Ricciolo, Hevelio, Gaſſendo, quorum figuræ ab Hugenio excuſæ, in hac hypotheſi, nullo negotio demonſtrari poſſunt; undecima tamen inter alias Fontanæ fabulas referenda eſt; decima tertia, quæ caret auctore, modò tantulùm reformetur, fortè ſuo modo explicari poſſet, in aliquo caſu; ſeptima Hevelii fictitia eſt; ſphæroidem eſſe putavit, ſed hæc figura cæleſtibus globis minimè competit; niſi fortè dicamus Saturnum ellipticum videri, quando obſcuris in conjunctione ſtatutis, lucidi tantulum à conjunctione recedunt, tunc autem anſulæ non apparent.

V. Veriſimile eſt, obſcuros æquales eſſe lucidis; nihil enim probat, vel majores, vel minores eſſe, æquales igitur cenſendi ſunt, dum aliquid probet inæqualitatem; immò potiùs æqualitas ex ipſis phaſibus perſuadetur, quartæ ſcilicet figuræ, quintæ, ſextæ, octavæ &c. Arcus enim falcis lucidæ, cavus ſcilicet, & convexus æqualium circulorum eſſe videntur.

VI. Linea, vel diameter anſas lucidas connectens, quæ per medium globi Saturnii centrum duci videtur, eſt ſemper

per in plano parallelo plano æquatoris; quia cùm satellites Saturni ejusdem semper sint cum eo declinationis & motu semper æquali in aliquo parallelo moveantur, motus enim diurnus ab ortu ad occasum in aliquo parallelo fieri censetur, quid mirum, si linea eorum centra connectens in eo plano sit, quod plano æquatoris parallelum est; dixi, *quæ per centrum Saturni duci videtur*, quia revera licèt Saturno superiores sint, oculus tamen judicat, ejusdem altitudinis esse; ac proinde in eadem linea cum Saturno.

VII. Licèt supremi satellitis motus ab Hugenio definitus sit, utpote qui 16. circiter dierum spatio absolvatur, quanquam observationes à me factæ tantulùm refragantur; non tamen huc usque quatuor inferiorum motus, vel ab eo, vel ab alio quopiam definitus est, qui tamen ex futuris observationibus haberi posset.

VIII. Turbinatio Saturni, vel illius annuli fictitii nulla observatione probatur, ut jam indicavi; licèt enim sol hoc vertiginis motu agatur circa suum centrum, ut evincitur ex illius maculis; aliis tamen planetis nulla hujusmodi, vel alia quæpiam probatio suffragatur.

IX. Illa brachia oblonga quæ Hugenius Saturno annexa observavit annis 1655. & 1656. sunt omnino fictitia, & vitio telescopii tribuenda: cur enim alii non observassent? præsertim cùm telescopium ad hunc finem ab eo adhibitum brevius esset, ac proinde non melioris conditionis quàm alia.

X. Figuræ ab illo excusæ, & rejectæ facilè explicari possunt in hac Fabriana hypothesi: 1ª quidem lucidis in maxima digressione, & obscuris in conjunctione existentibus; 2ª verò, lucidis tangentibus Saturni globum, & obscuris in conjunctione positis; 4ª lucidis in maxima digressione positis, & obscuris tantulùm extantibus; ita ut modicam lucidorum portionem tegant; 3ª. eadem est cum 4ª. sed telescopii vitio, in mucronem ivit, cùm in con-

vexum ire debuisset; 5ª, & 6ª. lucidis non totis extantibus, & majori ex parte tectis ab obscuris, tunc enim restat quasi falcula, differt autem 5ª à 6ª secundùm plùs, & minùs; 7ª, ut dixi, fictitia est; cùm Saturnus sphærois non sit, nisi fortè eo modo, quem supra num. 4. exposui; 8ª lucidis inter maximam digressionem, & Saturni globum existentibus, tectisque ex parte, à minore portione obscurorum; tunc enim falces majores sunt; latiores quidem, quò propiùs ad maximam digressionem accedunt; angustiores verò, quo Saturnio globo propiores fiunt; 9ª & 10ª ab octava tantummodo differunt, secundùm plus, & minùs; sunt enim multæ combinationes; quas habes in duobus circulis sese invicem secantibus; tres ultimas fictitias reputo; nisi fortè 12ª ad 10, reducatur itemque 13ª de qua infra.

XI. Ansa una non longiùs extenditur, quàm alia; hinc æqualis est utriusque lucidi digressio; quia uterque communi apogæo & perigæo gaudet, & æquali motu movetur; item obscuri eodem apogæo & perigæo gaudent; ex his, perfecta ansarum & brachiorum æqualitas necessariò sequitur.

XII. Ansulæ videntur, quando portio lucidorum ab obscuris tegitur; nempe sunt quædam quasi aperturæ nigræ, quas lucida corona cingit; hæ sunt ansulæ; brachia verò, quando lucidi tangunt globum Saturni, obscuris in conjunctione existentibus.

XIII. Ansulæ eò longiùs porriguntur quo propiùs lucidi ad maximam digressionem accedunt; obscuris scilicet lucidorum partem tegentibus.

XIV. Ansulæ eò patentiores sunt, quò major obscurorum portio extra Saturnum extat, lucidis in maxima digressione constitutis; angustiores verò, cum minor obscurorum portio extat.

XV. Ansulæ latiores sunt, quando minor obscurorum portio tegit lucidos, in maxima digressione positos.

XVI.

XVI. Anſularum brachia ad ipſum uſque Saturni globum excurrunt, quando minor obſcurorum portio lucidos tegit.

XVII. Anſulæ à Saturni globo ſunt prorſus avulſæ atque ſejunctæ, quando major obſcurorum portio lucidos tegit.

XVIII. Anſulæ ſenſim contrahuntur, quando à digreſſione lucidi recedunt, & obſcuri ad digreſſionem accedunt.

XIX. Quando anſulæ latiores & majores ſunt, ipſe Saturni globus illuſtrior apparet, quia lumina quaſi communi quodam niſu & illapſu oculum feriunt; ſic multi ignes ſeorſim poſiti, actione quadam communi, plus calefaciunt, ac proinde majoris lucis vim diffundunt.

XX. Anſulæ ſenſim dilatantur & augentur, quando lucidi ad maximam digreſſionem accedunt, & ab illa obſcuri recedunt.

XXI. Primus ille Saturni comes ſub Saturno aliquando ponitur ab Hugenio, qui vult, illum circa Saturnum moveri; hoc tamen veritati repugnat; ſi enim ſub Saturno eſſet, prædictas anſularum phaſes omnino turbaret: Idem dico de Mediceis, ſeu Jovialibus; igitur & Jovialia ſupra Jovem, & Saturnia ſupra Saturnum collocata fuere.

XXII. Si quando accidat, ut primus ille Saturni comes extremitati alterius anſulæ adhærere videatur; nihil enim obſtat, talem illius poſitionem eſſe poſſe; hæc anſula paulò alterâ longior eſſe videbitur.

XXIII. Immo ſi caſu aliquo ſtellula quæpiam alterius anſæ extremitati adhæreat. Figuræ 13ª. phaſis aliquo modo ſalvabitur, modò anſarum forma emendetur; hæc enim trigona non eſt, ſed convexa; ut jam dixi, de 3ª. figura: omitto alia, quæ ex his facilè deducentur.

HÆC ſunt, Sereniſſime Princeps, quæ de Hugeniano Syſtemate tibi inſcripto ad te ſcribenda, & ne probandi mo-

modum desiderares, telescopium triginta sex palmos longum, unâ mittendum esse putavi; ut & rationes nostras, ingenii, quo ad stuporem polles, & observationes, oculorum acie, accedente telescopii operâ, explorare valeas: facilè, ni fallor, judicabis, utri potiùs habenda fides sit; & an nostra telescopia Hugenianis deteriora sint: quidquid sit, si hæc opella mea tibi grata acciderit, faciam aliquando ut aliquid majoris momenti ad perennem observantiæ meæ testificationem Serenissimo tuo nomini inscribatur.

FINIS.



Christiani Hugenii Zulichemii

BREVIS ASSERTIO

SYSTEMATIS SATURNII

SUI,

Ad Serenissimum Principem

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

Christiani Hugenii Zulichemii

BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

Ad Serenissimum Principem

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

SERENISSIME PRINCEPS,



Idisti quæ adversus systema meum Saturnium Romæ sunt edita, utque sub uno nomine gemini mihi adversarii exorti sint. Etsi enim Eustachius de Divinis libelli istius Annotationum autor inscribitur, eum tamen adjutum fuisse opera P. Honorati Fabrii nec Celf. T. ignorat, & ego, hoc agi, jam pridem ab amicis fueram admonitus. Credideram hoc ipso futurum ut subtiliora quædam, non mihi prævisa, éque profundiore Astronomiæ sinu depromta, objicerentur; tum vero ea civilitate & verecundia, quæ viro humanioribus studiis dedito conveniret. Sed omnino spe deceptus sum, cum nihil aliud quam observationes meas temere impugnari videam, quas plerasque in dubium vocant, præterque veritatem mihi confictas esse fa-

tis apertè criminantur. Facile autem, ut ſpero, tam indignam à me ſuſpicionem repellam, nec multis ad hoc opus eſſe, coram C. T. cauſam agenti, exiſtimo, cujus ſumma æquitas cum pari judicii perſpicacitate conjuncta eſt.

Primus præcipuuſque adverſariorum conatus eſt, ut vitra ſua tuboſque opticos nihilo meis inferiores eſſe demonſtrent; quod ubi egregiè ſe confeciſſe arbitrantur, inde porro, nihil me in cælo deprehendere potuiſſe, quod non & ipſi viderint, concludunt. Quod ſi autem phænomena ipſa Saturni, quæ adduxi, vera non ſunt, vana utique & Hypotheſis erit, qua viſorum eorum quæ nuſquam ſunt cauſas exponere ſuſcepi.

Teleſcopiorum ſuorum comparationem cum noſtris inſtituere aliquatenus ut poſſent effeci, tradita accuratiſſima meorum deſcriptione; veruntamen quod præcipuum eſt omnium, præſtantia vitrorum quæ ab exacta formatione proficiſcitur, hanc ſcire debent nulla deſcriptione, ſed effectu demum ipſo probari poſſe: Ideoque etſi & longiores paulo noſtris tubos, & vitra amplius patentia fabricarint, non idcirco meliora ex his teleſcopia ſeſe compoſuiſſe exiſtiment. Oportet nempe, quæ pari bonitate cum noſtris futura ſunt, ut & longitudine illis æquentur, & vitrorum non minore apertura gaudeant; at non ideo quæcunque ſic ſe habuerint, eâdem virtute pollent, aut illis æquiparanda ſunt.

Ut igitur reipſa & effectu concedere noſtris Diviniana teleſcopia comprobem, certiſſimum argumentum mihi petere poſſe videor à Saturnio illo comite ſive luna, quæ ſexdecim dierum ſpatio circa eum revolvitur. Hanc primum omnium mihi conſpectam eſſe liquet, neque id Euſtachius cum ſibi ſuccenturiato P. Fabrio denegat. Quod autem nec aliis nec ſibi antea animadverſa fuerit, in cauſa fuiſſe ait *vel inadvertentiam, vel nimiam comitis à Saturno diſtantiam, vel parvitatem, vel conjunctionem.* Sed vana effugia hæc eſſe quis non videt? Cum enim jam ab anno 1646 & ultra fortè Saturni phaſes deligenter reſpicere cœperit, teleſcopio è convexis vitris compoſito, quo ſemper Saturnum ſimul & comi-

mitem hunc, licet triplo longius recederet comprehendi necesse erat, quænam illa fuit *inadvertentia* qua fiebat ut nunquam ei in oculos incurreret? cur non eadem mihi quoque illum subducebat, nihilo magis admonito? Quin etiam hinc patet non bene prætexi magnam à Saturno distantiam, cum quoties ad hunc respiceret, simul ante oculos sese sisteret comes ejus. Et sanè distantia illa vix tria prima scrupula excedit, cum Medicei planetæ omnes longius à Jove evagentur, extimus etiam scrupulis quatuordecim. Parvitas ergo illum occuluit. At hoc idem est quasi fateatur suis illum organis detegi nequiisse: certe enim nimium exilis erat, at mihi nequaquam.

Postea tamen edita observatione mea, cum à Clarissimo Viro Mich. Angelo Riccio esset admonitus, vidisse se stellulam hanc affirmat, indicans etiam quo ad Saturnum situ, & quoties illam observaverit. Verum cum diligentius hasce observationes examino, invenio profecto non optima fide eas commemorari; sed adeo misere vereri Eustachium ne bonitatem nostrorum telescopiorum non assecutus putetur, ut quæ nunquam in cælo vidit, aut per rerum naturam videre potuit, tamen sibi visa incogitanter asserat. Quod ut appareat, periodus primò Saturnii comitis expendatur, quam 16. circiter dierum esse, ex observationibus meis, toto triennio continuatis (nisi & has confixisse dicar) manifestum feci: sed esto tantùm ea veræ proxima sit, quoniam suas observationes *tantulum refragari* Eustachius scribit. Die igitur 30. Junii, anno 1657. horis $2\frac{1}{2}$, post solis occasum, item sequentibus diebus 2, 4, 9, 12, Julii, ad partem orientalem Saturni animadversum sibi comitem ait; 14° non apparuisse. Die 20 ad occasum fuisse situm; utrum in maxima, mediocri, an minima distantia apparuerit nusquam addit. Certe equidem tribus prioribus harum observationum, ad occasum revera positus erat, ut ex tabulis colligo. Sed putemus inversionis telescopii rationem non habuisse Eustachium, atque ita sicut ei videbatur, si tamen visus est, orientem spectasse comitem rectè dixerit. At die 9 & 12 Julii, quibus

ſibi orientalem itidem apparuiſſe aſſerit, omnino ad occaſum tranſierat, ac rurſus 20. Jul. ad latus orientale, cum Euſtachius ab occiduo ſibi repertum ſcribat.

TAB. LI. fig. 3. In figura appoſita clarius hoc liquebit; in qua circulus A B orbitam Lunæ Saturniæ exhibet, in 16 partes diviſam, ipſaque A B rectam ad nos obverſam. Die igitur 30 Jun. 1657, hora 10 veſp. invenio locum comitis grad. 207. 16′ ab apogæo A, methodo ſcilicet ea quam in Syſtemate Saturnio tradidi. unde prope num. 10 conſtitiſſe debuit, paulo tantum citerior. Atque hinc porro in ſingulos dies ſingulas circuli partes numerando; ſequitur die 2 Jul. ad num. 12. progreſſum eſſe. Item 4. Jul. ad num. 14. Inde poſt dies 5, nempe 9 Jul. ad num. 3. Ac porro 12 Jul. ad num. 6. Et denique 14 Jul. ad num. 8. qua die recte divinavit conjunctum Saturno fuiſſe. Reliquis verò plane infeliciter. Si enim ad num. 10, 12, 14, orientalis ſpectatus fuit, neceſſario ad num. 3 & 6 occidentalis factus eſt. Nec quidem ulla ratione ad num. 14 & 6, qui è diametro ſibi oppoſiti ſunt, idem latus Saturni obtinere poterat, uti Euſtachii obſervationes poſtulant. Denique cum 20 Jul. ad num. 14 reverterit, ubi & die 4 Jul. inveniebatur, quomodo evenit quæſo, ut, qui tunc ad orientem, idem nunc, quamvis eodem loco, ad occidentem comparuerit? Etiamſi mea periodus vera non eſſet, quænam tamen illa Euſtachii fuerit oſtendi mihi velim, paululum diſcrepans, qua ſua hæc viſa tueatur. Debuerat ſane hîc, ſi uſquam, Fabrius illi opem tuliſſe; ſaltemque perpendiſſe an ſtare ullo modo iſtæ obſervationes poſſent: aut, ſi nobis imponere vellet, quotlibet duntaxat novas è tabulis meis concinnaſſe. Nam quas nunc adferunt, facile nimis deprehenditur, ideo tantum productas fuiſſe, ne nihil vidiſſe exiſtimentur.

Credo & faſciam nigricantem in Saturni diſco, liquido ſibi conſpici dixiſſet Euſtachius, ni Fabrio viſum fuiſſet eam nimium hypotheſi meæ annulari favere. Cum autem ne optimis quidem ſuis perſpicillis eam cerni affirmet, hinc quoque quanto illa meis deteriora ſint perſpicuum fit. Nam ne

mihi

mihi phænomenon illud confictum credatur, idem & in Anglia pridem observari cœpisse sciendum est; ut liquet ex literis Viri Clar. Joh. Wallisii, Oxonia ad me datis 22. Dec. 1658. quibus inter alia hæc scribit. *Monebam etiam eisdem literis* (nempe datis 29. Maji, 1656) *de Saturni fascia quam jam ante observaverat D. Ball, & sciscitabar num tu eandem conspexeras,* &c. Eam porro fasciam à 5 Febr. 1656 ad 2 Jul. quo tempore rotundus Saturnus absque ansis apparuit, medium Planetæ discum secare D. Ball. adnotavit, ut in schemate ad me misso expressa est. Atque ita mihi quoque fuerat eo tempore observata, ut cernitur pag. 544 systematis Saturnii, quam figuram hîc repeto. Postmodum tamen renatis Saturni ansis cum difficillimè conspici eadem fascia cœpisset, minus rectè quoque à D. Ball, quantum ad situm attinet, depicta est. At in mearum observationum adversariis, die 26 Nov. 1656, & alias adscriptum invenio, lineam obscuram fuisse evidentissimam, eo nempe positu qui pag. 545, System. Saturnii memoratur. Neque id monere neglexissem, observationes eas recensens, si quicquam profuturum putassem apud illos qui me data opera lectores fallere voluisse suspicarentur. Difficillime autem, ut dixi, tractus hic obscurus deinceps cerni cœpit, imo vix jam amplius animadverti potest; quod & systemati meo consentaneum est, quippe magnâ jam annuli Saturnii inclinatione; ad quam accedit, quod & ansarum splendor, duplo quam alias lucidiorem Saturnum efficiens, oculorum aciem nunc magis impedit. TAB. LI. fig. 4.

Qualia igitur sint Diviniana telescopia cum nostris collata, ex his quæ dicta sunt, cuilibet manifestum opinor. Eadem verò & Anglicanis viliora esse alia præterea ratione ostendam, quo minus dubitetur phænomena ea vera esse, quæ pariter cum Anglis ego observavi. Nam & illa quæ ad ansatas Saturni phases attinent, testimonio illorum confirmaturus sum. Vir quidam nobilis ex Gallia, eruditus, acerrimique ingenii, qui Romæ telescopia apud artificem istum viderat, hoc ipso anno 1660, super iis hæc ad me scribit. *Il*

me

me monſtra les plus beaux de ſes teleſcopes, qui paſſent au de la de 30 pieds; & nous les comparames avec un de ceux de la methode du Chevalier Neal, qu'on a envoyé au Cardinal Ghiſi; il n'a garde de ne tirer l'avantage de ſon coſté, mais ſans mentir il ſe trompe lourdement.

Et meliora igitur Romanis eſſe, illa quæ ex Anglia deportata erant, judicat is qui coram comparationem utrorumque inſtituit, & Euſtachium tamen obſtinate hoc pernegare teſtatur, adeo ut ſi jam mea Romam deferam, nihil apud illum quidem ſim profecturus. Quid autem huic homini facias, aut quis hæc videns non merito exiſtimet, uſque adeo privati compendii cura eum duci, ut quid verum ſit diſcernere aut non poſſit aut nolit?

Non ægre nunc fidem habitum iri ſpero, tum mihi tum Anglis ſimul obſervatoribus, qui anno 1657 oblonga Saturni brachia diſco utrinque conjuncta ſpectavimus, qualia exhibet figura Syſtematis mei pag. 545. quam hîc repono; non autem binorum orbiculorum formâ à medio diſco disjunctorum, ut Euſtachius ſe illa eodem tempore vidiſſe dejerat.

TAB. LI. fig. 5.

Adderem hîc ſchema quod mihi à D. Ball, ſuprà memorato, advenit; niſi planè ſimile eſſet huic noſtro, hoc uno tantillum duntaxat abludens, quod brachia illa ubique paulo craſſiora ille referat.

Eam vero formam à 5 Nov. 1656, ad 9 Jul. 1657 ſibi apparuiſſe ſcribit. Apertis autem brachiis, qualis pag. 547. Syſtematis mei & hîc repræſentatur, talem à 9. Nov. 1657 ad 7 Jun. 1658, idem obſervator depingit, ſimillima prorſus figura, niſi quod ad poſitum zonæ obſcuræ attinet, de quo dixi ſuprà. Ac denique à 3 Jan. 1659 ad 17 Jun. ejuſdem anni, anſis paulo latius adhuc apertis. Et hæc quidem ille, ignarus adhuc meæ hypotheſeos, ne ob præconceptam opinionem aliquid indulſiſſe ſibi exiſtimetur. Neque ego aliter iſta quam ſe revera habent referre auderem, cum redarguere me, ſi fallam, autori obſervationum in promptu ſit.

TAB. LI. fig. 6.

Quænam igitur illa ſunt Euſtachii perſpicilla palmorum 24, quibus rotundi globuli rectorum loco brachiorum cernebantur?

Fig. 1.

V D E F C S G L R P K A H I O Z M X B 10 20 30

Fig. 2.

P L K O R E H N I S D G B C A

Fig. 3.

A B 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16







tur? Imo etiam loco anſarum jam adapertarum, quales in ſyſtemate meo pag. 546. Etenim & anno 1658 globulos tantum ſibi viſos ait, quales in Fig. 1. iſtarum tredecim tabellæ LII. Quid teſtes citat qui ſecum iſta obſervaverint? Quos equidem fide digniſſimos eſſe cenſeo, quæque viderint ingenuè faſſuros, ſed eo ipſo mihi videntur de teleſcopiorum illius vitio & ineptitudine teſtimonium perhibere. Mallem aliquos adduxiſſet qui ſecum Saturni comitem obſervaſſent.

Globulorum formâ mihi quoque brachia apparuiſſe dixeram, quoties 5 aut 6 pedum tubos adhibuiſſem. Hiſce igitur rectiſſime ea, atque uti debent, mihi cerni arbitratur; cum vero oblonga ac Saturni diſco affixa, tubo 23 pedum referuntur, falſa imagine me deludi, idque teleſcopii culpa contingere. Nimirum perſuadere mihi vult exigua illa omnium maximis præferenda eſſe, quaſi ne hoc quidem diſcernere adhuc didicerim. Sed jam ſatis ſuperque, quid de meis teleſcopiis obſervationibuſque, quidque de Euſtachianis exiſtimandum ſit, me oſtendiſſe arbitror. Nec tamen quæ dixi in damnum illius cedere velim, ſed potius ſtimulos addere, quò magis magiſque incumbens, ſua ipſius primo, deinde & noſtra teleſcopia ſuperet. Adeo enim non invideo his qui artem adeo egregiam promovere nituntur, ut decreverim etiam cuncta quæ circa eam mihi comperta ſunt, ſed & præcipue quæ ad theoriam Dioptrices ſpectant, propediem in lucem emittere: quod vel ideo mihi faciendum video, ut de veritate obſervatorum quæ in Saturni ſyſtemate protuli, plures inquirere poſſint, monſtrata arte qua ſibi paria noſtris perſpicilla parent.

Cæterum unicum etiamnum diſcutiendum reſtat Euſtachii phænomenon, quo vel ſolo Syſtema meum univerſum corruere dicitur. Eſt autem rurſus de genere eorum quæ non tantum non extant, ſed ne quidem per rerum naturam apparere ullo modo poſſunt: quod, ſi non vitrarius artifex, at P. Fabrius certè animadvertere debuerat. Ajunt ſpatia illa bina, cavitate anſarum intercepta, nigriora reliquo cælo in-

veniri; cum contra, ex hypothesi mea, cælum ipsum sit quod trans aperturas eas conspicitur. Ego vero quæram ex Fabrio, qui fiat ut cælum omne, cum vel interdiu vel noctu aspicitur, non planè tenebrosum nigerrimumque appareat. Fateri cogetur in caussa esse vapores illos sive atmosphæram Terræ circumfusam, quæ interdiu quidem à Sole, noctu verò à Luna aut stellis illustretur. Atque adeo si vapores ii auferantur, planè nigrum apparíturum esse cælum, æquè ac spatia illa, Saturni ansis inclusa. Atqui tota atmosphæræ illustratæ crassitudo tam inter nos ac Saturnum, quam inter nos nigrumque cæli convexum interjecta est; ergo illius interpositu æque multum de Saturniarum macularum nigredine, atque de illa quæ cælum obtinet decedere necesse est; ac proinde eæ maculæ nihilo obscuriores reliquo æthere apparere possunt. Quod si igitur nihilominus hoc sibi videri pertendant, fateantur oportet visus quadam fallacia id contingere, vicino forsitan splendore Saturni, ansarumque suarum, paulo obscuriora spatia illa reddente, quam absque eo apparitura essent. Quanquam mihi nunquam id evenit: quinimo ejus contrarium quodammodo fieri animadverti. Dum enim ansæ exigua tantum adhuc rima paterent, veluti circa 26. Nov. 1656, contigisse nullus dubito, nondum nigræ lacunæ distincte cerni poterant, sed tantum tenuiori luce, illa brachiorum pars, quæ disco Saturni proxima erat, perfusa videbatur. Qua eadem ratione & fascia in Saturno, de qua suprà, paulò tantum obscurior reliquo ejus disco cernitur, quia nempe licèt revera nigra satis vel etiam nigerrima sit, est tamen tenuissima, unde & latior simul justo & dilutior spectatur.

Atque hinc apparet, frustra etiam adversus hypothesin meam objici, quod per eam nunquam Saturnus rotundus sine brachiis videri possit; quia nempe exiguam saltem lucem in extrema annuli ora reliquisse videbar, qua futurum sit ut non penitus visum effugiat annulus, quanquam à latere inspectus nec brachia proinde in totum aboleantur. Nunc enim sciant nihil obstare quo minus omnem lucem margini annulari adimam, neque hoc absurdum in rerum natura statui Fabrius

brius contendet, esse nimirum materiam aliquam quæ radios solares omnino non reflectat, quippe qui de quatuor novis, quos fingit, Saturni satellitibus, duos atros, ac per se invisibiles, nullisque solis radiis illustrandos, reliquos vero splendidos esse imaginetur. Verum hypothesim illam jucundissimam postea videbimus; sunt enim alia etiam prius ventilanda quibus nostra oppugnatur.

Dixi planam annuli superficiem, eam quæ nobis obversa est, aliquando à Sole aversam non illuminari, unde nimirum nec cerni nobis tunc possit, ac proinde nullas Saturno ansulas præstet. Quod cum certissima ratione fieri demonstraverim, adversarii mei breviter atque uno verbo negant, opticisque regulis refelli dicunt. Quomodo tamen? Ponendo scilicet & Saturni distantiam & Solis diametrum longe quam ego majores, quo fiat ut superficies dicti annuli, ad nos spectans, semper quoque à Sole lumen accipiat. Atqui ego & distantiam illam & diametrum (nam una alia expendet) multo majores exhibui in Systemate meo quam alius quisquam omnium Astronomorum. Nam cum Ptolemæus & Copernicus diametrum Solis, tantum 5 Terræ diametris taxent; Aristarchus & Bullialdus 7; Ricciolus 33; Wendelinus, quo pluribus nemo, 64; ipse 111 dedi, nec sine ratione ut puto. Et Fabrio tamen parcus fuisse videor, qui Solem longe majorem etiam fieri vult, ne stare hypothesis mea possit, utque merito hanc Optices ignorantiam mihi impegisse videatur. Cum ipse interim vel Optices vel Astronomiæ usque adeo imperitus sit, ut non advertat, licet centies millies majorem quam ego Solis diametrum statuat, ac simul planetariorum orbium amplitudinem eadem proportione adaugeat, tamen diametrum illam, ex Saturno conspectam, non nisi 3 circiter scrupulorum fore; atque etiamsi tanta illinc appareret quanta nobis in Terra positis, tamen illa quam dedi demonstratione evinci, superficiem annuli ad nos versam, aliquando Solis lumine non illustrari, propterea quod planum annuli productum, inter nos Solemque transeat. Nam si hoc fieri quandoque neget, oportet statuat diametrum Solis, (quod ridiculum est) ipsius

magni orbis diametri, in quo circa Solem Tellus defertur, saltem duabus quintis partibus æqualem esse. Hoc enim ita esse facile ostendere possem, sed Astronomi ex demonstratione mea pag. 570 haud ægre deducent. Nam si planum annuli plano eclipticæ foret ad rectos angulos, non duas quintas sed integram orbis magni diametrum dicerem; duæ quintæ autem oriuntur ex inclinatione graduum 23½ quanta est dictorum planorum.

Invenio vero & Graphices inscitiam mihi objici, quia nempe umbras quasdam, quas in schemate Saturni num. 10. Eustachius depinxit, alioqui non fuerim reprehensurus. Eum enim accersivisse quidem illas, sed necessario, contendunt, ut sphæræ formam exprimeret; quia videlicet incertum absque iis futurum fuerit, an convexus Saturnus, an planus esset. Atque ego proinde ineptus, qui *de suo* eas umbras Eustachium addidisse dixerim, quas ille ex arte, atque ita flagitante rei natura descripserit. Sed enim jocari hîc libet. Nempe cum temere citra ullam demonstrationem me statuisse arguant, Saturnum circa axem suum converti, rogo nunc illos unde tam certo compererint, Saturni medium corpus globosum esse? Non enim observatio ulla puto hoc docuit, sed colligunt tantum ex analogia quadam inter hunc & alia quædam cælestia corpora, sicut & ego de conversione circa axem. Quid igitur necessario umbras ad globum repræsentandum accersere opus erat? Verum dissimulare mihi videntur, quasi non advertant, non adeo me de medii corporis umbra sensisse, quàm de illa quam ellipticæ figuræ, binas ansas efficienti, tribuit. Huic enim ea lege umbras adjecit, ut annulum ellipticum, non planum sed rotundum, similemque serpenti caudam devoranti, exprimat; nescio enim quomodo melius formam eam designem. Deinde & hoc umbræ suæ artificio præstitit, ut totus iste annulus post globum Saturni positus videatur. Qua ex re sibi ipsi forte Eustachius absurdam aliquam Saturni formam commentus est, vel aliis certe comminiscendi ansam præbere potuit. Mihi autem, de umbra illa temere addita, necessario admonendi erant lecto-

ctores; quia si vera esset, refellebat hypothesin meam, cum alioqui schema Eustachianum, si sine umbris consideraretur, plurimum illam confirmaret. Sed & me ejusdem criminis teneri ajunt, quod passim umbras majores quam revera sint adjiciam. Nescio equidem quas dicant; semel enim Saturni globo annuloque umbras addidi, at non tanquam ita observassem, sed explicandæ hypotheseos causa, ut nempe appareret quo pacto annulum Saturno circumdedissem.

Quod si fasciam in disco ejus observatam, uti & illas quas in Jove & Marte exhibui, nigriores quàm in cælo spectantur, ob oculos poni dixissent, non ivissem inficias. Fateor enim ultro cælatoris culpa hoc accidisse; ac in Marte præsertim zonam longe dilutiorem, imprimis circa margines, pingendam fuisse. Quam neque perpetuo ibi spectari opinor, sed, ut Joviales fasciæ, mutabilem formam habere, sicut postremis in Marte observationibus didici; de quibus alias fortasse plura. Nihil autem ejusmodi mihi visum in utroque hoc planeta, Eustachius non alio argumento probat quàm cætera omnia, nempe quia ipse non viderit.

Quod Systemati Copernicano Systema meum Saturnium adaptaverim, nemo, ut opinor, jure me reprehenderit. Attamen cum Catholicis omnibus Fabrius illo interdicat, miror quod non vel hoc solo nomine rejicienda esse omnia commenta mea pronuntiet. Sed videbat, credo, facile in locum Copernicani Systematis Tychonicum me substituere posse. Utrum enim adhibeam parum admodum interest ad phænomena quod attinet. Sed rei veritas haud aliter quam Copernicum sequendo explicatur; cujus sententiam non parum quoque nostrum Saturni Systema commendat.

Non intelligo autem qui tam confidenter, hanc de Terra mota opinionem, tantùm ab hetorodoxis Aristarchis tenendam Fabrius asseveret. Quoties enim de ea cum Catholicis (Romanis nempe) sermones confero, profitentur illi se nequaquam decretis in contrarium latis teneri, sive ea à Cardinalibus, sive ab ipso summo Pontifice profecta fuerint. Quibus videlicet non tantum tribuunt in explicando sacra-

rum literarum ſenſu, ut etiam de controverſiis quæ, ut vocant, facti ſunt, neceſſario iis ſtandum ſit: ac plane, quietem Telluris rationibus potius adſtruendam, quàm diplomatis ſanciendam, exiſtimant. Quin etiam in Gallia paſſim Syſtema Copernici non tanquam hypotheſin, ſed ut liquidam veritatem propugnari certum eſt, idque ab ipſis Eccleſiaſticis, & Sacerdotibus, qui voluminibus totis publice doctrinam eam tradunt, nihil, quod ſciam, Roma contradicente. Quæ omnia perpendens, pridem credidi præter Aſtronomiæ ignaros, imperitamque multitudinem, tantùm adhuc Cleanthes aliquos, in quibus & Fabrius, antiquo errori adhæreſcere, vique irrita Telluris motui obniti.

Cæterum cum mordicus, ut ait, hoc propoſitum teneat, ac planetas reliquos proinde nullo modo Terræ aſſimilandos putet, nihil mirum eſt, nec ferre eum potuiſſe Saturnicolarum ullam mentionem fieri. Ubi tamen injuria me culpat. Nam non ita de illis diſſerui, ut eſſe aliquos affirmarem, aut, rationibus adductis, veriſimile id eſſe evincerem. Quin imo abſtinere me dixi plura ſcribere de Aſtronomia, qualis incolentibus Saturnum futura eſſet, eo quod abſurdum nimis plerique arbitrentur homines in planetis degere; qui proinde fruſtra me inveſtigare dicturi eſſent, quid ii obſervent, qui in rerum natura non ſunt. Cum autem, in periodo Lunæ Saturniæ computanda, menſes Saturnicolarum nominavi, nihil novum aut inſolitum Aſtronomis feci, quibus nihil frequentius eſt, quam ut in Sole aut Luna aliquem exiſtere imaginentur, qui inde aſtrorum motus ſpeculetur. Non erat itaque quod commentum hoc de Saturnicolis me ibi propoſuiſſe Fabrius culparet. Quanquam etſi ſecus foret, neque primus ego hoc prodidiſſem, neque ridiculum adeo, apud Philoſophos quidem, quam ille exiſtimat. Verum præter inſtitutum ad iſta non digrediar. Vocat me Fabriani Syſtematis contemplatio, illius nempe quo, poſtquam meum diruit, phænomena circa Saturnum commodè exponi poſſe confidit. Nam priora illa, quibus Saturni ipſius motum novis legibus ordinare aggreditur, nihil huc pertinent, neque examinare

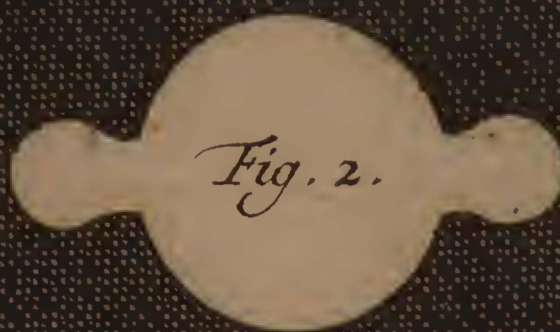
ea operæ pretium fuerit. Miror tamen quid in Tychonica hypothesi illi displicuerit, ut novam à fundamentis extruere in animum induceret: quam quidem vereor ut Astronomi satis percipere, nedum probare queant.

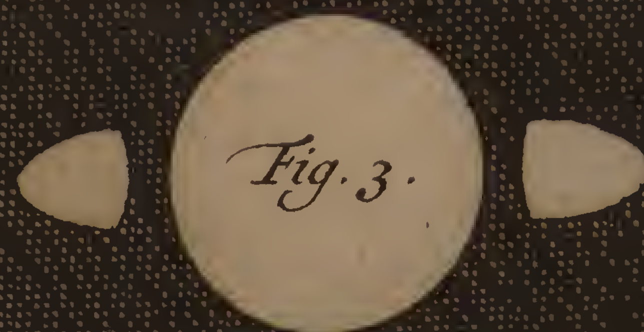
At nec illa quæ ad phases Saturni pertinet, ullo modo clarior est, prætereaque ab omni ratione & verisimilitudine tam longè remota, ut nesciam an refutari à me opus habeat. Cui enim imponet quæso bellum istud commentum de quatuor globulis Saturno proximis, quorum bini lumine solis splendent, bini alii radios prorsus non reflectunt, sed natura sua sunt obscurrissimi. Videor mihi circulatorium quendam calculorum ludum videre, alios ibi albos, alios nigros esse, nunc hos, nunc illos ostendi abscondique vicissim. Tale quid enim præ se fert mirabilis illa hypothesis. Quidni verò circulos saltem in schemate suo expressit, quos nova hæc Planetarum soboles obeunt? Quos circulos non Saturnum in centro habere cerneremus, nec quidem minorem à majore includi, sed post tergum Planetæ binos ex ordine jacere, in quorum utroque duo istorum satellitum ita currerent, ut nunquam alter alterum assequeretur, sed è diametro semper distarent. Rectè, ni fallor, mentem Fabrii intellexi, sin minus, admoneri cupio, fuit enim nonnihil divinandum. Quum autem, his positis, phasin 1, 4. 8, 9, tabellæ suæ, facile explicari dicat, scire velim quo pacto Planetæ novi ex minimis maximi fiant. Nam in 1 & 4 Figura, diametrum ne quidem dimidiam habent medii Saturnii corporis, cum in Figura 8, & 9, vel æquales huic, vel majores etiam esse necesse sit. Deinde ipsius Eustachii observata phasis in Figura 10, quomodo ex hac hypothesi deducetur? Cum neque rotunda corpora ellipticos arcus facere possint, & nigri Planetæ minores candidis hîc esse debeant, contra quam positum fuit: æquales enim inter se, post aliquantam deliberationem, statuuntur: Quænam porro sit novorum Planetarum periodus non jam exigam, nondum enim repertam esse ait. Sed vereor ut aliqua esse possit. Nam trium quidem annorum spatio, quorum primus 1646, unam illam Figuram 10 sibi apparuisse Eustachius affirmat, in tabel- TAB. LII.

bella quadam, Sereniſſimo Magno Duci Hetruriæ, Fratri T. C. dicata; unde oportet nihil motos fuiſſe interea ſatellites, quod quidem animadverti poſſet. Poſtea vero aliis tribus annis, 1655 nempe, cum duobus inſequentibus, in tantum progreſſi fuere, ut medio horum annorum rotundus Saturnus ſpectatus ſit, extremis vero utriſque cum binis ad latera orbibus, interſtitio aliquo à medio corpore disjunctis. Utinam ridiculi Syſtematis inventori pœna conſtituta ſit, ut motuum iſtorum anomalias inveſtigare teneatur. Piget vero me ultra in his immorari: ſed tamen pauca pro meo illo Saturni comite dicere cogor. Hunc, quia videbatur aliquid in Syſtemate ſuo turbaturus, ſupra Saturnum Fabrius relegavit, ita nimirum ut totus quem percurrit circulus, Planetâ ſuperior jaceat. Sed immerito prorſus; ego enim cautionem me dabo, nihil eum anſatis illis phaſibus occurſu ſuo nociturum, cum puſillus adeo ſit, ut ne quidem, cum prope ad Saturnum accedit, conſpici queat: raro etiam, nec niſi cum rotundus eſt Saturnus, inter diſcum ejus & nos tranſeat, idque ſemidiurno ſpatio. Sinat itaque in ſua illum manere orbita, unáque Mediceos Planetas in vias ſuas, à Magno olim Galilæo circa Jovem attributas, reſtituat, quos nullam omnino ob cauſam, quam quidem aut ipſe adducit, aut ego animadvertere poſſum, loco ſuo ſimiliter expulit.

Jamque percenſui, ni fallor, Princeps Sereniſſime, omnia quæ adverſus me Euſtachius de Diviniş, ſeu potius P. Fabrius conquiſivit, quæve ad ſuam hypotheſin ſtabiliendam commentus eſt, quæ quum animo reputo, nulla ſane invenio, quibus non pro me ſibi eruditi reſponſuri fuerint, aut venturi temporis experientia. Interim pauca hæc repoſuiſſe non me pœnitet, quia, licet artificem illum merito neglexiſſe tacendo videri poteram, non idem fortaſſe contra alterum, quem ferunt alicujus nominis eſſe adverſarium, valiturum erat ſilentium; utique quum ſatis omnibus conſtet pleraque ab hoc fuiſſe ſuppeditata, multique, non tam quid, quam à quo ſit objectum, reſpiciant. De cætero rogo C. T. ut, qua uſus ſum in diſputando, libertatem boni conſulat: Idque ita, ſi & provocatus in arenam hanc deſcendi, & juſtæ defenſionis terminos nuſquam tamen exceſſi. FINIS.


Fig. 1.


Fig. 2.


Fig. 3.

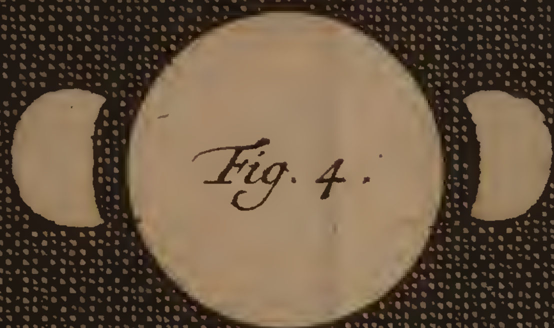
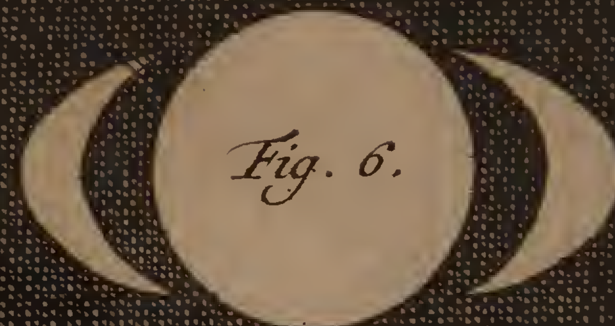

Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 6.

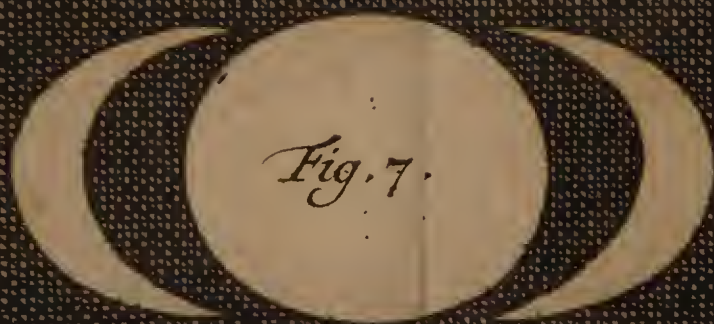

Fig. 7.


Fig. 8.

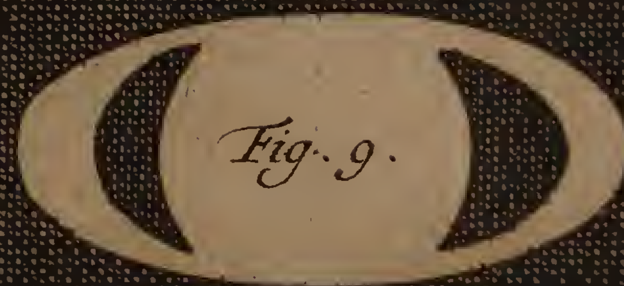
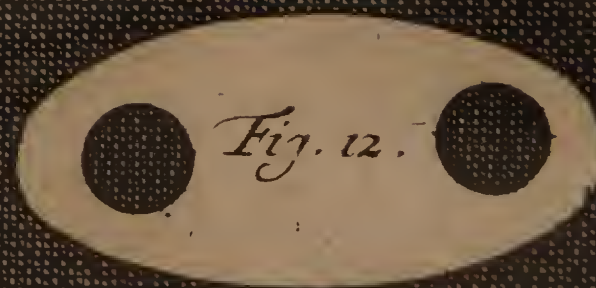
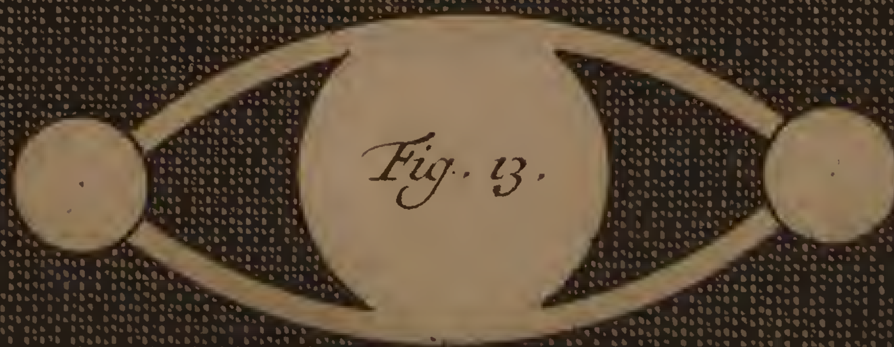

Fig. 9.


Fig. 10.


Fig. 11.


Fig. 12.


Fig. 13.



CHRISTIANI HUGENII

DE

SATURNI ANNULO

OBSERVATIONES.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI ANNULO
OBSERVATIONES.

I.

Obſervationes in Saturnum Pariſiis habitæ in Bibliotheca Regia.



Nno 1668, 17 Aug., hora 11 veſpertinâ Dni Hugenius & Picart obſervarunt Planetam Saturnum ope teleſcopiorum 21 pedum & invenerunt figuram ejus talem qualem hic exhibemus, globo in medio manifeſte excedente ſupra & infra ovalem quod vix dum anno præcedenti erat conſpicuum. TAB. LI. fig. 2.

Menſurarunt diverſimode inclinationem magnæ diametri Ovalis ad æquatorem, quæ inventa eſt circiter 9 graduum, licet eo empore tantum debuerit eſſe 4 graduum, ſecundum illa, quæ D. Hugenius dixit in Syſtemate Saturni, planum annuli, qui circumdat globum Planetæ cum plano Eclipticæ tantum efficere angulum 23. gr. 36; ſed cum ultima hæc obſervatio, & ſimiles aliæ hujus anni & præcedentis, magis exactæ ſint & habitæ tempore magis opportuno ad menſurandam obliquitatem, illis, quæ fundamentum fuere memoratæ detereminationis, Dus Hugenius invenit, loco 23 gr. 36 angulum plani Annularis & Eclipticæ eſſe circiter 31 graduum; & hoc poſito, non ſolum formam, quam jam ha- *Vera annuli inclinatio.*

 bet

bet Saturnus, ſed & omnes illas, quas obſervarunt Aſtronomi ab illo tempore a quo veras obſervare potuere, congruere perfecte cum hypotheſi annuli, & peculiariter obſervationem Dni Campani, Anni 1664 initio Julii, quam ipſe publici juris fecit, in quo magna Ovalis diameter duplicatæ minori diametro æqualis eſt.

Phaſis rotunda. Quod autem ad rotundam Saturni Phaſin attinet, non poteſt niſi parum admodum tempus hujus mutari, ex memorata mutata inclinatione ita ut Dus Hugenius adhuc dum phaſin hanc rotundam expectet anno 1671, in quo æſtate anſas amittere inchoabit, quas niſi poſt annum circiter recuperabit, juxta illa quæ tradidit in Syſtemate Saturni.



II.

Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum ſocii, ad auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni.

Brachia Saturno renata.



Um Saturnus abdicaverit figuram ſuam rotundam poſtquam hoc anno 1672 ex radiis ſolaribus emerſit, uti anno præcedenti prædixeram, & cum illi brachia ſint renata; ultima mutatio non minus meretur, ut in Diariis veſtris notetur, quam quædam aliæ præcedentes, quarum ibidem mentionem feciſti.

Ultimum in conjunctione cum Sole fuit Planeta hic 12 Martii præterito, in 22 gr. 35 min. Piſcium; magna autem obliquitas hujus loci Zodiaci ad noſtrum horizontem, quando oritur, in cauſa fuit quo minus tribus menſibus, aurora prohibente, videretur; nam 5 Junii tantum Dus Caſſini primum illum potuit obſervare, cum brachia Saturni jam facta eſſent adeo clara & ampla, ut inde colligi debuerit, jam à longo tempore fuiſſe inſtaurata; Obſervabat etiam in diſco Saturni parvam umbram ad latus ſeptentrionale brachiorum, pari-

Umbra in diſco Saturni.

riter ac exhibui in Systemate Saturni Tab. XLIX. *fig.* 6.; quod, æque ac instaurata brachia, congruit cum iis quæ statui in illo Systemate de annulo, quo cingitur Saturnus. Sed quoniam hæc hypothesis præcipue confirmatur observationibus, quas ultimo anno fecimus, quarum quædam nondum cum publico communicatæ fuere, ut mihi veniam concedas rogo has nunc memorare, cum annotationibus, quas ad eas feci.

Anno 1671 Saturnus apparuit rotundus sine brachiis aut ansis uti prædixi ante annos 14, quum publici juris feci meum Systema, licet id acciderit duobus mensibus prius quam expectaveram, scilicet in fine mensis Maji. Percepta deinde est quædam interruptio figuræ rotundæ, quam non prævidi, & quam difficulter admodum prævidere potuissem, quia Saturnum tantum observaram per unicum annum, cum hæc vaticinarer. Sed nosti, quam primum intellexerim, brachia rediisse, quod D[us] Cassini observavit 11 & 14 Augusti, me affirmasse illa certo certius brevi iterum peritura, quod quoque verum repertum est; nam 4 Novembris brachia Saturni erant adeo obscura, ut dubitarem an quidem iterum apparerent, licet D[us] Cassini affirmet se illa percepisse ultimâ vice 13 mensis sequentis Decembris, post quod tempus figura rotunda duravit, donec Saturnus in radios Solares se abscondit.

Hæc ultima brachiorum Eclipsis præcipue veritatem meæ hypotheseos probat; facile enim patet quam difficile fuisset secundam prævidere mutationem, priori adeo vicinam, nisi illius veram causam perspectam habuissem; præterquam quod modus, quo brachia secunda vice ablata fuere is ipse sit, quem statui in meo Systemate. Vidimus enim illa pedetentim deficere à claritate suâ, licet semper manserint satis ampla; quod erat certum indicium, radios solis valde oblique illustrare superficiem annuli Saturni, quæ ad nos conversa erat, quam tandem non amplius illustrarunt sed quidem oppositam. In præcedenti apparitione figuræ rotundæ, à fine Maji usque ad 14 Augusti, brachia latebant, non quia non illustrabantur, sed quia visus noster, parum admodum vel

Saturnus rotundus.

vel omnino nihil elevatus erat supra superficiem annuli, quem Sol intuebatur.

Hæc omnia tantum illis scripta sunt, qui cum cura examinarunt, quæ tradidi in Systemate Saturni: & pro iis adhuc addo, quantum attinet ad lineam æquinoctialem vel rotundæ apparitionis Saturni, quæ linea formatur intersectione annuli & plani orbitæ planetæ, me nullis cogi observationibus, ad situm illius mutandum quem in Systemate Saturni præscripsi in 20½ gr. Piscium & Libræ. Quoties Saturnus è Sole visus perveniet ad illa Zodiaci loca, rotundus apparebit, etiam quando ab hisce tantum duobus gradibus removetur; nam ex observationibus anni ultimi percepi ita restringendos esse limites quos 6 graduum statueram, ut satis facerem quibusdam Galilæi & Gassendi observationibus, quorum Telescopia minoris notæ fuerant, quam credere ausus eram. Juxta ultimas hasce limitationes minus apparitiones formæ rotundæ Saturni durabunt quam ipse olim prædixi; ita ut anno 1685 non initio mensis Martii, sed mense Julio, brachia amittet Saturnus prope finem apparitionis suæ, & illa recuperabit sequenti mense Novembri; pariter 1701 non poterit videri rotundus, nisi mense Junio, initio suæ apparitionis, & mense Augusto brachia ejus incipient renasci.

Linea æquinoctialis annuli.

Antequam finem huic scripto imponam, hic addam, Tabulam, quam dedi pro motu parvæ Lunæ, vel stellæ, quæ comitatur Saturnum, & circa illum volvitur 47 minutis minus quam 16 diebus, huc usque repertam esse adeo observationibus congruam, ut nondum videre queam, sitne quidpiam addendum vel detrahendum.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ,

SIVE

De Terris Cœlestibus, earumque ornatu,

CONJECTURÆ

AD

CONTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem:

GULIELMO III. MAGNÆ BRITANNIÆ REGI, A SECRETIS.

Horat. Epiſt. 6. lib. I.

Hunc ſolem, & ſtellas, & decedentia certis
Tempora momentis, ſunt qui formidine nulla
Imbuti ſpectent: quid cenſes munera terræ
Quid maris extremos Arabas ditantis & Indos?
Ludicra quid, plauſus, & amici dona Quiritis,
Quo ſpectanda modo, quo ſenſu credis & ore?

BENEVOLO LECTORI
SALUTEM.


Ibellus hicce jam ad umbilicum deductus, & prælo destinatus erat, cum maximo rei literariæ damno Illustrem ejus Auctorem primum morbus, dein mors occupavit. Qui tamen ut in lucem prodiret, cavit, ultima voluntate fratrem, ad quem scriptus est, rogitans, hujus ut edendi curam suscipere vellet. Cui rei Nobilissimo Viro innumeris occupationibus & peregrinationibus, utpote qui Magnæ Britanniæ Regi ad res Batavas à secretis esset, distracto vacare non licuit, nisi anno ferme post Auctoris obitum. Qua re, intercedente deinde etiam Typothetarum mora, factum est, ut cum editioni jam omnia pararentur, & hic Vir fato cesserit, adeoque & Parente & eo, qui post parentis obitum ejus vicem gerebat, & ad quem destinatus erat, destitutus fuerit hic Libellus. Eadem tamen, qua ab Auctore conscriptus erat, ratione, eademque ad fratrem, licet jam defunctum, inscriptione, (Re-

ligio enim fuit quidquam immutare) prodit in publicum, non dubia ſpe, fore, ut eruditi, ſicut reliqua omnia Auctoris, ſic & ultimum hunc ejus fœtum benigne accipiant. Demonſtrationes equidem Mathematicas non invenient ubique, neque enim res patitur, ſed, quo in his rebus nihil ultra deſiderari jure poſſe videtur, veriſimiles & ingenioſas conjecturas. Quæ ex cœlorum notitia depromi potuerunt, ea hic videbunt ratione demonſtrata; quæ ex iis non patent, ex cœleſtium corporum cum tellure noſtra affinitate ſolerter conjecta. Verum hujus quid ſit, ex ipſo Auctore commodius perſpicies. Vale.

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,
SIVE.
De Terris Cœlestibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD
CONSTANTINUM HUGENIUM,
Fratrem.

LIBER I.



Ieri vix potest, Frater optime, si quis cum Copernico sentiat, Terramque, quam incolimus, è Planetarum numero unum esse existimet, qui circa Solem circumferantur, ab eoque lucem omnem accipiant; quin interdum cogitet haud a ratione alienum esse ut, quemadmodum noster hic Globus, ita cæteri quoque isti, cultu ornatuque, ac fortasse habitatoribus non vacent. Præsertim si ad ea quoque respiciat quæ post Copernici tempora in cœlo deprehensa sunt; Comites nempe stellarum Jovis & Saturni, Lunæ montes camposque, & alia multa; quibus non solum veritas inventi ab illo systematis, sed & similitudo ac cognatio, Terram inter & Planetarum corpora, magnopere confirmatur. Itaque & nobis, cum prælongis Telescopiis sidera unà specularemur; quod jam per multos annos, propter occupationes tuas & continuam fere absen-

 tiam,

tiam, non licuit; sæpius ea de re sermones habitos memini. Qualia vero essent, quæ in istis regionibus extarent Naturæ opera, id ne sperandum quidem esse ut unquam sciri possit, frustraque proinde quæri, certo credebamus. Neque vero aut a priscis Philosophis, aut a recentioribus quidquam ejusmodi tentatum fuisse comperi. Nam inter illos quidem, jam ab ipso Astronomiæ exortu, cum primum Sphæricam esse Terræ formam intellectum est, eamque undique æthere cingi, fuere qui auderent alios esse in sideribus mundos, imo innumerabiles dicere. Posteriores vero, ut Cardinalis Cusanus, Brunus, Keplerus, qui & Tychonem Braheum idem sensisse scribit, Planetis quidem incolas suos tribuerunt; Cusanus & Brunus etiam Soli, & stellis inerrantibus: nihil tamen ulterius aut hi aut illi quæsivisse inveniuntur; neque etiam nuperus auctor Gallicus dialogi ingeniosi de Mundorum multitudine. Tantum fabulas quasdam de Lunæ populis nonnulli contexuerunt, animi causâ, Lucianicis, quas nosti, haud multo verisimiliores. Nam & Keplerianas his annumero, quibus ille in somnio Astronomico ludere voluit. Mihi vero, qui tot viris egregiis nequaquam me perspicaciorem esse existimo, sed eo feliciorem, quòd post illos tantùm non omnes, natus sim; cum ab aliquo tempore diligentius ista meditari cœpissem, visum est non prorsus obseptas esse, de rebus tam procul dissitis, inquirendi vias, sed verisimilibus conjecturis abunde materiam præberi. Quas conjecturas meas, prout sese subinde obtulerunt, in adversariis annotatas, nunc in ordinem redigere, tibique exponere volui; atque aliquid etiam adjicere de Sole, Stellisque inerrantibus, & mundi magnitudine, cujus particula quædam minima est totius Systematis nostri complexus. Et hæc quidem, pro solito tuo res superas cognoscendi studio, libenter te lecturum arbitror. Mihi certe scribere ea jucundum fuit; utque sæpe aliàs, ita nunc, velut in re ipsâ, verum esse expertus sum illud Archytæ; *Si quis in cœlum ascendisset, naturamque mundi & pluchritudinem siderum perspexisset, insuavem illam admirationem ei futuram,* (*quæ*

Fuisse qui Planetis incolas tribuerint, sed nihil præterea de iis inquisivisse.

(*quæ alioqui jucundiſſima fuiſſet*) *niſi aliquem cui narraret habuiſſet.* Utinam vero hæc noſtra narrare non omnibus poſſem, ſed præter te lectores arbitratu meo deligere liceret, qui nec Aſtronomicæ ſcientiæ, nec Philoſophiæ melioris rudes eſſent; quibus facile conatus hoſce probatum iri, nec, propter novitatem, defenſione opus habituros confiderem. Quia vero & in imperitiorum manus venturos provideo, & fortaſſe quorumdam ſeveriora judicia ſubituros, puto non abs re fore ut utrorumque reprehenſiones jam hinc repellere coner.

Occurritur objectionibus imperitorum.

Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum noſtrum cenſebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum diſtantias, aut quæ ſit magnitudo eorum, metiri poſſimus. Tum vero motum huic Terræ aut falſo adſcribi exiſtimant, aut nequaquam adhuc probatum eſſe. Quare nihil mirum, ſi, quæ talibus fundamentis exſtruuntur, pro ſomniis nugiſque ſint habituri. Quid vero his dicemus, niſi aliter ſenſuros ſi diſciplinis iſtis, naturæque rerum contemplandæ, operam dediſſent. Hoc vero longe plurimis non licuiſſe ſcimus, vel quod ad ea parum ingenio comparati eſſent, vel quod unde diſcerent non haberent, vel denique quod ſuis, aut reipublicæ curandis negotiis, alio vocarentur. Itaque nihil eos reprehendimus; ſed, ſi diligentiam in his rebus noſtram condemnandam putabunt, ad magis idoneos judices provocamus.

Conjecturas haſce S. Scripturis non adverſari.

Erunt alii qui ea, quæ veriſimilia eſſe oſtendere conati ſumus, Sacris Literis adverſari prædicent, cum de Terris animalibuſque, atque etiam ratione præditis, nos diſſerere animadvertent; de quorum origine, aut quod omnino in rerum natura extent, nihil illic traditum ſit, ſed ea potius ex quibus contrarium ſequatur. Tantum enim de Tellure hac, cum ſuis animantibus, herbiſque, & homine omnium domino commemorari. Quibus reſpondeo, quod & ante me alii, ſatis apparere non de omnibus iis, quæ Deus creavit, particulatim nos edoceri eum voluiſſe. Itaque cum vel

Siderum vel Terræ nomine, in prima Genesi, etiam Planetæ, qui præter Solem Lunamque sunt, comprehendantur; atque etiam Jovis & Saturni Comites; posse non tantum plures alios utriusque generis includi, sed & res innumeras quas in superficie eorum summo opifici collocare placuerit. Porro non nescire eos quo pacto interpretandum sit, quod dicitur omnia propter hominem condita esse; neque eo significari, ut a pluribus jam est animadversum, tot ingentia corpora stellarum, quas partim videmus, partim nec vidissemus quidem unquam, si Telescopiorum auxilium defuisset, nostræ utilitatis aut contemplationis gratia fuisse condita; quia id absurde diceretur. Quare cum operum Dei magna pars extra conspectum hominum sit posita, neque ad eos pertinere videatur, haud alienum esse opinari, aliquos extare, qui illa propius aspiciant & admirentur.

Inquisitionem horum ut nimis curiosam reprehendi non debere.

Sed dicent fortasse, cum de his ipse supremus auctor nihil amplius docuerit aut revelarit, credendum esse sibi scientiam eorum reservasse, ac proinde temere, & curiose nimis de iis inquiri. At nimium ipsos sibi sumere ajo, si definire velint, quousque homines investigando progredi debeant, diligentiæque eorum modum statuere; ac si terminos, quos hic Deus præscripsit, certo cognitos haberent; aut in hominum potestate esset illos prætergredi. Et sane, si talibus scrupulis retenti fuissent qui ante nos vixerunt, adhuc ignorari potuisset quænam Telluris esset figura, aut quæ magnitudo, & num aliqua Americæ regio. Item an Solis radiis Luna illustraretur, quibusve ex causis aut hæc aut ille deficerent; ac pleraque alia, quæ Astronomorum laboribus repertisque accepta referimus. Quid enim tam absconditum & inaccessum videbatur, quam quæ de rebus cœlestibus in aperta luce nunc posita sunt? Ex quo intelligitur industriam mentisque acumen hominibus data esse, quibus paulatim rerum naturalium cognitionem consequerentur, neque esse cur conari desinamus & ulteriora inquirere. Attamen reconditiora illa, quibus hic præcipue insistimus, scimus non esse ejusmodi, ut quærendo penitus investigari possint. Itaque nihil veluti cer-

certum affirmamus, (quî possimus enim?) sed conjecturis tantum agimus, quarum de verisimilitudine suo cuique arbitratu judicare liberum sit. Quod si quis irritam igitur, & inanem in his operam nos ponere dicat, de rebus iis conjecturas prodendo, de quibus ipsi fateamur nihil certi unquam comprehendi posse: respondebo totum Physices studium, quatenus in causis rerum eruendis versatur, eadem ratione fore improbandum; *ubi verisimilia invenisse laus summa est, & indagatio ipsa rerum, tum maximarum, tum occultissimarum, habet oblectationem.* Sed verisimilium multi sunt gradus, alii aliis veritati propiores, in quo diligenter æstimando præcipuus judicii usus vertitur.

Conjecturas non esse vanas, quia non plane certa.

Ut vero mihi videtur, non tantum res ad cognitionem maximas hic indagamus, sed quarum contemplatio studiis quoque sapientiæ multum conducat. Expedit nimirum ut, velut extra Tellurem hanc positi, procul eam intueamur, quæramusque, an sola sit in quam omnem ornatum natura contulerit. Ita enim rectius quid sit, quoque loco habenda, intelligere poterimus: quemadmodum qui longinquas regiones obeunt, de patriæ suæ rebus verius judicare solent, quam qui nunquam inde se moverunt. Nec sane ille magnopere admirabitur quæcunque hic vulgo maxima habentur, qui, rationibus nostris aliquid tribuens, multitudinem Terrarum nostræ similium, similiterque incolis suis frequentatarum, sibi proposuerit. Deum vero, tantarum rerum effectorem, quî poterit idem non valde suspicere & venerari? cujus providentiam, sapientiamque mirabilem, passim hic assertam inveniet, contra falsas opiniones eorum, qui vel ex fortuito corpusculorum concursu ortam esse Terram, vel omni principio eam carere dixerunt. Sed jam ad propositum.

Ad sapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur.

Et quoniam maximum sumetur argumentum, ad ea quæ instituimus probanda, ex ordinatione Planetarum Copernicea, quodque inter eos Tellus hæc haud dubie numeratur; bina schemata hic initio describo, quorum alterum orbes eorum, circa Solem dispositos, continet, veris proportio- TAB. LIV. fig. 1.

ni-

nibus expressos; simile illi quod in Automato nostro sæpius conspexisti: alterum rationes magnitudinum ostendit, quibus corpora Planetarum inter se, & ad Solem, comparantur; quod in eodem Automato adjectum est. In priore punctum medium Sol est; à quo deinceps, noto omnibus ordine, sunt orbitæ Mercurii, Veneris, Telluris, cum superaddita via Lunæ; tum Martis, Jovis, & Saturni: ac circa Jovem, Saturnumque circelli Comitum; illius quatuor, hujus quinque. Quos circellos, cum eo, qui Lunæ nostræ dicatus est, longe majores hic poni sciendum, quam pro ratione ad Planetarum primariorum orbitas; ne, ob parvitatem, penitus visum effugerent. Orbitarum vero quanta reipsa sit vastitas inde intelligere licet, quod distantia a Sole ad Terram, decem vel duodecim millia Terræ diametrorum continet: de qua mensura pluribus postea agetur. Omnes porro in eodem fere plano sitæ sunt; ut proinde non multum discedant ab eo in quo Tellus circumit, quod Eclipticæ planum vocatur. Hoc vero oblique secatur ab axe Telluris, in quo illa volvitur horis viginti quatuor, respectu Solis: isque axis, nisi quod mutationem lentissimam subit, quam norunt Astronomi, sibi ipsi parallelus manet, dum ipsa circa Solem defertur; ex quo dierum noctiumque oriuntur vices, itemque temporum anni commutationes, ut passim docent eorum libri. Unde & tempora periodorum, quibus circuitus suos Planeta quisque peragit, huc transcribo. Nempe Saturni, annorum 29, dierum 174, horarum 5. Jovis annorum 11, dierum 317, horarum 15. Martis proxime dierum 687. Telluris dierum 365¼. Veneris dierum 224, hor. 18. Mercurii dierum 88.

TAB. LV. fig. 1. *Copernici systema exponitur.* *TAB. LIV. fig. 1.*

Hic est ille, notissimus jam, cælestium corporum ordo, a Copernico repertus, idemque naturæ simplicitati convenientissimus. Hunc si quis convellere aut improbare contendat; is discat primum, ex demonstrationibus Astronomorum, quanto in hac descriptione melius faciliusque omnium eorum, quæ circa motum siderum animadvertuntur, ratio reddatur, quam in Ptolemaico aut Tychonis systemate. Cogno-

Copernici doctrinam quæ rationes confirment.

noscat etiam, ex singulari Kepleri observatione, quomodo Planetarum, interque eos Telluris, a Sole distantiæ temporibus periodorum, quas retuli, certa quadam proportione respondeant; quam postea Jovis quoque & Saturni Comites, horum respectu, servare deprehensum est. Intelligat quam contra motus naturam quiddam comminiscendum sit, quo demonstretur cur stella Polaris, in extrema cauda minoris Ursæ, exiguo nunc circulo moveatur, duobus gradibus & tertia parte à Polo distans; cum ante annos mille octingentos viginti, ætate nempe Hipparchi, duodecim gradibus, 24 scrupulis, ab eodem Polo abfuerit: post aliquot vero sæcula, ad 45 gradus inde recessura sit, & post annorum viginti quinque millia, eodem quo nunc est, reversura. Ut proinde cælum totum, si circumrotari dicatur, super alio atque alio axe id faciat necesse sit, quod est absurdissimum; cum in Copernici hypothesi nihil sit explicatu facilius. Denique expendat omnia illa, quibus, ad argumenta Copernico objici solita, Galilæus, Gassendus, Keplerus, aliique plurimi responderunt. Quorum rationibus ita sublati sunt qui supererant scrupuli, ut omnes nunc Astronomi, nisi tardiore sint ingenio, aut hominum imperio obnoxiam credulitatem habeant, motum Telluri, locumque inter Planetas, absque dubitatione decernant.

In altero, quod dixi, schemate, ita horum globi cum Sole oculis subjiciuntur, ac si juxta se positi essent. Atque hic rationem diametrorum, ad Solis diametrum, eam secutus sum, quam tradidi in libro de Saturni Phænomenis. Nempe Annuli Saturnii eam quæ 11. ad 37; Globi inclusi, ad eandem Solis diametrum fere, quæ 5 ad 37; Jovis, quæ 2 ad 11; Martis, quæ 1 ad 166; Telluris, quæ 1 ad 111; Veneris, quæ 1 ad 84; quibus nunc addo Mercurii, quæ est 1 ad 290 ex Hevelii observatione Anno 1661 habita; cum in Solis disco Mercurius conspiceretur, nostro tamen, non illius calculo.

Planetarum magnitudinis inter se & ad Solem ratio. TAB. LV, fig. 1.

Quomodo autem hæ nostræ magnitudinum rationes inventæ sint, tum ex cognita proportione distantiarum à Sole, tum

ex mensura Diametrorum, Telescopiis capta, eo, quem dixi, libro ostendi: neque adhuc video cur multum, ab iis quas tunc definivi, recedam; etsi nihil eis deesse non contenderim. Nam quod multi existimant, in metiendis apparentibus diametris, præstare lamellis nostris usum Micrometrorum quæ vocant, quibus fila tenuissima in foco Lentis majoris prætenduntur, nondum iis assentiri possum, sed aptiores esse lamellas virgulasve tenues arbitror, quas eo loco objiciendas docueram. Ex quo istud Micrometrorum inventum, itemque Telescopii ad organa Astronomica adaptatio, non multo post emanavit: non sine laude tamen eorum, qui in perficiendo tam utili invento elaborarunt.

Micrometris præstare lamellas virgulasve tenues.

Cæterum, in hac planetarum comparatione, notanda est ingens Solis magnitudo, cum interioribus quatuor Planetis collata; utque hi Saturno quoque, ac Jove, longe longeque minores sint. Nam considerandum, non ordine crescere eorum corpora cum distantiis a Sole; quippe cum multo major sit Veneris, quam Martis, globus.

Solem Planetis multo majorem esse.

His de utroque Diagrammate expositis, nemo, ut puto, jam non videt, quam clare ex priore, in quo systematis est typus, sequatur, eodem genere, cum cæteris quinque Planetis, Tellurem hanc nostram contineri. Nam vel ipsi circulorum positus hoc testantur. Atqui præterea constat, telescopiorum observationibus, & globosa esse omnium corpora, itidem ut Telluris, & à Sole splendorem similiter eos mutuari. Ac denique in hoc quoque ei similes esse, quod in se ipsis circum proprios axes volvantur: quis enim de cæteris dubitet, cum in Jove & Marte hoc certo compertum sit? Sicut autem Tellus Lunam comitem habet, ita Jupiter & Saturnus suas. Quid igitur tam probabile est, cum in his tot rebus Telluri cum Planetis illis primariis intercedat similitudo, quam non minori quoque dignitate & pulchritudine eos esse, nihiloque minus ornatos cultosque: aut quænam cur hoc aliter se habeat ratio excogitari potest?

Tellurem Planetis, & hos Telluri recte assimilari.

Sane si cui, in dissecti canis corpore, viscera ostenderentur, cor, stomachus, pulmones, intestina; tum venæ, arte-

Ex similitudine in hisce recte argumenta peti.

teriæ, nervi; etiamsi nunquam animalis corpus apertum conspexisset; vix dubitaret, quin similis quædam fabrica, ac partium varietas, in bove, porco, cæterisque bestiis inesset. Nec si unius, ex Saturni aut Jovis Comitibus, naturam cognitam haberemus, non eadem fere quæ in illo, in cæteris quoque reperiri putaremus? Similiterque ex uno quopiam Cometa, si quidnam esset perspici posset, eandem omnium rationem esse statueremus. Itaque plurimum ponderis habet illa ex similitudine petita, & à rebus visis ad non visas producta ratio. Quam proinde sequentes, ex Planeta uno, quem coram aspicimus, de reliquis ejusdem generis rectè conjecturam faciemus.

Planetas solidos esse & gravitate pollere.

Ac primùm quidem, non aliter quam Tellus nostra, solido corpore eos constare existimabimus. Deinde prorsus etiam verisimile censebimus, adesse globis eorum id quod gravitatem appellamus; cujus vi corpora quæque, in superficie eorum hærentia, premant eam; aut, si dimoveantur, ex omni parte velut attracta recidant. Quod ex ipsa quoque globi forma liquet, cum hæc ex conatu corporum, ad centrum unum tendentium, generetur. Imo jam, certo quodam ratiocinio, colligere didicimus, quanto majus minusve in Jove ac Saturno, quam apud nos, gravitatis momentum esse debeat. Qua de re, deque auctore ejus, in Diatriba de Causis gravium diximus.

Nunc vero ulterius quærere pergamus, quibus gradibus ad penitiora quædam, de statu ornatuque Terrarum istarum, cognoscenda perveniri possit. Ac primùm quam verisimile sit herbas, & animalia in earum superficie existere, æque ac in Tellure nostra.

Nec deesse illis animalia.

Nemo negabit puto, & formam & vitam, & crescendi generandique rationem, in stirpibus animantibusque majus quid esse, magisque mirandum quàm corpora vitâ carentia, quantumvis mole conspicua sint; velut montes, rupes, maria. Patet etiam in utroque illo viventium genere, multo aliter longeque expressius, cerni Divinæ providentiæ intelligentiæque præstantiam. Cum

enim quæ in Terra, imo quæ in Cælo quoque aſpicimus, aliquis Democriti, aut etiam Carteſii ſectator, ita ſe explanaturum profiteri poſſit, ut tantum atomis & motu horum indigeat; in herbis tamen & animalibus fruſtra erit, nec de primo eorum exortu quidquam veriſimile adferet; cum nimis manifeſto appareat, nunquam vago, ac fortuito corpuſculorum motu, talia quædam prodire potuiſſe: quippe in quibus omnia ad certum finem egregie apta accommodataque cernantur; cum ſumma prudentia, & legum naturæ, ipſiuſque Geometriæ, cognitione exquiſita, quemadmodum in ſequentibus ſæpius oſtendetur: ut jam omittamus illa in progignendo miracula. Quod ſi igitur in Planetis nihil aliud quàm vaſtæ ſolitudines, corporaque inertia, & vita carentia reperiantur; atque abſint ea in quibus clariſſime certiſſimeque Architecti ſupremi ſapientia eluceſcit; haud dubiè multum dignitate & pulchritudine concedent Telluri noſtræ: quod, ut jam dixi, rationi adverſatur.

Non igitur ſic; ſed erunt & ibi corpora quædam motu prædita, ſeſeque ipſa moventia, neque his quæ in Terra ſunt ignobiliora; adeoque erunt animantia. His autem poſitis, jam de herbis quoque fere neceſſario concedendum eſt; ut ſit aliquid quo illa alantur. Omnia verò hæc non aliter quam in ſuperficie Planetariorum globorum exiſtere, dubitari non poteſt; cum calore Solis gaudere ac foveri debeant; cujus radiis, non ſecus quam Tellus noſtra, expoſiti ſint.

Ut nec plantas.

Sed dicet aliquis, celerius quàm par eſt, hic nos progredi. Nam, ut non negetur res aliquas in Planetarum ſuperficie reperiri, quæ ibi creſcant & moveantur, Deoque auctore, non minus quam noſtra hæc, dignæ ſint; longè diverſam tamen earum poſſe eſſe naturam, ut nec materia, nec creſcendi more, nec extrinſeca forma, aut internis partibus, quidquam iis, quæ apud nos ſunt, ſimile habeant: ac talia ſint denique, ut nihil ejuſmodi in mentem homini venire poſſit. Hoc igitur jam quæramus quam ſit veriſimile; & an non potius credendum ſit, non tantam eſſe diverſitatem

quan-

quanta existimetur. Favet eorum sententiæ, qui omnia alia illic imaginantur, quod Natura videatur varietatem plerumque, & plurimis in rebus, sectari; quodque Conditoris potentia hoc ipso magis declaretur. Sed cogitare debent, non esse hominum arbitrio definiendum quàm magna ista sit varietas ac dissimilitudo. Neque, quia possit esse immensa, resque illæ ab intellectu, & comprehensione nostra penitus remotæ, idcirco necesse esse, ut reipsa tales existant. Quamvis enim similia omnia iis quæ apud nos sunt, finxisset Deus in cæteris Planetis; nihilo minor esset spectatoribus eorum, si qui sunt, admiratio, quam si plurimum distarent: cum, quid in aliis effectum sit, nullo modo possint cognoscere. Potuisset in terris Americæ, aliisque longè remotis, aliqua creasse viventia, quæ his nostris nihil simile haberent; neque id fecit tamen. Nam formarum quidem diversitatem aliquam esse voluit, quibus animalia herbæque nostræ à transmarinis illis, dissiderent, sed & in his ipsis formis, inque crescendi & generandi modis, multa utrisque convenire fecit. Habent enim & illic animalia pedes, alas; atque intus cor, pulmones, intestina, vulvas; cum hæc omnia in unoquoque genere illorum, ac nostratium quoque, planè diversa ratione ordinari potuerint, ab infinitæ solertiæ opifice. Non igitur omnem varietatem quam poterat in rebus creatis, earum auctor exhibuit, nec proinde argumento illi, quod a Naturæ novandi studio petitur, tantum tribuendum est, ut omnem, qui in cæteris Planetis est, ornatum ab eo, qui in Terra nostra conspicitur, prorsus alienum putemus. At contra credibile est, inter ea quæ in superficie istorum globorum generantur, quæque apud nos sunt, præcipuam esse differentiam, quæ ex majori, minorive, eorum a Sole, caloris vitæque fonte, distantia oriatur. Propter quam tamen magis materiam, quam formam rerum, variari necesse sit.

Non nimiam in hisce fingendam dissimilitudinem.

Ad materiam vero quod attinet qualiumcunque stirpium, atque animantium, quæ Planetas exornant, etsi qualis sit cogitatione assequi nequeamus, illud tamen vix dubitari potest, quin ex elemento humido, uti nostra omnia, crescant &

alantur. Nihil enim aliter gigni posse omnes fere Philosophi arbitrantur; & fuere inter præcipuos, qui ex aqua omnium rerum originem esse dicerent. Etenim, sicca & arida quæ sunt, motu carent: absque motu vero nihil corporibus, quo augeantur, accedere posse manifestum est. At liquidorum particulæ, & inter se continue moventur, & facile sese ubique insinuant; quo fit, ut non tantum seipsas, sed & alias diversæ naturæ, quas secum vehunt, crescentibus apponere aptæ sint. Ita enim, aquæ affluxu, & herbas adolescere, foliisque & fructibus augeri, & lapides ex arena concrescere cernimus. Itemque metalla & crystallos, gemmasque incrementa inde capere satis constat, etsi in his obscurius id animadvertitur, propter lentissimos progressus; quodque sæpe non in iis, quibus enatæ sint, locis cavitatibusque reperiantur; pervetustis, ut videtur, Terræ ruinis convulsionibusque disjectæ. Sed aquæ elementum a Planetis non abesse, verisimiles quoque conjecturæ suppetunt, ex telescopiorum observationibus. Apparent enim in Jove tractus quidam reliquo disco obscuriores, iique non eadem semper forma permanentes, quod nubium proprium est. Maculæ vero, quæ immutabiliter globo ejus inhærere conspiciuntur, sæpe longo tempore obtectæ manent, nubibus videlicet illis interceptæ, è quibus deinde rursus emergant. Atque etiam nubes in medio Jovis disco exoriri quandoque annotatum fuit, & maculas quasdam minores existere, reliquo corpore magis lucidas, neque eas diu superesse; quas Cassinus ex nivibus esse conjectabat, cacumina montium insidentibus. Mihi non improbabile videtur, terræ regiones candidiores esse, superfusis nubibus plerumque occultatas, ac nonnunquam ab iis liberas.

Aquas a Planetis non abesse.

Apparent, etiam in Marte, lucis & obscuritatis discrimina, ex quibus conversio ejus ad Solem, viginti quatuor horis cum 40 scrupulis primis, absolvi reperta est; nubes tamen nondum fuerunt animadversæ, idcirco quod multò minor cernitur quam Jupiter; etiam cum maximè ad Tellurem appropinquat. Præterquam quod & intensior Martis lux, utpote

a propiore Sole accepta, intuentibus impedimento eſt. Eademque lux magis etiam obſtat in Venere. Sed ſi Tellus ac Jupiter nubes aquaſque habent, vix dubitandum eſt quin & in cæteris inveniantur Planetis. Nec tamen noſtræ prorſus ſimiles eſſe aquas iſtas dixerim; etſi liquidæ ut ſint, ad uſus quos præſtare debent, requiritur; ut verò perſpicuæ, ad pulchritudinem. Noſtra enim hæc, in Jove & Saturno, continuo gelu aſtringeretur, propter magnam Solis diſtantiam. Itaque putandum eſt naturam earum, quæ in Planetis ſunt, ad ſuam quamque regionem attemperatam eſſe; ut in Jove quidem ac Saturno difficilius in glaciem vertantur, in Venere verò, ac Mercurio, minus facile in vapores abeant. In omnibus autem attractum a Sole humorem, ſubſidere rurſus, & unde venit reverti, neceſſe eſt, ne penitus aridum Solum relinquatur. Non cadet autem niſi in guttas denſatus; quod eveniet, ſicuti apud nos, cum in frigidiorem locum aſcenderit ex inferiore calidioreque ob terræ viciniam.

Noſtra tamen non prorſus ſimiles.

Habemus igitur in globis illis campos Solis radiis expoſitos, pluviiſque aut rore irrigatos, in quibus ſi quid enaſcatur; ut fieri debere utilitatis & ornatus gratia diximus; id eodem quo apud nos modo fieri veriſimile eſt: cum nec aliter fere, nec melius poſſit. Ut nempe radicibus ſuis ſolo adhæreat, ſimulque harum fibris humorem inde combibat. Neque vero ſatis ornatæ mihi eſſe terræ iſtæ videbuntur, niſi ſtirpes quaſdam habeant alte excreſcentes, quæque adeo arbores, aut arborum inſtar, fiant: quandoquidem hæ maximum, ac, præter aquas, unicum ſunt ornamentum, quod Natura terris largiri poſſit. Quæ quantum amœnitatis & gratiæ afferant facile unuſquiſque ſecum exiſtimat. Ut omittam jam materiæ ex arboribus oportuniſſimum ad omnia uſum. Porro vix aliter quoque propagari ſtirpes, aut perennare poſſe exiſtimo, quam producendis ſeminibus. Cum unica fere hæc ratio videatur, eademque tam mirabilis, ut non ſolius Telluris noſtræ gratia inventa ſit. Denique nihil vetat, ut, quemadmodum in diverſis hujus terræ regionibus, ita in iſtis quoque longè remotis, idem in iis quæ ad ſtirpes attinent, Natura ſecuta ſit.

Nec alia ratione illic naſci & propagari ſtirpes quam apud nos.

Ne-

Idem & de animalibus verum esse.

Neque vero dispar ratio est in animalibus; cur non & pascendi, & generandi, modus similis putetur in Planetis ei qui est apud nos. Quia nempe universa terræ hujus animalia, sive quadrupedum generis, aut volucrum, aut natantia, aut reptilia, ipsaque insecta, idem naturæ præscriptum sequuntur. Vescuntur enim vel herbis, fructibusque, vel ipsis animantibus, quæ inde nutrita fuere: omniumque generatio per conjunctionem maris & fœminæ, perque fæcunditatem ovorum (nam & hæc ubique animadvertitur) peragitur. Nam hoc quidem certum est, fieri non posse ut, vel herbæ, vel animantia quæ illic sunt, sine propagatione generis sui esse perseverent; quia vel fortuitis casibus interire ea ac deficere contingeret; cum herbæ stirpesque humida materia constent, eoque etiam exarescere debeant; animalia mollibus flexilibusque membris, nec, ut silices, duris. Quod si in his alias nascendi vias comminiscamur, velut ex arboribus; quemadmodum diu creditum est, ex harum genere quodam in Britannia anates nasci, apparet quàm id à ratione abhorreat, propter summam, quæ lignum inter carnesque est, differentiam. Vel si animalia ex limo terræ existere putemus, velut de muribus in Ægypto multi prodiderunt, quis, naturæ paulo intelligentior, non videt hoc alienum esse institutis ejus? aut quis non existimet multò magis convenire Dei magnitudini ac sapientiæ, ut semel omnis generis animantia creaverit, inque Terrarum orbem certo modo, (quem nemo hominum adhuc divinare potuit) imposuerit, quam ut perpetuo novis ex terra producendis vacare necesse habeat? Quibus alendis, educandisque, abesset quoque prorsus parentum cura ac charitas, quam necessaria quadam ratione, omni animalium nostrorum generi, insitam, ingenitamque novimus. Sed hæc quæ ad propagationem attinent, etsi fortasse aliter sese habeant, hoc tamen rationibus superius adductis satis probatum est, & stirpes & animalia in Planetarum terris inveniri, ne scilicet sint hac nostra viliores. Quod cum ita sit, tum quoque, ne minus, quam nostra Tellus, istæ aliæ ornatæ sint, necesse est, ut non minor sit,

in

in utroque genere illo, quàm apud nos varietas. Quænam vero hæc esse potest? Equidem cum, in omni animantium nostrorum genere, cogito quibus modis moveantur; omnia video eo reduci, ut vel pedibus ingrediantur binis, quaternisve; insecta senis, vel etiam centenis; vel ut in aëre volent, alarum mirabili vi & moderamine; vel sine pedibus reptent; vel flexu corporum vehementi, aut etiam pedum percussu, in aqua sibi viam aperiant. Præter hos incedendi modos, vix videtur alius dari, aut omnino mente concipi posse. Ergo quæ in Planetis extant animantia, uno aliquo ex his utentur; aut quædam pluribus etiam, quemadmodum apud nos aves amphibiæ; quæ & pedibus incedunt, & natant in aquis, & in aëre volitant: & crocodili & hippopotami, inter terrestria, & aquatica, medii generis. Nulla autem præter hasce vita cogitari posse videtur. Quid enim esse possit, in quo animantia existant, præter tellurem solidam, aut Elementum liquidum, quale aquæ nostræ, aut multo liquidius, quale aër; aut illis similia. Posset enim esse aër multò, quàm apud nos densior, graviorque; eoque ad volandum accommodatior, neque tamen minus perspicuus. Possent etiam liquidorum plura genera, alia aliis superinducta esse. Velut si, super mare, incumbere cogitetur alia quæpiam materia, quæ decuplo levior sit aqua, centuplo gravior aëre; ac sua quidem superficie extrinsecus terminata, sed ut extra eam, terræ partes solidæ emineant. Sed non est, cur plura hujusmodi in cæteris Planetis, quàm in nostro, inveniri putemus, & si inveniantur, non tamen aliis modis ibi animalia moveri poterunt. Cæterùm quod ad varias eorum formas attinet; cum videamus in variis terræ regionibus miram adeo ac multiplicem diversitatem; invenirique in America quæ frustra alibi quæras; magna ratio est ut nullam earum formarum, quæ in Planetis exstant, imaginando assequi nos posse credamus. Quanquam si omnes istos movendi modos cogitemus, quos hic recensui, nihil mirum esset non magis differre aliquod istorum animalium à nostra-

te quopiam, quam noſtra diſcrepant inter ſe. Ea dico quibus minimum eſt ſimilitudinis.

Quam varia porro ſint genera eorum in Planetis ita optimè colligemus, ſi ad ea quæ apud nos ſunt, miramque in iis formarum diverſitatem, animum advertamus. Planè enim veriſimile eſt, non minori numero occurſuras, ſi quis ad Jovis, aut Veneris globum cominus ſpectandum admitteretur. Percurramus verò (nam de omnibus dicere longum eſſet) majores noſtrorum animalium differentias, vel formâ, vel proprietate aliqua ſingulari notabiles; idque in terreſtribus, aquatilibus, volucribus. Cogitemus quæ ſit inter equum, elephantum, leonem, cervum, camelum, porcum, ſimiam, hiſtricum, teſtudinem, chamæleontem, diſſimilitudo; quanta in aquaticis, cetum inter & phocam, raiam, lucium, anguillam, ſepiam, polypum, crocodilum, piſcem volantem, torpedinem, cancrum, oſtream, muricem. In avium genere quantum diſcrimen, aquilæ, ſtruthiocameli, pavonis, cygni, noctuæ, veſpertilionis. Reptilia pro uno tantum genere cenſeamus. At in inſectis formicas ſpectemus, araneos, muſcas, papiliones; & miram horum naturam, quod ex vermibus volatilia evadant. In omnibus vero his, ſcimus quàm magnus præterea ſit numerus minus diſſidentium.

Summam animalium apud nos varietatem eſſe.

At quantuſcunque ſit, nihilo minorem eſſe in unoquoque reliquorum Planetarum putandum eſt. Quamvis vero de figura iſtorum animalium fruſtra per conjecturas quæratur, tamen de vita eorum generatim jam aliquid aſſecuti videmur; & de ſenſibus erit in ſequentibus quod dicamus.

Nec minorem in Planetis.

Sicuti verò animantium, ita ſtirpium quoque & arborum noſtrarum præcipuæ differentiæ expendi poſſunt. Velut quæ in abiete, quercu, palma, vite, ficu; tum ea quæ nuces, Cocos dictas, generat arbore; itemque alia apud Indos, è cujus ramis radices novæ pullulant, inque terram demittuntur. Item, in herbis, gramen, papaver, braſſica, hedera, pepones, ficus Indica foliis craſſis, ſine caule, ſuccreſcentibus,

Idem in ſtirpibus locum habere.

bus, aloë. In quibus rursus ea quam scimus, minus dissimilium est copia. Ad hæc propagandi viæ variæ inspiciantur; velut ex seminibus, nucleis, taleis, insitione, bulbis. Quibus omnibus nihilo pauciora, aut minus miranda, in Planetarum terris reperiri, existimandum sit.

Sed quod in hac disquisitione præcipuum est, plurimamque jucunditatem habet, nondum attigisse mihi videor; quamdiu nullos in terris illis spectatores posui, qui tot rebus creatis fruantur, pulchritudinemque, & varietatem earum, admirentur. Et video quidem, neminem fere eorum, quibus vel leviter hæc meditari contigit, dubitasse quin spectatores aliqui in Planetis collocandi sint: non quidem homines nobis similes, sed animantia tamen ratione utentia. Nempe iis visum est, qualemcunque terrarum istarum ornatum, velut frustra, nulloque fine aut consilio, fore procreatum, si non hoc propositum fuisset, ut ab aliquo cerneretur, qui intelligere ejus elegantiam posset, fructumque simul percipere, & summi opificis admirari sapientiam. Ego vero non hoc præcipuum argumentum habeo, cur animal rationis particeps Planetas incolere existimem. Quid si enim dicamus ipsum Deum spectare quæ effecit; (alia quidem ratione quam nos, sed videre eum quis dubitet qui oculos fabricatus est;) iisque delectari, neque præterea quidquam requiri. Nonne enim ob hoc ipsum & homines condidit, & quicquid continet mundus universus? Itaque quod præcipue me movet, ut rationabile animal in Planetis non deesse credam, hoc est, quod nimia Terræ nostræ præ cæteris illis esset præstantia ac nobilitas, si sola animal haberet tam longe cæteris omnibus animalibus, nedum stirpibus præcellens; in quo inest divinum quiddam; quo cognoscit, intelligit, res innumeras memoria complectitur, veri expendendi judicandique capax est, cujus denique gratia quicquid terra progenerat paratum esse videtur. Omnia enim in usus suos vertit. Lignis, lapidibus, metallis, domos exstruit; Avibus, piscibus, pecore & herbis vescitur; Aquæ & ventorum commodis ad navigandum utitur; ex florum odore pulchrisque coloribus

In Planetis esse animantia, quæ ratione utantur.

voluptatem percipit. Si nullum in Planetis eſt ejuſmodi animal, quid eſſe queat, quod tanti æſtimandum ſit, quove is defectus penſetur? Pone in Jove majorem multo animantium varietatem; plures arbores, herbas, metalla: nihil erit in omnibus his, ob quæ tantum dignitatis accedat iſti mundo, ac noſtro propter humani ingenii mirabilem naturam. Hic ſi me judicium fallit, fateor me pretia rerum æſtimare neſcire.

Non obſtare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient.

Nec dicat aliquis, tantum malorum ac vitiorum eidem humano generi ineſſe, ut merito dubitari poſſit, an, tale quodpiam animal Planetariis mundis tribuendo, dignitas iis ornamentumque, an his contraria acceſſura ſint. Primum namque non impediunt vitia, majori hominum parti inſita, quin ii qui virtutem, ac rectum rationis uſum ſectantur, tanquam pulcherrimum quid præſtantiſſimumque cenſendi ſint. Præterea credibile eſt, ipſa illa animi vitia, magnæ hominum parti, non ſine ſummo conſilio data eſſe. Cum enim Dei voluntate ac providentia talis ſit Tellus, ejuſque incolæ, quales cernimus; abſurdum enim foret exiſtimare omnia hæc alia facta eſſe, quam ille voluerit, ſciveritque futura; putandum eſt utique non fruſtra multiplicem adeo animorum diverſitatem mortalibus eſſe inſitam; ſed malorum cum bonis miſturam, quæque inde eveniunt infortunia, bella, calamitates, eo fine accedere, ut neceſſitate urgente ſtimuloſque admovente, ingenia excitentur, exerceanturque, dum quærimus ea quibus ab hoſtibus nos tutemur, quibuſve machinis teliſque eos perſequamur: Utque paupertatem ac miſeriam depellere conantes, varias artes exquiramus, naturamque ſcrutemur, ex cujus cognitione deinde auctoris potentiam prudentiamque admirari neceſſe ſit; quas forſan alias pari ſtupore ac beſtiæ præteriiſſemus. Nec enim dubitandum eſt, ſi in continua pace, omniumque rerum affluentia homines ætatem agerent, fieri poſſe ut admodum diu, non aliter fere quam bruta animalia, victuri ſint; omnis ſcientiæ expertes, pluriumque commodorum ignari, quibus melius jucundiuſque vita tranſigitur. Careremus mirifica illa ſcri-

ben-

bendi arte, nisi summa in commerciis bellisque necessitas eam extudisset. Huic artem navigandi, huic serendi debemus, maximamque partem cæterorum quibus fruimur inventorum; itemque naturæ arcana fere omnia, inter experiendum reperta. Ita ea ipsa propter quæ incusanda rationis facultas videbatur, possunt dici ad perficiendam exacuendamque eam plurimum prodesse. Nam & virtutes ipsæ, fortitudo animi, & constantia, vix aliter quam in periculis rebusque adversis apparere possunt.

Quod si igitur genus animalium rationabile in cæteris Planetis esse cogitemus, quod virtutibus vitiisque fere iisdem atque homines præditum sit, id tanti esse existimandum est, ut absque iis, longè quàm Tellus hæc nostra viliores futuri sint.

Nec rationem in Planetarum incolis à nostra diversam esse.

Positis vero ejusmodi Planetarum incolis ratione utentibus, quæri adhuc potest, anne idem illic, atque apud nos, sit hoc quod rationem vocamus. Quod quidem ita esse omnino dicendum videtur, neque aliter fieri posse; sive usum rationis in his consideremus, quæ ad mores & æquitatem pertinent, sive in iis quæ spectant ad principia & fundamenta scientiarum. Etenim ratio apud nos est, quæ sensum justitiæ, honesti, laudis, clementiæ, gratitudinis ingenerat, mala ac bona in universum discernere docet: quæque ad hæc animum disciplinæ, multorumque inventorum capacem reddit. Exstaretne alibi diversa ab hac ratio? censereturque injustum aut scelestum in Jove aut Marte, quod apud nos justum ac præclarum habetur? Certè nec veri simile est, nec omnino possibile. Cum enim rationis, qualem hic agnoscimus, ductu opus sit ad tuendam vitam ac societatem (nam & hanc apud Planeticolas reperiri ostendemus) si contraria ejus decretis statuantur, sequetur ruina ac subversio eorum, quibus ejusmodi mens perversa contigisset. At conservatio, ut videmus, rerum conditori ubique proposita est. Verum utut affectiones animi à nobis aliquatenus diversæ sint apud istos longinquarum terrarum habitatores, puta in his quæ ad amicitiam, iram, odium, honestatem, verecun-

 diam,

diam, decorem attinent; non tamen dubitari poteſt, quin in veri inveſtigandi ſtudio, judicandis rationum conſequentiis, ac præſertim in ratiociniis, quæ ad quantitatem ac magnitudinem ſpectant, circa quæ Geometria verſatur, (ſi quid habent ejuſmodi, quod mox inquiremus) non, inquam, dubitari poteſt, quin prorſus ſimilis ſit, eademque via ingrediatur illorum ac noſtra ratio; quodque apud nos verum eſt, idem ſit in cæteris Planetis. Etſi vis ac facultas in his rebus major minorve illorum incolis fortaſſe quam nobis contigerit.

Sed jam nimis longè provectum me eſſe ſentio. Ante enim diſpiciendum erat de ſenſibus corporeis iſtorum in Planetis agentium, quibus ſi carerent, vix jam aut vitam, ut animalia, ſortiti eſſe videri poſſint, aut habere, in quo rationis uſum exerceant. Puto autem oſtendi poſſe probabilibus argumentis & bruta animantia, & quibus ratio ineſt; convenire, in his quæ ad ſenſus attinent, cum iis quæ terram hanc incolunt. *Nec deeſſe illis ſenſus.* Primùm namque ſi cogitemus quid ſit in animalibus videndi poteſtas, abſque qua neque paſcendi ratio eſſet, nec pericula vitandi; nec denique vita alia quam talparum aut lumbricorum; prorſus neceſſe eſſe intelligemus ut, ubi ſunt animalia his præſtantiora, ibi & viſu prædita ſint. Cum nihil ad vitam vel conſervandam, vel exornandam æque conducat. Quod ſi vero inſpiciamus mirabilem lucis naturam, ſtupendumque artificium, quo ad eam fruendam oculi comparati ſunt, facile cognoſcemus, perceptionem *Nec viſum.* rerum procul diſtantium, cum circumſcriptione formarum, diſcrimen intervallorum, non alio modo, quam qui ex viſu ſit, inſtitui poſſe. Non enim poteſt hic ſenſus, imo nec alius quiſquam eorum quos novimus, exiſtere, quam ex motu extrinſecus adveniente. Qui motus, ut alibi explicuimus, in efficiendo viſu, à Sole proficiſcitur, aut ſtellis inerrantibus, aut igne; quorum particulæ celerrima agitatione concitæ, circumfuſam cæleſtem materiam continue pulſant, impelluntque; qui impulſus a proximis ad longe diſſitas citiſſime propagetur, fere eo modo quo ſonus per aërem. Abſque hoc motu, materiaque ætheris

ris

ris qui intermedia cæli ſpatia complet, nec Solem nec ſtellas cernere poſſemus; neque etiam alia quæ propiora ſunt corpora; cum ab his ad nos idem ille motus repercuſſus pervenire debeat. Hic, oculorum ſenſu perceptus, lux appellatur. Inque eo ſenſu mirabile eſt ante omnia, quo pacto ad tantam ſubtilitatem perduci potuerit, ut minimâ cæleſtis materiæ commotiunculâ afficeretur, ſimulque qua ex parte illa oriretur perciperet. Tum quomodo nihil ſeſe mutuo impediant innumeri ejuſmodi pulſuum proceſſus, ſphæricæque ſuperficies, aliæ alias trajicientes. Hæc omnia tam mira ac ſubtili ratione conſtituta ſunt, ut nec minimam eorum partem hominum ingenia excogitare potuiſſent, cum vix etiam quomodo ſeſe habeant comprehendere queant. Quid enim tam mirabile, quam particulam corporis quandam ita fabricatam eſſe, ut ejus opera animal ſentiat procul poſitorum corporum figuram, poſitum, motum quemlibet, diſtantiam; idque etiam cum colorum varietate, quo diſtinctius ea dignoſceret. Oculi vero præter hæc artificioſiſſima conſtructio, quæ perfectam rerum extra poſitarum picturam in cava choroidis ſuperficie imprimere apta eſt, omnem profecto admirationem ſuperat, neque eſt in quo manifeſtius Geometriæ artem Deus exercuerit. Atque hæc non tantum ſolertia ſumma inventa & fabricata ſunt, ſed & videntur eſſe ejuſmodi, ſi quis propius attendat, ut non alia ratione perfici potuerint quàm hac quam cernimus. Nam neque lux aliter, quàm communicato motu per materiam cæleſtem, res longo intervallo remotas ſenſibus noſtris offerre poterat; nec oculorum artificio ullum aliud par dari ad diſtinctè referendas rerum imagines. Ut valde eos falli arbitrer, ſiqui hæc eadem multis modis ordinari potuiſſe contendere audeant. Quare omnino credibile eſt utrumque iſtud eodem modo ſe habere in Planetarum regionibus atque hic; neque aliam eſſe iis, quæ illic habitant animantibus, videndi rationem. Habebunt igitur oculos; atque etiam binos minimum, quò poſſint rerum ante pedes poſitarum diſtantias percipere, ſine quo vix tutò ingredi licet. Et hæc quidem ad vitæ uſum ne-

cessariò tribuenda sunt animantibus Planetarum universis fere. Quæ vero ratione & mente prædita sunt, cum alias quoque ex visu utilitates capere possint, tantò magis consentaneum est ut tam præclaro munere donata sint. Nos enim colorum pulchritudinem, formarum elegantiam, ac concinnitatem visu percipimus; legimus, scribimus, cælum & astra contemplamur, eorumque cursus, magnitudinesque metimur; quæ quatenus ad Planetarum incolas quoque pertineant, paulo post videbimus. Nunc illud prius quæramus an cæteros quoque sensus nostros iis contigisse verisimile sit. Ac de auditu quidem multa suadent, ut cunctis, quæ illic sunt, animalibus eum inesse credamus. Prodest enim plurimum ad vitam à periculis tutandam; cum sonitu ac fragore sæpe imminens infortunium cognoscatur; præsertim noctu atque in tenebris, cum oculorum auxilium ereptum est. Videmus præterea ut animalia pleraque vocis sono sui similia advocent, multaque inter se significent, nobis quidem parum intellecta, sed plura fortasse quam putamus. Apud ea vero quæ ratione utuntur, si cogitemus quam mirabilis sit vocis & auditus oportunitas, vix credibile videbitur tam utilem sensum, tantumque loquendi artificium, hujus Terræ nostræ, ac nostri tantum causa fuisse inventum. Quomodo enim illis non multum desit ad vitæ commoda, & felicitatem nostræ similem, qui tanto beneficio carent: aut quanam alia re pensari hoc possit? Quod si porro consideremus, quam pulchre, quamque industrie natura hoc effecerit, ut idem ille aër, cujus respiratione vivimus, cujus flatu navigamus, qui, ut volare queant, avibus præstat; ut, inquam, idem ille ad exprimendum proferendumque sonum comparatus sit; sonus verò ad formandum, auribusque ingerendum sermonem; vix credemus insignem hunc aëris usum, in terris istis longinquis eam neglexisse? Esse enim illic aërem qui terris incumbat, vix dubitari potest, cum nubes in Jove apparere dixerimus. Sicut enim hæ ex aquæ guttulis minimis constant, ita ex particulis aquæ seorsim volitantibus magna ex parte formatur aër ille qui propius ter-

Non auditum,

Nec per quem sonus perferatur aërem,

ram circundat. Quem Planetarum globis adesse etiam hoc suadet, quod respirandi ratio, qua vita sustentatur omnium quæ hic habemus animantium, videtur omnino ex universalioribus illis naturæ institutis esse, velut nutriri ex fructibus terræ.

De sensibus autem reliquis animalium ut dicere pergam, eum sanè qui ex tactu oritur, necessitate summa datum esse apparet omnibus iis quæ molli flexilique pelle teguntur, quò à lædentibus caveant refugiantque; cum absque eo vulnera, plagas, contusionesque crebras acceptura fuerint. In quo tam provida natura fuit, ut, ne minimam quidem pellis particulam, doloris sensu vacare voluerit. Itaque hanc facultatem, tam necessariam ad conservandam animalium incolumitatem, omnino credibile est etiam planetas inhabitantibus inditam esse. *Nec tactum;*

Odoratum vero ac gustum quis non videt necessaria esse pascentibus, quo conducibilia a noxiis, nihilve profuturis dignoscant. Itaque si herbis, seminibus, aut fortasse carnibus quoque in regionibus istis animalia alantur; etiam his sensibus, tam ad cavendum, appetendumque necessariis, credibile est ea non destitui. *Nec odoratum, nec gustum.*

Scio à nonnullis fuisse quæsitum, an non alii præter eos quinque quos diximus, naturâ dari potuerint. Quod quidem si concedatur, forsan dubitandum sit animalium planetariorum sensus longè alios esse ac nostratium. Nec sanè obstare quidquam videtur quo minus alii extare possint percipiendi modi: attamen cum perpendimus ad quos vitæ usus unusquisque eorum, quos habemus, comparati sint; non videtur saltem alius quisquam necessarius adjungi potuisse. Nempe effecit providentia ut & propinqua, & longius remota, qualia essent oculis sentiremus. Rursus ut non visa, sive a tergo, sive in tenebris, auditus exciperet. Item ut quæ nec oculi nec aures adesse nunciarent, alius tamen sensus qui in naribus est præsentiret, idque in canibus mirabili ut scimus subtilitate. Postremo effecit ut quæ quatuor istos sensus effugerent, quò minus in corpus impacta nocere pos- *Nec horum sensus longe alios esse ac nostratium.*

ſint, tactu perciperentur. Ita omnibus modis ſaluti conſervationique animalium conſuluit, nec quidquam amplius addi aut deſiderari poſſe videtur; ut proinde planetarum incolis vix aliud niſi ſuperfluum largitura fuerit.

Cum autem ex ſingulis ſenſibus, præter utilitatem, voluptas aliqua ad homines perveniat; velut ex guſtatu in cibis; ex odoratu in floribus & aromatis; ex viſu in contemplanda pulchritudine formarum, & colorum; ex auditu harmonicorum ſonorum; ex tactu in rebus venereis, (niſi peculiaris quidam ſenſus hic dicendus eſt) animalibus verò cæteris ex quibuſdam horum; nonne dicemus hæc naturæ munera fere eodem modo reliquorum Planetarum incolis diſtributa eſſe. Certe id quidem ratio poſtulare videtur. Sive enim cogitemus, quanto in univerſum, propter hæc, jucundior feliciorque vita reddatur, non debemus maximum ejus bonum noſtræ Telluris habitatoribus aſcribere, cæteras tenentibus denegare, quaſi res noſtræ rebus illorum multò præferendæ ſint. Sive ad voluptates, quæ in cibis capiendis, & in conjunctione utriuſque ſexus contingunt, attendamus; intelligemus hæc eſſe neceſſaria quædam veluti providæ naturæ juſſa, tacitè cogentis ad conſervandum, propagandumque animantium genus: vel etiam, in beſtiis quidem, fortaſſe genus ipſum propagari, ut utraque illa jucunditate fruatur, ut proinde, utroque nomine, in cæteris Planetis eadem reperiri conſentaneum ſit. Equidem cum hæc omnia quanti ſint, quantamque utilitatem habeant, conſidero; quamque admirabile ſit, tale quid, quale eſt voluptas, in rerum natura exiſtere; omnino adducor ut credam, non ſoli Telluri noſtræ, quæ de minoribus planetis unus eſt, rem tantam obtigiſſe. Et hæc quidem de voluptatibus iis quæ ſenſus corporeos afficiunt, rationis facultatem aut nihil, aut leviter tantùm. Sunt autem homini, præter iſtas, aliæ quoque; quæ mente tantum, & rationis ſenſu percipiuntur; aliæ cum lætitia conjunctæ; aliæ feriæ, neque ideo minoris faciendæ; velut quæ ex oblectatione ſcientiarum, inventorum, verique cognitione oriuntur; de quibus omnibus, an ad alio-

Ut nec voluptatem ex iis ortam.

rum

rum quoque planetarum incolas pertineant, in sequentibus dicendi locus erit.

Supersunt alia nunc expendenda quæ in terris illis similia esse rebus nostris verisimile sit. De Elementis terræ, aëris, & aquæ, vidimus jam quàm probabile sit ea in Planetis cæteris non deesse. Videamus & de igne, qui apud nos quidem non tam Elementum esse dicendus est, quam motus quidam concitatissimus particularum à certis corporibus abreptarum. Hoc verò, quidquid est, etiam Planetarum incolis datum esse, multa sunt quæ verisimiliter probent. Primum quòd non tam in Terra hac, quàm in Sole, ignis sedes collocata videatur; ac sicut, calore Solis, herbæ & animantia hic crescunt ac foventur, ita quoque haud dubie in cæteris fiat Planetis. Cum autem intensior calor ignem generet, credibile est illic quoque, ac præsertim in Soli propinquioribus, eosdem aut majoris caloris gradus existere, eorumque vi ignem. Deinde videmus quam multis modis excitetur, velut colligendis Solis radiis, repercussu pelvium aut speculorum; ferri & silicis collisione; lignorum attritu mutuo; herbæ non bene siccæ congestis acervis; ex fulmine; ex montium terræque sulphureæ incendiis. Quare mirum esset, non aliquo ex istis omnibus, in Planetarum terris, eum accendi. Cogitemus deinde quanta apud nos sit ignis utilitas, quantaque necessitas. Hujus enim beneficio frigoris incommoda depellimus in iis regionibus, ubi calor Solis minus viget propter radiorum obliquitatem, atque ita efficimus ne magna Terrarum pars inculta inhabitataque maneat; quod in omnibus Planetarum globis, sive æstatis hyemisque vicissitudines sentiant, sive perpetuo fruantur æquinoctio, æque necessarium est remedium; quoniam & in his, loca polis viciniora, parum juvari Solis calore certum est. Eodem igne nocti lucem inducimus, diemque velut alterum creamus, quo non parum temporis vitæ adjicitur. Itaque ob hæc omnia prorsus verisimile est tanta re non solos Telluris incolas frui, sed omnibus Planetis communiter esse concessam.

Ignem quoque Planetis communem esse.

Porro quæri poteſt de animalibus, tam ratione utentibus quàm brutis; atque etiam de ſtirpibus arboribuſque; an, quæ iſthic naſcuntur, noſtris magnitudine reſpondeant. Nam ſi hæc ipſorum globorum mole natura metiatur, eſſent in Jove ac Saturno animalia quædam decies aut quindecies altiora Elephantis, aut tantundem longitudine balænas noſtras ſuperantia. Tum illa quæ ratione prædita ſunt, gigantum corpora haberent noſtris comparata. Qua quidem in re nihil video quod vel mirum ſit, vel fieri nequeat. Nulla tamen ratione cogimur ut re ipſa id ita eſſe credamus; quandoquidem in multis rebus apparet non iis menſuræ regulis naturam ſe obſtrinxiſſe quæ noſtra opinione convenientiores videbantur. Veluti quod ipſorum globorum Planetariorum moles nequaquam pro diſtantia eorum a Sole conſtituta ſit, cum Mars manifeſto minor ſit Venere, etſi remotior: cumque converſio Jovis, ſuper axe ſuo, 10 horis peragatur; Telluris vero, tantò minoris, impendat horas 24. Poſſet vero dubitari, cum proportionem in his ita negligat Natura, an non fortaſſe pumiliones quidam ſint incolæ Planetarum, aut ranis muribuſve non majores. Sed oſtendam poſtea cur id nequaquam conſentaneum putandum ſit.

Magnitudinem corporum in Planetis exiſtentium ex Planetarum magnitudine non rectè conjici.

Aliud quoque dubium exoriri poſſet, utrum genus unum tantum animalium quæ rationem ſortita ſint, an plura in Planetis ſingulis reperiantur, & num diſpari rationis vi. Ac profectò tale quid in Terra hac noſtra contigiſſe cernimus. Non de iis nunc dico quæ figuram hominum præferunt; (etſi de his quoque id non abſurde dici poſſit): ſed ſi quorundam è beſtiarum genere, ſenſum intellectumque ſpectemus; veluti canum, ſimiarum, caſtorum, elephantorum; imo & avium quarundam, & apicularum, ea talia ſunt, ut nequaquam ſolum genus hominum rationis particeps dicendum videatur. Apparet enim quoddam hujus inſtar in iſtis omnibus, quod, abſque ulla inſtitutione aut experientia, iis ineſſe deprehenditur.

In Planetis ut in Terra varia eſſe animalia quibus ratio competat.

Attamen dubitari nequit quin longè præcellat hominum intelligentia & ingenium, quippe innumeris rebus aptum, con-

Et inter ea Hominibus ſimilia.

consilii ad futura capax, præteritorum memoria infinita præditum. Quod ingens præstantiæ discrimen si perpendamus, credemus non sine ratione, in cæteris quoque planetis, unum quoddam genus prætulisse naturam; atque eo magis, quod si plura forent eadem ingenii sagacitate, possent nocere sibi invicem, ac de possessionibus & imperio inter se contendere; quod nunc quoque faciunt nimis frequenter, licet unius generis sint, quæ in Terra hac dominantur. Verum hæc utcunque se habeant, de iis nunc agamus terrarum istarum animalibus, quæ maximè cæteris ratione antecellunt; quæramusque an sciri possit, quibus in rebus ejus usum impendant, & an habeant etiam artes scientiasque suas, velut nos in hoc nostro planeta. Quod quidem, inter ea quæ ad naturam eorum attinent, præcipuè expendi meretur. Sed, quo melius id fiat, paulò altius exordiendum est, vitaque & studia hominum attentius inspicienda.

Ac videtur quidem quatenus providendis procurandisque rebus tantum necessariis homines intenti sunt, ut nempe ab aëris injuriis tuti habitent; ut mœnibus inclusi ab inimicis sibi caveant, ut leges condant ad secure ac tranquille vivendum, ut liberos educent, victum illis, sibique parent; in his omnibus inquam nihil magnum admodum habere videtur rationis nostræ usus, cujus causa nos brutis animantibus anteferamus. Namque hæc pleraque istorum facilius simpliciusque efficiunt; aliquibus nihil opus habent. Quin imo & virtutis, justitiæque sensus, propter quem paulo ante excellere mentem humanam dicebamus; itemque amicitiæ, gratitudinis, honesti; quid aliud efficiunt, nisi ut vel vitiis hominum obsistatur, vel vita tranquilla & mutuarum injuriarum expers præstetur; quod bestiis sponte ac naturæ ductu contigit. Jam si curas multiplices, animi ægritudines, concupiscentiam, mortis metum, quæ omnia rationem illam nostram comitantur, ante oculos ponamus; eaque cum vita parabili, quieta & innocua bestiarum comparemus; videri possint harum plurimæ, ac præsertim ex avium genere, jucundius agere, & meliore quam homines sorte frui. Nam

quod ad voluptates corporis attinet, haud dubie iis æque ac nos afficiuntur, quicquid contradicant novi quidam philosophi; qui sensum omnem ita auferunt reliquis præter hominem animantibus, ut pro meris automatis aut neurospastis ea haberi velint; quorum absurdæ, crudelique sententiæ, miror quenquam accedere posse; præsertim cum & voce & verberibus fugiendis, & re omni contrarium bestiæ ipsæ significent. Imo vix dubito, quin miro pulchroque illo per aëra lapsu aves sese delectari sentiant; magis etiam sensuræ si intelligerent quantopere lentus ac humilis noster incessus ipsarum pernicitate, sublimique volatu superetur. Quid igitur est in quo potissimum eminet humanæ rationis usus, facitque ut antecellamus cæteris animantibus? Nihil æquè puto ac contemplatio naturæ, Deique operum; tum cultura scientiarum, quibus consequimur ut eorum præstantiam, magnitudinemque aliqua ex parte cognoscamus. Absque enim disciplinis quid esset contemplatio? quamque multum interest inter eos qui Solis pulchritudinem, utilitatemque, & cælum sideribus ornatum otiose intuentur, aliosque doctiores qui cursus istorum omnium scrutantur: quomodo affixæ, quæ dicuntur, stellæ à vagis differant, quæque causa sit diversarum anni tempestatum intelligunt: qui denique subtili ratiocinio magnitudinem Solis ac Planetarum, simulque distantiam eorum metiuntur; quantumque item inter eos qui animalium varios motus agilitatemque mirantur, & hos qui fabricam omnium membrorum, artificiosissimamque compagem, architecturamque in iis speculantur? Quod si igitur Planetæ reliqui dignitate non cedunt Telluri nostræ, ut in superioribus principii fundamentique loco posuimus; oportet ibi animalia existere, quæ non solum naturæ opera spectent & admirentur, sed quorum ratio in examinandis, intelligendisque iis occupetur, nec minora quam nos consecuta sit. Itaque non tantum sidera intuentur, sed & Astronomiæ scientiam excolunt; neque aliud obstat quo minus hoc verisimile credamus, quam superba illa nostrarum rerum æstimatio, quæ difficulter sane deponitur. Scio tamen futuros,

Humanam rationem præ illa brutorum præcipue eminere in contemplatione naturæ.

Hinc Planetarum incolas scientias excolere, & inter eas, Astronomiam.

ros, qui dicant nimis audacter nos ista Planetarum incolis tribuere: multorum quippe verisimilium accumulatione huc esse perventum; quorum si unum quodpiam contra se habeat, quam positum sit, cadat, velut in vitiosa ædificatione, omne quod superstruximus. Sed scire eos velim, hoc quod de Astronomiæ studio diximus, omissis fere omnibus hactenus adductis confirmari potuisse, atque inde initium fieri. Postquam enim positum fuit Terram hanc inter Planetas esse habendam, neque iis dignitate aut ornatu præferendam; quis dicere audeat in ea sola reperiri, qui spectaculo Naturæ, quod unum pulcherrimum ac magnificentissimum est, fruantur? aut inter eos quibus hoc contigit, nos unos esse quibus cæli arcana penitius perfectiusque perspecta sint? Ecce igitur & hac breviore via comprobata in Planetis Astronomiæ cognitio, ex qua & animal rationis compos, & pleraque alia quæ præcessere, illis inesse consequebatur. Adeo ut, ad priora confirmanda, hæc quoque novissima argumentatio conducat. Quò vero magis probabile fiat, saltem in superioribus Planetis, Jove ac Saturno, Astronomiæ notitiam non deesse, considerandum est, quod si homines ad sidera observanda impulit, ut credi par est, admiratio & pavor in defectibus Solis & Lunæ; multo magis, in utroque hoc Planeta, ea ratio valere debuit, propter cotidianas fere Lunarum, crebrasque Solis, quæ illic contingunt, eclipses. Ut si quis æquè ignorare ponatur quid rerum in Planetis omnibus geratur, multo verisimilius dicturus sit Astronomiam in majoribus illis duobus, quàm in hoc nostro, vigere.

Posita autem apud Planeticolas hujus scientiæ cognitione & usu, quam multa hinc præterea consequuntur quæ de vita statuque eorum reliquo, præter jam dicta, novas conjecturas afferant?

Et quæ ei inserviunt artes mechanicas.

Primùm enim nulla observatio siderum, ad motus eorum investigandos, absque organis institui potest; sive ea è metallo, sive è ligno aliave solida materia fabricata sint. Quod ut fiat, nec fabrorum instrumento, serra, ascia, dolabra, mal-

malleo, lima, carere possunt; neque hæc habere absque usu ferri aut æque duri cujuspiam metalli. Sed & circuli arcus in partes æquales divisi, aut lineæ rectæ in inæquales, in istis organis requiruntur. Atque hic jam Geometriæ & numerorum ratio arcessenda est. Sed ante omnia quoque necesse est ut observationum memoria ad posteros transmittatur; ut tempora & Epochæ annotentur; quæ sine scripto non videntur explicari posse. Oportet igitur ut & suam scribendi artem habeant, multum fortasse dissimilem nostræ, qua fere omnes populi utuntur, sed quæ vix ingeniosior, aut ad discendum facilior esse queat. Quis enim non videt longe eam præferendam esse Sinarum innumeris characteribus, multoque magis funiculorum nodis, aut pictis imaginibus, quæ apud barbaros Mexicanos Peruvianosque in usu erant. Omnium quidem Regionum homines aliquam scribendi, aut quoquo modo annotandi, artem quæsivisse videmus: quò minus mirum sit, si & Planetarum incolæ, necessitate coacti, eam repererint, ac deinde ad Astronomiæ aliarumque disciplinarum studia adhibuerint. Necessitas vero scripturæ in rebus Astronomicis etiam ea re cognoscitur, quod cum hypothesibus variis, siderum motus, quasi divinandi sint; eæque hypotheses priores in sequentibus corrigendæ, prout observatis & Geometriæ ratiociniis vitia earum coarguuntur; nihil horum posteris tradi potest, nisi literis consignatum, figurisque expositum.

Ut & Geometriam, Arithmeticam,

Et scribendi artem.

Postquam vero omnia hæc jam iis concesserimus, longe etiamnum præstantior perfectiorque apud nos erit siderum scientia; vel propter agnitam systematis universi verissimam formam, vel propter usum telescopiorum, quibus Planetarum corpora, magnitudinesque & varias formas intuemur; superficiei lunaris montes, montiumque umbras; stellarum ingentem multitudinem, aliaque plura non alias videnda, percipimus. Ut fere necesse sit, nisi rursus nobis tanquam hac parte felicioribus blandiri volumus, etiam illam cognitionis rerum cælestium consummationem Planeticolis tribuere; itemque videndi aciem, quæ vel nostram longe exuperet,

Opticam.

ret, vel lentium vitrearum, aut speculorum adminiculo sicut nostra, adjuvetur. Quod tamen dicere vereor, ne quis, ex hoc uno audacius asserto, cætera omnia æstimanda putet, ac risu digna clamitet.

At non sine ratione, ut videtur, objiciet quispiam, Planetarios nostros fortasse omni subtiliore scientia destitui, quemadmodum Americanæ gentes, priusquam ad illas Europei penetrassent. Quas si respicimus, itemque in Africa, Asiaque permultas æque barbaras, videbitur hoc tantum summo opifici propositum fuisse, ut vita fruantur homines, naturæque bonis & voluptatibus contenti sint, grato animo omnium datorem colentes; scientiarum vero inquisitionem præter naturam paucos aliquos affectasse. Talia vero dicentibus non deest quod responderi possit. Prævidit enim certe Deus hominum ingenia eo esse processura, ut res cœlestes scrutarentur; ut artes vitæ utiles reperirent; maria quoque navigarent, metalla effoderent. Possetne enim horum quidquam præter mentem infinitæ illius intelligentiæ contingere? Quod si prævidit, etiam hominum generi ea destinata sunt, nec poterunt artium & doctrinarum studia, quasi præter naturam essent, existimari, quæ in ipsa natura indaganda occupantur. Præsertim cum tanta illa cupiditas amorque sciendi non possint censeri frustra hominum animis infixa esse. Instabunt vero rursus dicentque, de siderali scientia potissimum, si ad hanc quoque homines nati sunt, cur tam pauci ad eam attendunt? Primum enim ex quatuor Orbis partibus, sola fere est Europa, in qua Astronomiæ studia excolantur. Nam Astrologiam divinatricem futurorum, quæ non scientia, sed miserum quoddam ac sæpe noxium delirium est, ne nominandam quidem hic arbitror. At in Europæ Nationibus non unus è centum millibus hæc studia amplectitur aut addiscere curat. Tum ad tempus quod attinet, multa sæcula effluxisse dicent, antequam aut Astronomiæ, aut Geometriæ, sine qua illa disci non potest, ulla rudimenta innotescerent. Sciri enim quo tempore in Ægypto & Græcia primum exortæ fuerint. Ac recte quoque adjicient non adhuc octoginta annos præteriisse,

Has scientias homini præter naturam non esse.

ſe, ex quo verus ac ſimplex Planetarum motus, rejectis Epicyclorum figmentis, repertus ſit; atque ita demum Aſtronomia cum naturæ cognitione conjuncta. Hiſce ut occurratur, addam ad ſuperius reſponſum, quod à divina providentia petebatur, dubitari non poſſe, quin ea conditione homines nati ſint, ut multo temporis decurſu paulatim artes diſciplinaſque eruant; nullam enim harum iis ingenitam eſſe, aut ſubito à Deo infuſam, & has de quibus nunc agimus, omnium eſſe difficillimas remotiſſimaſque: ut magis mirum ſit unquam incipere eas potuiſſe, quam tam tarde fuiſſe inſpectas. Pauci fateor ſingulis ætatibus has curant, aut ad ſe pertinere exiſtimant: ſed ſi multorum ſæculorum tempora cogitentur, non exiguus fiet illorum Numerus; quos, quemadmodum ſibi videntur, reliquis beatiores eſſe quis negaverit? Denique paucorum induſtria in his rebus exerceri ſatis erat, cum inventorum utilitas ad nationes totas genteſque longe porrigatur. Cum igitur hujus Terræ incolis, etſi paucis tantum, ad ea percipienda ingenium & aptitudo contigerit; nihiloque putandi ſint cæterorum planetarum habitatoribus præſtantiores feliciereſve; manet profecto, quam inveneramus, veriſimilitudo, ut etiam apud illos reperiantur qui cognitione Aſtronomiæ non careant. Nunc ad alia pergamus quæ inde conſequi, neceſſe eſt.

Oſtendimus quomodo unà cum hac ſcientia, non ſolum Geometria & Arithmetice, ſed & Mechanicæ artes, inſtrumentaque incolis Planetarum concedenda ſint. Hic verò jam ſponte obvenit ut quæramus, quo pacto inſtrumentis illis, Machiniſque, & ad ſidera obſervanda organis uti poſſint, aut quomodo literas ducere; quæ omnia nos manuum opera exequimur. Itaque neceſſario & manus habebunt, vel aliud quodpiam, quod vicem earum fungi poſſit, membrum. In quibus hominum generi tantum eſſe præſidii exiſtimabat è veteribus Philoſophis quidam, ut in iis cauſam reponeret omnis eorum ſapientiæ. Qui, ut puto, hoc ſenſit, abſque manuum opera homines ad cultum animi, rerumque cognitionem non fuiſſe perventuros. Et vere quidem

Planeticolas manus habere,

dem.

dem ille. Finge enim pro manibus datas fuisse ungulas, ut equis & bobus; nunquam nec oppida nec domos, licet ratione instructi, ædificassent. Nihil de quo loquerentur habuissent, nisi de iis quæ ad pabulum, aut ad conjugium, aut sui tutelam attinent. Omni scientia, omnique rerum memoria caruissent: Denique à bestiis parum abfuissent. Quodnam porro instrumentum æque accommodatum ac manus esse possit ad innumera illa ad quæ nobis usui sunt, obeunda? Elephanti proboscide mirabiliter utuntur, qua & amplecti quidvis & projicere, minutioraque quævis è solo tollere norunt: unde & manus eorum pars illa dicta est, cum reipsa sit in longum productus nasus. Rostro quoque aves pleræque nidos exstruunt, alimentaque congerunt. Sed harum nihil est quod non manuum oportunitati longè concedat. Et est sane, tam illarum quam brachiorum, mirabilis quædam machinatio; ut protendi, reduci, inque omnem partem moveri possint. Tum mirâ industriâ instituti digitorum ac pollicis articuli, ut nervorum attractu quælibet prehendant, firmiterque contineant. Ut omittam sensum illum, in extremis digitis, exquisitissimæ subtilitatis; quo vel in tenebris pleraque corpora internoscimus. Patet itaque aut manus brachiaque, aut aliud quid eorum loco, quod vix æque aptum excogitari potest, Planetarum populis datum esse, ne non solum nobis, sed & simiarum & sciurorum generi, plus indulsisse hac in re natura existimetur.

Et pedes.

De pedibus vero minus etiam dubitabitur, si repetamus ea quæ supra disseruimus de vario animalium incessu, qui non videtur aliis modis, quam quos ibi recensuimus, cogitari posse. Inter eos vero non est, qui tam bene Planeticolis ratione præditis conveniat, quam quo & nos utamur. Nisi forte & volandi facultatem in aliquibus Globorum istorum acceperunt. Quod minus probabile tamen propter vitam in societate degendam, de qua postea dicemus.

Erectos oculos, vultumque.

Non caret autem verisimilitudine, erectos oculos, vultumque ad sidera contemplanda iis contigisse, quandoquidem hoc in hominum corpore providentiâ divinâ sic institu-

tum videtur, & a Philoſophis merito celebrari ſolet. De reliquorum vero membrorum poſitu, ſi ſapientiam artificis laude dignam cenſemus, quod oculos in ſuprema corporis parte collocaverit; ſordidiora vero membra procul inde, atque a conſpectu quodammodo removerit; nonne putandum eſt eadem fere obſervaſſe illum in formandis iſtorum procul habitantium corporibus? Nec enim propterea dicimus figuram noſtræ ſimilem iis tribuiſſe. Eſt enim infinita quædam animo concipienda formarum poſſibilium varietas, qua & ſingulæ quæque partes iſtorum corporum à noſtris differre queant, & totorum exterior interiorque œconomia. Cernimus quam aptè & commodè animalium noſtrorum quædam lana aut pilis veſtiantur; alia elegantius etiam plumis penniſque. Quidni iſti in Planetis, quos rationis participes diximus, aliqua ſimili ratione tecti ſint? propter quod meliori quidem conditione beſtiæ, quam homines, apud nos eſſe videntur. Niſi hoc eo fine ſic conſtitutum fuit, ut ipſa nuditas neceſſitatem hominibus imponeret quærendi ac fabricandi varia operimentorum genera, atque hinc etiam ingenii exercendi materia exiſteret. Et apparet ſane, ex hac neceſſitate, non minimam commerciorum, artificiorumque mechanicorum occaſionem naſci. Sed & propterea forſan nudos homines natura produxit, ut pro arbitrio ſuo tenuius denſiuſve amicti incedere poſſint; atque ita ad quaſvis terrarum oras inhabitandas ſeſe componere. Alia vero major hac, quam diximus, differentia intelligi poſſet inter corpora Planetariorum ac noſtra; cum animalia quædam ita à natura formata reperiantur, ut veluti oſſa extrinſecus habeant, carnes introrſum, atque oſſibus incluſas, qualia ſunt cancri, aſtacique, & fere etiam teſtudines. Attamen hanc membrorum compagem, & in paucis vilioribus tantum illa ſecuta eſt, & Planetarum incolis, quo minus eam tribuam, facit, quod ſubtili varioque digitorum uſu cărituri eſſent, quo tam valde eos opus habere oſtenſum fuit: nam abſurda ſpecie non multum alioqui moverer.

Nec tamen hinc ſequi eorum formam noſtræ plane ſimilem.

Quo minus avium ra-

Etenim omnino cavendum eſt ab errore vulgi, cum animum

mum rationis capacem non alio in corpore, quam nostris similì habitare posse sibi persuadet. Ex quo factum est, ut populi penè omnes, atque etiam Philosophi quidam, humanam formam diis adscripserint; Imo ut, à simili persuasione, cuidam Christianorum sectæ nomen inditum fuerit. Hoc vero non nisi ab hominum imbecillitate & præjudicata opinione proficisci quis non videt? uti illud quoque, quod eximia quædam pulchritudo humani corporis esse putatur: cum tamen ab opinione & assuetudine id totum quoque pendeat, affectuque eo, quem cunctis animalibus natura provida ingeneravit; ut sui similibus maxime caperentur. Illa verò tantum possunt, ut non sine horrore aliquo animal homini multum dissimile conspectum iri credam, in quo rationis & sermonis usus reperiretur. Nam si tale solummodo fingamus aut pingamus, quod, cætera homini simile, collum quadruplo longius habeat, vel oculos rotundos duploque amplius distantes; continuo eæ figuræ nascuntur, quas non possimus intuentes non aversari, quamvis ratio deformitatis nulla reddi queat.

tionis capax etiam alii formæ inhabitet, nihil impedire.

Dixi in superioribus cum de magnitudine agerem incolarum qui in Planetis sunt, verisimile videri non esse eos valde exiguos nobiscum comparatos. Suadet enim hoc primò, quod probabile sit, sicut corpora hominum se habent ad Telluris magnitudinem, ut peragrare universam possint, atque ita formam molemque ejus cognoscere; eodem modo & in cæteris Planetis incolisque eorum rationalibus ordinatum esse; nisi hac in re, quæ sane magna est, nos ipsis rursus præferre velimus. Deinde cum siderum scientiam & observationes apud eos exerceri ostenderimus, sequitur ut & corpora nacti sint lignis metallisve tractandis, inque instrumenta machinasque adaptandis, idonea. Quæ & eo præstabiliora sunt quo ampliora. Ac sane si homunciones quosdam, muribus non majores, cogitemus, non possent ii siderum animadversiones, quales requiruntur, instituere; nec instrumenta ad eas parare, aut disponere. Itaque omnino vel æquales nobis ponendos esse

Planeticolas nobis vel æquales vel majores esse.

existimo, vel majores, ac præsertim in Jove, Saturnoque, quorum Globi tanto Tellurem nostram superant.

Eos in societate vivere. Porrò quia, ut diximus, astronomiæ studium sine annotatione observatorum non potest procedere, ars vero scribendi non nisi in societate ratione utentium, & cogentibus vitæ necessitatibus, inveniri potuit; neque magis ars fabrorum aut fusoria; sequitur ex eo (quod supra dicebam) & societates coli apud Planetarum indigenas, ac mutuas operas eos inter se præstare; adeoque hac parte similitudinem magnam ibi esse nostratium rerum. Quamobrem & certas stabilesque sedes potius quam ambulatoriam vitam iis convenire dicendum est. Quid igitur? an & cætera sociali vitæ propria habebunt? leges, Magistratus, tecta, urbes, mercaturas aut rerum permutationes? Certe equidem apud barbaros Americæ & insularum populos, cum primum ad eos perventum est, eadem hæc fere jam in usu erant. At non propterea negaverim aliter ista in Planetis cæteris se habere posse quam apud nos; cum ex iis quædam sint quæ abesse queant à societate animalium ratione præditorum; eoque tantum excogitata, ne ratione male utamur & cum aliorum injuria, itaque societas solvatur. Possunt enim in aliis istis globis in ea rerum abundantia versari, ut nihil alieni appetant, rapiantve. Possunt ea esse æquitate, ut pacem perpetuo colant, nec sibi invicem insidientur, aut mortem inferant; imò ut neque oderint nec irascantur; quod si esset, multo quàm nos feliciores putandi sint. Sed verisimilius est, ut quemadmodum apud nos, sic ibi quoque bonis mala, sapientiæ stultitia, paci bellum misceatur, nec desit egestas artium magistra. Quia & ex his utilitatem aliquam proficisci antea ostendimus; &, si nulla esset, tamen nec præferendi res illorum rebus nostris causam habemus.

Colloquiorum jucunditate frui. Quod autem nunc dicam, audacius, scio, videbitur; nec tamen probabilitate caret. Nempe, si in societate (quod jam penè obtinuimus) vivant gentes Planetarum; etiam, præter commoda inde provenientia, voluptate aliqua tali eas affici, quali nos, ex congressibus colloquiisque amicorum, amo-

amoribus, jocis, ſpectaculis. Hoc, inquam, probabile eſt, quia ſi nihil horum Planeticolis concedamus, ſed ſemper eos ſeriò, ac ſine omni hilaritate, aut animi remiſſione agere putemus; ingens vitæ condimentum, quoque vix illa carere poſſit, iis adempturi ſimus, atque ita noſtram hanc beatiorem facturi; contra quam ratio poſtulat.

De reliquis vero occupationibus & ſtudiis illorum ut porrò inquiramus; videndum eſt quænam iſtorum, præter ea quæ jam diximus, cum noſtris aliquam ſimilitudinem habere probabile ſit. Domos ſibi eos conſtruere, ideo vel maxime credere libet, quod & pluvias in terris illis cadere oſtendimus. Sequebatur enim hoc ex eo, quod in Jovis Planeta nubium quidam mutabiles tractus cernuntur; vapores, aquamque haud dubie continentes: quam aliunde quoque illic non deeſſe argumentis adſtruebamus. Erunt ergo & imbres & venti, quia attractum à Sole humorem recidere in terram neceſſe eſt; & calore ſoluti vapores ventorum cauſa ſunt; quorum flatus ex illa nubium Jovialium mutabili facie cognoſcitur. Adverſus hoc ergo, ut noctes tuto & quiete tranſigant (habent enim & noctes & ſomnum proinde, uti nos) munire ſe eos, caſaſque ac tuguria ædificare, aut ſpecus effodere, veriſimile eſt. Atque eo magis quod omne genus animalium, apud nos, exceptis piſcibus, ad ſui tutelam hæc molitur. Cur vero caſas & tuguria, & non domos amplas & magnificas Planetarum habitatoribus exſtrui credamus, niſi quod non poſſumus res noſtras non præ omnibus pulchras perfectaſque putare. Qui autem nos? Nempe in globulo illo vitam agentes, qui non decies milleſimam partem globorum Saturni aut Jovis æquet, ſi corporum moles inter ſe conferantur. Nulla equidem ratio adferri poteſt cur non Architecturæ elegantiam, ſymmetriamque, æque cognitam habeant in iſtis cæteriſque Planetis, ac nos in noſtro: nec cur non palatia, turres, pyramideſque alicubi noſtris multo altiores ſumptuoſioreſque, nec minori concinnitate exædificent. Cumque multiplex ſit hominum in his rebus induſtria; ut in cædendis lapidibus, coquenda calce & lateri-

Domos adverſus pluviam exſtruere.

ri-

ribus; cum ferro, plumbo, vitro utantur, atque ad ornatum auro quoque; his omnibus nihilo inferiora illic haberi verisimile est.

Si vero divisa est illis, sicuti nobis, Globi sui superficies, ut pars terram, pars maria contineat; uti ex supra memoratis Jovis observationibus colligi potest, quia nubes vix aliter quam ex maris amplis tractibus enascerentur; permagna ratio est ut & navigare eos putemus. Cum alioqui etiam rem tantam, tamque utilem, nostræ Telluris Globo soli non absque arrogantia ascripturi simus. Præsertim verò in Jovis Saturnique maribus commoda esset navigatio propter Lunarum plurium utrobique copiam; quarum ductu longitudinum mensuram, quam vocant, quæ nobis non contigit, facile consequi possint. Quod si navium usum habent, quam multa præterea habebunt quæ ad eas pertinent; Vela, anchoras, funes, trochleas, gubernacula; & horum usum peculiarem quemadmodum nos; ut vento penè contrario navigetur, in contrarias vero partes eodem vento facillime. Nec fortasse nauticæ pyxidis invento carebunt; siquidem motus materiæ magneticæ, quæ terræ globum continue pervadit, est ejusmodi quid, ut cæteris quoque planetis convenire censeri possit. Mechanicæ quidem scientia, & Astronomiæ, in re navali necessario requiritur, atque adeo utriusque harum magistra Geometria, de qua jam ante aliquid attigimus.

Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere.

Existimo autem, etiamsi nec ad istas artes nec ad alias quasdam respiciamus, in quibus vel necessitas vel occasio Geometriæ inveniendæ initium fecerit, non deesse rationes, quibus verisimile fiat ejus notitiam Planetarum incolis obtigisse. Sive enim cognitionis ipsius pretium ac dignitas spectetur, in qua singularis quidam intelligentiæ est usus, ac certa indubitataque veri comprehensio, quanta in nullis rebus disciplinisve aliis reperitur: sive quod est ejusmodi natura sua, ac talia ejus axiomata & effata, ut quocunque loco & tempore, aut quibuscunque in mundis extet, prorsus eadem ubique esse debeat; videtur omnino non solis Telluris nostræ incolis res talis parata aut oblata esse. Quid quod figuras Geo-

Ut & Geometriam.

Geometricas, velut circulos, triangula, polygona, sphæras, multis modis natura ipsa oculis objicit, ad variasque eorum proprietates indagandas quasi invitat; in quarum contemplatione, etiam extra utilitatem omnem, summa est oblectatio. Quis enim non admiratur, cum discit ea quæ de circulo in Elementis Euclideis, & Apollonii locis Planis docentur? aut quæ de sphæræ superficie & quadratura Parabolæ Archimedes prodidit, aut recentiorum subtilissima inventa? Quorum omnium eadem, & ad discendum æque exposita, est veritas in Saturno, ac Jove, atque apud nos, & ex iisdem simplicissimis principiis pendens, quo facilius credi potest pulcherrimi jucundissimique studii in illis ac cæteris planetis aliquos participes esse: Etsi præcipue hoc suadet utilitas quæ ex eo in omnem vitam emanat. Quod si jam eo usque rei Geometricæ peritos qui in Planetis sunt dicerem, ut & Tabulas Sinuum, & Logarithmos, & calculum Analyticum invenerint; absona ac pene ridicula proferre viderer. Nec tamen quidquam obstat quin horum aliquid reperisse potuerint, aut aliquando reperturi sint; atque etiam his nostris fortasse majora. Non debemus enim, ut jam sæpe diximus, præferre nos ipsos ac res nostras rebus Planeticolarum.

Cæterum illud quod uniusmodi & æternum in Geometrica scientia inesse animadvertimus, similiter quoque in Harmonicis inveniri certum est; cum consonantiæ omnes constanti mensura ac proportione constituantur; omnis vero phtongorum ordo, omnisque cantus delectatio, etiam vocis singulæ, in consonantiis fundata sit. Quo fit ut *Musicam;* apud omnes gentes eadem tonorum intervalla canantur, sive per gradus continuos, sive saltu vox progrediatur. Imo animal quoddam in terris Americæ reperiri fide digni auctores narrant, quod sex musicos tonos deinceps voce exprimat: Ut appareat ipsam naturam immutabili ratione eos præscribere. Quandoquidem igitur quæ huc spectant, certa quoque & unica, & necessaria ratione sese habent, verisimile est, non minus quam Geometriæ,

etiam Musicæ oblectationem ad plures quam ad nos pertinere. Positis enim aliis terris atque animalibus ratione & auditu pollentibus, cur tantum his nostris contigisset ea voluptas, quæ sola ex sono percipi potest? Nescio equidem quantum apud alios valiturum sit argumentum, quod hic ab unitate, & immutabili natura istarum artium petiimus; mihi non leve aut contemnendum videtur, nec multum ei cedere, quo in superioribus usus sum, cum videndi facultatem Planetariis animalibus convenire docui.

Porro si tonis harmonicis & cantu delectentur, vix quoque fieri potest quin & instrumenta quædam musica repererint; quoniam & casu in hujusmodi inventa incidere contingit: velut chordis valide contentis, aëris sono, cannarum aut cicutarum sibilo. A quibus initiis, sicuti ad testudines, citharas, tibias, & organa polyplectra nos pervenimus, ita illi quoque non minus elegantia excogitare potuerint. Sed quemadmodum certi definitique licet sint toni, cantusque intervalla, tamen apud diversos populos alium atque alium esse canendi morem ac normam videmus; ut olim apud Dores, Phrygas, Lydos; nostra ætate apud Gallos, Italos, Persas: ita fieri potest ut ab omnibus his longius abeat Planetariorum Harmonice, quamvis illorum auribus gratissima. Cur vero nostra rudiorem opinemur nulla ratio est; neque etiam cur non & chromaticis sonis, & quibusdam Enarmoniis utantur? cum hemitonia quoque natura suppeditet, certisque proportionibus definiat. Imo ne minus assecuti sint hisce in rebus quam nos, etiam plurium vocum aut chordarum concentus, artificiosaque permistio, & dissonantium tonorum, & tritoni, & diapente diminutæ usus iis fortasse concedendus sit. Scio vix aliquam verisimilitudinem apud multos hæc habitura, ac minorem etiam, si æque doctos dicamus in Jove aut Venere incolentes, ac sunt ii qui in Gallia, Italiave plurimum hac arte excellunt. Et tamen fieri potest ut vel illis peritiores sint, ac præcipue in parte Theoretica hujus artis ea perspexerint, quæ apud nostrates hosce parum hactenus intelle-

Quæ tamen à nostra diversa esse posset.

cta

cta sunt. Si enim ex nostris Musicis quæras, cur consonantia diapente post aliam similem vitiose ponatur, dicent alii nimiam dulcedinem devitari, quæ ex gratissimæ consonantiæ iteratione nascatur: alii varietatem in harmonicis sequendam esse. Hæc enim præcipui artis auctores, cumque iis Cartesius, adferunt. At Jovis aut Veneris incola forsan veriorem hanc causam demonstrabit, quod à Diapentè ad aliam deinceps pergendo, tale quid fiat, ac si repente toni statum immutemus; cum Diapente, unà cum interjecto ditoni sono, (qui si desit, mente suppletur) toni speciem certo constituat: hujusmodi vero subita commutatio auribus merito injucunda inconditaque judicetur; cum etiam in universum ea plerumque durior accidat, (præterquam in transitu) quæ fit à tribus sonis consonis, ad trium aliorum harmoniam, nullo priorum manente. Sciet etiam ille idem fortasse, quod nemo adhuc animadvertit nostrorum hominum, cur in nullo vocis unius, pluriumve cantu, tonus servari possit in eadem altitudine ac tenore, nisi consonantia intervalla pleraque ultro, ac nemine advertente, ita temperentur, ut à perfectione summa nonnihil descivcant. Et cur optimum sit hoc temperamentum in chordarum systemate, cum ex Diapente quarta pars commatis ubique deciditur. Quod idem absque sensibili discrimine effici ex divisione Diapason in partes æquales 31, indeque Cyclum quendam Harmonicum in se redeuntem existere, non ita pridem ostendimus. Quod tamen Planetarum incolæ si perspexerunt, etiam Logarithmorum numeri iis noti esse debebunt.

Cur consonantia diapente post aliam similem vitiose ponatur?

At de Tono vocis temperando quod dixi, probationem habet non difficilem; quam hic adjungimus, quandoquidem jam aliquid præter somnia nostra venditare cœpimus. Ajo itaque, si quis canat deinceps sonos, quos Musici notant Literis C, F, D, G, C, per intervalla consona, omnino perfecta, alternis voce ascendens descendensque; jam posteriorem hunc sonum C, toto Commate, quod vocant, inferiorem fore C priore, unde cani cœ-

Demonstratio temperamenti in tono vocis adhibendi.

pit. Quia nempe ex rationibus intervallorum istorum perfectis, quæ sunt 4 ad 3, 5 ad 6, 4 ad 3, 2 ad 3, componitur ratio 160 ad 162, hoc est 80 ad 81, quæ est Commatis. Ut proinde, si novies idem hic cantus repetatur, jam propemodum tono majore, cujus ratio 8 ad 9, descendisse vocem, tonoque excidisse oporteat. Hoc verò nequaquam patitur aurium sensus, sed toni ab initio sumpti meminit, eodemque revertitur. Itaque cogimur, occulto quodam temperamento uti, intervallaque ista canere imperfecta; ex quo multo minor oritur offensio. Atque hujusmodi moderatione fere ubique cantus indiget; uti colligendis rationibus, quemadmodum hic fecimus, facile cognoscitur. Et hæc quidem in gratiam artis illius studiosorum, nec Geometriæ rudium exponere placuit. Nunc eo unde discessimus revertimur.

Diximus de artibus inventisque quibusdam quæ nobiscum communia habere Planeticolas verisimile sit; præter quæ etiam alia exstare illic necesse est, sive ad usus & commoda vitæ facientia sive ad delectationem. Hæc vero quam multa sint; quantique facienda, ita optime rationem inibimus, si plurima illa, quæ apud nos reperiuntur, recensere & ob oculos ponere libuerit.

Exposui supra animantium fruticumque apud nos genera quæ plurimum inter se figuris differrent: præter quæ, minus dissimilium ingens copia reperiatur: dixique nihilo pauciora utriusque generis, ut longe diversa, in Planetarum terris exstare putandum. Nunc etiam illud videamus, quæ utilitas quæve commoda, tum ex animalibus, tum ex herbis arboribusque ad nos perveniant, ac prorsus verisimile existimemus non minora ex iis, quæ illic terrarum inveniuntur, ad incolas ipsarum redundare.

Recensentur commoda quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus.

Hic vero operæpretium est ut quæ sint divitiæ nostræ inspiciamus, quæ multæ magnæque sunt. Nam, præterquam quod alimenta nobis arborum fructus herbæque suppeditent; illæ pomis, nucibus; hæ seminibus, foliis, radicibus; quodque plurimorum ex his in medicina usus est;

pe-

petitur ex arboribus materia qua domos navesque fabricamus. Et lino vestes paramus, excogitatis nendi & texendi artificiis. Ex cannabe, spartove, fila ac funiculos torquemus; ex filis vela ac retia conficimus, ex funiculis rudentes & funes anchorarios. Florum porro odoribus coloribusque oblectamur; & quamvis sint etiam qui nares offendant, & noxiæ quædam herbæ inveniantur, tamen in iis sæpe boni quid delitescit; vel fortasse hoc egit natura ut comparatione mali bona magis eminerent: quod multis in rebus secuta videtur. Quanta vero ex animalibus est utilitas? Oves lanam ad vestitum præbent, vaccæ lac; utræque carnes ad vescendum. Asinis, camelis, equis, ad portandas sarcinas utimur. His etiam ut nos vel inscensi vehant, vel curribus juncti pertrahant. Ubi egregium illud rotarum inventum occurrit, quod libenter Planetarum quoque habitatoribus adscriberem, cum jam in societate eos vivere & domos ædificare pene evicerim. Utrum vero etiam animalibus pro cibo utantur, an Pythagoræ simile dogma sequantur, non habeo quod affirmem. Apparet quidem hoc homini datum esse, ut omnibus iis alatur quæ vel in terra vel in aquis nascuntur, si quid nutrimenti contineant; ut herbis, pomis, lacte, ovis, melle, piscibus, volucrum quadrupedumque plurimorum carnibus. In quo mirum sane videri potest, animal illud rationis compos ita esse comparatum, ut cum multorum aliorum pernicie cædeque vivat. Nec tamen naturæ præscripto contrarium hoc esse putandum est, cum placuisse ei videamus ut leones, lupi, aliaque rapacia, pecudes & infirmiora quælibet pabuli loco habeant: aquilæ columbas leporesque prædentur: Piscium permulti pisciculos se minores devorent. Quin & canum varia genera ad venandum nobis largita est, ut quæ pedibus nostris persequi nequiremus, illorum celeritate ac sagacitate consequeremur. Præter omnem vero istam ex viventibus herbisque utilitatem, hanc quoque delectationem ex iis nos capere voluit rerum conditor, ut varias eorum formas na-

turasque & generandi vias contemplaremur; in quibus infinita quædam varietas ac mirabilia multa insunt, quæ apud naturæ scriptores celebrantur. Imo in ipsis insectis quis non miratur apium cellulas hexagonas, aranearum telas; tum bombycum involucra, ex quibus incredibili industria delicatissimam vestem conficimus, eaque copiâ ut naves totæ ea onerentur. Atque hæc quidem de herbarum animantiumque genere, quatenus homini prosunt, summatim retulisse sufficiat.

Ex Metallis, Cogitetur jam porro quanta sit ejus solertia in reperiendis, effodiendis, explorandis metallis; itemque in fundendis, repurgandis, miscendis. Quanta in tenuandis auri laminis, aut hydrargyro resolvendis, ut parvo impendio, quæcunque voluerimus, auri splendorem coloremque induant. Quam mira ac multiplex sit ferri utilitas; quam quæ ignorarunt nationes, eæ omnium ferè mechanicarum artium rudes vixerunt, proque armis, tantum arcus, clavas, sudesque habuerunt. Nos vero & pulverem ex sulphure & nitro mistum habemus, variosque ejus usus, qui an plus juvet an noceat merito dubitari potest. Videbatur enim mira ejus vi, simulque artificiosa muniendorum oppidorum arte, certius præsidium inventum esse, quam priscis temporibus fuerit, adversus hostiles impetus: sed & horum ex eo simul violentiam crevisse videmus, & fortitudini viribusque in præliis multo minus nunc locum esse quam tunc fuerit. Quod enim olim Imperator Græcus dixisse fertur, *Periisse Virtutem* cum Catapultarum, ac Balistarum inventa exorirentur, idem nunc majori jure queri possumus; ac maxime Bombis, quos vocant, repertis; quos non mœnibus, nec situ oppida arcésve repellere possunt, sed quamvis validæ disjiciuntur, ac solo æquántur. Ut, vel ob hoc unum, melius homines ejus pulveris invento cárituros fuisse dicendum sit. Nec tamen propterea prætereundum fuit in commemorandis nostræ Telluris repertis, cum verisimile sit, etiam in cæteris Planetis, noxia artificia quædam cum bonis emersisse.

Au-

Auſpicatior eſt aquæ & aëris apud nos uſus: quo & navigandi ratio conſtat, & vires comparantur, quibus, nullo labore noſtro, molas machinaſque verſemus. At hæ quam multiplices, quamque ad varias res adhibentur? Nam & frumenta iis comminuimus, & olea exprimimus, & ligna ſecamus, & pannos tundendo denſamus; & chartis materiam conterimus; quarum aliàs quoque pulcherrimum eſt inventum, cum ex viliſſimis linteorum ſcrutis, tam pulchra foliorum candidiſſimorum copia paretur. His addatur jam præclarum illud typographiæ inventum, cujus opera artes omnes reliquæ, non ſervantur tantum, ſed & comparantur multo quam ante facilius. Item ſculpendi pingendique peritia, a parvis rudibuſque initiis eo progreſſa, ut nihil elegantius ab hominum ingenio profectum eſſe videatur. Ponatur & vitri excoquendi ſcientia, atque in tot formas ducendi facilitas. Tum ſpeculorum vitreorum politura, hydrargyrique ſuper ea inductio. Ac præcipue quoque vitri uſus mirabilis, in pervidenda rerum natura, poſt teleſcopii microſcopiique inventa. Recenſeantur etiam horologiorum automatôn fabricæ; aliorum tam exilium, ut geſtanti nihil incommodent; aliorum tam exquiſita æqualitate tempus metientium, ut nihil ſupra optari poſſit, quibus utriſque inventa noſtra plurimum profuere. *Ex aqua, & aëre, variiſque artificiis,*

Multa addere poſſem de multiplici doctrina & rerum naturæ cognitione quam præter Geometriæ Aſtronomiæque ſcientias conſecuti ſumus, atque ea pleraque noſtra ætate: velut de gravitate aëris ac vi qua compreſſus reſilit. De ſingularibus Chymicorum experimentis; è quibus liquores inflammabiles, nuperque ultro lucentes, ac levi tractatione ardentes, prodierunt. De ſanguinis circuitu per arterias venaſque, qui antea intelligebatur, nuper vero & oculis uſurpari cœpit, adhibito microſcopio, in piſcium quorundam caudis extremis. Item de generatione animalium, quod inventum eſt nulla niſi ex ſimilium ſemine naſci; idque de herbis quoque verum eſſe. Quodque in ſemine marium reperiuntur animalculorum myriades vivaciſſimorum, quæ ipſam ani- *Ex iis, quæ noſtra ætate inventa ſunt.*

animantium sobolem esse verisimillimum sit: res mirabilis, atque ab omni ævo incognita.

Illa omnia verisimiliter non extare in Planetis, sed aliis æque dignis rependi.

Jam vero postquam hæc omnia accumulavimus Telluris incolarum inventa, putemus fieri quidem posse, ut quædam eorum etiam apud Planetarios extent; credibile tamen esse maximam partem eorum illis ignorari. At iis quæ non habent rependendis æque multa, pulchraque & utilia, admiratione digna iis tributa esse oportet. Quanquam igitur ibi terrarum aliquos ratione præditos, & Geometras, & Musicos reperiri probabilibus argumentis ostenderimus, & in societate communitateque viventes, & manibus pedibusque instructos, tectisque & mœnibus munitos: non tamen dubitandum est, quin & formæ, & rerum quas agunt novitate, mirabile supra quam dici possit futurum sit spectaculum, si quis Mercurius, aut potens Genius eò nos deducat. Sed cum ejus itineris conficiendi spes omnis adempta sit, id unum tamen, quod possumus investigare non pigebit; qualis nempe cælestium rerum facies sese offerat, in unoquoque istorum globorum vitam agentibus, cum ad eam hoc quoque pertineat. Simul vero & de præstantia cujusque, tum ob magnitudinem, tum ob adjunctum comitum lunarum numerum, quædam scitu digna referemus, ac stellarum denique inerrantium incredibilem distantiam nova ratione indagabimus. Sed à longa attentaque meditatione requiescemus hic paulum, finemque huic Libro imponemus.



CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,
SIVE
De Terris Cœlestibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

LIBER II.

Cum ante annos complures Librum Athanasii Kircheri, qui *Iter Ecstaticum* inscribitur, evolverem; in quo de Natura Siderum, rebusque in Planetarum superficie extantibus, differitur; mirabar nihil illic adferri eorum quæ mihi jam ab illo tempore circa hæc, tanquam valde probabilia, occurrebant: sed longè alia tradi, inania pleraque, & à ratione aliena. Quod magis etiam intellexi, cùm conscriptis superioribus idem opus denuo percurrerem. Jamque visum est aliquid esse conjecturas nostras, ac ponderis nonnihil iis accedere, si cum Kircherianis conferantur. Quod ut judicari possit, utque appareat quàm de his rebus frustra philosophari conentur, qui fundamenta unica verisimilitudinis, quibus usi sumus, rejiciunt; non abs re erit de opere illo quædam annotasse.

Is igitur Vir optimus, Genio quodam duce, per cæli spa- *Kircheri iter extaticum examinatur.*

ſpatia, ſtellaſque ſe circumferri fingens, partim ea quæ ex Aſtronomorum ſcriptis hauſerat, partim quæ ipſe de Planetarum terris meditatus erat, ac vulgo probari poſſe putabat, quaſi viſa enarrat. Antequam verò iter longinquum ingrediatur, hæc duo tanquam certo tenenda ſtatuit ſancitque; nullum videlicet Telluri motum eſſe tribuendum; tum nihil in Planetarum globis Deum extare voluiſſe, quod vita aut ſenſu præditum ſit, adeoque nec herbas quidem. Itaque, relicto Copernici ſyſtemate, Tychonicum ſibi quod ſequatur deligit. Sed cum ſtellas inerrantes pro totidem Solibus habeat, iiſque ſingulis ſuos Planetas circumponat; hoc ipſo (quod an ſenſerit neſcio) infinita numero jam exoriuntur ei Copernicea ſyſtemata. Quæ quidem perabſurdè, præter ſibi proprios motus, univerſa circum Tellurem noſtram, viginti quatuor horis, immani celeritate converti facit. Cumque horum maximam partem fateatur extra hominum conſpectum eſſe remotam, in hoc quoque incidit incommodum, ut fruſtra tot Soles lucere dicendi ſint, fruſtraque calorem ſuum impertiri tot globis Telluri ſimilibus, elementaque eadem, (ita enim vult) & cætera omnia habentibus, præter ſtirpes & animalia. Atque hinc porro ad alia magis abſona delabitur. Nam quia ne Planetarum quidem, qui noſtro ſyſtemate continentur, alium ullum reperit uſum, ad diu exploſas Aſtrologorum ineptias ſe convertit; & hoc fine tot tantaſque corporum moles conditas eſſe vult, ut influxu eorum vario, certiſque legibus temperato, mundi univerſitas conſervetur, incolumiſque perduret: utque præterea in hominum animos iidem influxus vires ſuas exerceant. Itaque, in Aſtrologicæ artis gratiam, in Veneris Planeta jucundam pulchramque rerum faciem ſibi oblatam narrat; cum luce blanda, undis dulciter fluctuantibus, odoribus ſuaviſſimis, atque undique fulgentibus cryſtallis. In Jove auras ſalubres, ac ſuaveolentes, aquas limpidiſſimas, terras argentei ſplendoris. Quò nimirum, ab influxu hujus utriuſque ſideris, fauſta ac ſalutaria omnia in Terram homineſque deriventur; ut vel pulchros & amabiles, vel ad prudentiam & gravitatem

tem propensos reddat. In Mercurio nescio quid serenum vividumque, unde ingenium ac solertia nascentibus insinuétur. At in Marte omnia tetra, exitialia, fætida, piceas flammas, fumosque se vidisse memorat. In Saturno tristia, horrenda, squallida, caliginosa; ut ex his Planetis, (nescio quare Apotelesmaticis omnibus invisis) influxus maligni infestique mundo ac mortalibus eveniant; nisi tamen benigniorum illorum radiis corrigi ac mitigari eos contingat. Hæc nempe & his similia Genio illi cælesti comes adhærens discit. Quem & serio respondere facit cum interrogatur, anne aquis, quæ in Veneris Planeta fluunt, Hebræus aut Paganus quispiam, eo delatus, ritè baptizari queat. Eodem quoque docente Magistro, intelligit cælum stelliferum non esse ex materia solida conflatum, sed liquidum prorsus, in quo stellæ Solesve innumeri longè latéque spargantur; nusquam alligati, (& hactenus rectè) quique omnes diei spatio vastissimos, ut dixi, circuitus peragant. Quo in motu, si talis foret, non advertit quanta vi illi undique diffugituri sint, ob motum circularem tam immensæ celeritatis. Sed ne sic avolent, inque spatia infinita recedant, Intelligentiæ motrices, credo, impedient. Etenim unicuique stellæ fixæ, imo & Planetæ, Intelligentias aut Angelos suos adjungit, qui impellant eos, cursumque moderentur. In quo Doctorum quorundam turbam sequitur, qui vanissimum Aristotelis commentum inconsideratè, invitaque ratione, adoptarunt. Istos verò beatos Genios labore tanto Copernicus liberat, solius Terræ inducto motu; cujus sanè necessitatem, vel ex hoc uno, omnes vident, nisi qui ultrò, ac volentes, cæcutiunt. Equidem cogitavi nonnunquam, meliora à Kirchero exspectari potuisse, si, quæ sentiebat, liberè exponere ausus fuisset. Sed cum hoc non auderet, nescio cur non in totum illo argumento abstinere maluerit. Sed hunc celeberrimum scriptorem jam omittamus: &, quandoquidem nil veriti sumus, conjecturis nostris, spectatores in Planetis ponere, adeamus nunc, uti propositum fuerat,

 sin-

ſingulos; & quinam ſint anni eorum, qui dies, quæ denique Aſtronomia, deinceps conſideremus.

Apparens qualis ſit conſtitutio Solis & Planetarum in Mercurio.

Itaque, ut ab intimo, & Soli viciniore incipiam, ſcimus Mercurium triplo propius circiter quam Tellurem noſtram ad ingens illud ſidus accedere. Cui conſequens eſt ut triplo quoque majus id conſpiciant ejus incolæ, ratione diametri, lumen vero & calorem ejus ſentiant noncuplo quàm nos majorem. Nobis proinde intolerabilem, quique accenſurus ſit ſiccatas herbas, fœnum ſtramenque, qualia apud nos creſcunt. At nihil impedit ita comparata eſſe, quæ ibi vivunt animantia, ut optatam temperiem in ardore illo experiantur. Herbas vero eſſe ea natura, ut multo magis vim caloris perferant. Nec mirum eſſet iſtos Mercurii indigenas putare non ferendo frigore nos urgeri, luceque frui exigua, qui tanto longius a Sole abſimus. Sicut nos de Saturni colonis facile nobis perſuademus. Non deeſt verò dubitandi ratio, cum à calore vita pendeat, iſque corpori mentique vigorem alacritatemque præſtet; an non, propter Solis viciniam, Hermopolitæ illi nobis ingenio præſtare putandi ſint? Sed quo minus huic cauſæ tribuam facit, quod calidiſſimas terræ noſtræ regiones ſortitos, Africæ, Braſiliæque populos, nec ſapientia nec induſtria æquare videmus temperatiorum tractuum incolas; ut vel ex eo perſpicitur, quod in omnium ſcientiarum ac fere artium ignoratione verſentur: cum nec nauticæ rei, qui circum littora incolunt, niſi perexiguam notitiam habeant. Nollem quoque Jovicolis, Saturnicoliſque hebetes, plumbeaſque mentes, intelligentiamve tribuere noſtra minorem, propterea quod tanto longius a Sole remoti vivunt; cum uterque globus iſte tam præſtanti ſit magnitudine, tantoque comitatu ſtipatus feratur. Qualis porro ſit Mercurialibus Aſtronomia, utque cæteros Planetas certis temporibus Soli oppoſitos ſpectent, ex figura ſyſtematis, priore libro expoſita, perfacile eſt intelligere. Atque his oppoſitionum temporibus Venerem ac Tellurem præcipuo ſplendore illic effulgere neceſſe eſt. Nam cum

adeo

deo lucida nobis Venus appareat, quo tempore tenuem nascentis Lunæ faciem refert; oportet eam sextuplo aut amplius clariorem cerni, cum Soli opponitur, ex Mercurii Globo pleno orbe spectatam, & minore quoque intervallo distantem: atque ita tunc non parum dispellere nocturnas tenebras gentibus istis, Lunæ auxilio carentibus. Quænam sint denique apud eos dierum spatia, & an varias anni tempestates experiantur, incompertum est hactenus, quod ignoretur an axem diurnæ conversionis ad orbem, quo circa Solem defertur, obliquum habeat, & quanto tempore conversio ea peragatur. Neque enim dubitari debet de diebus noctibusque eorum cum in Tellure, Marte, Jove ac Saturno hæc vicissitudo certò cognoscatur. Anni vero spatium vix quartam partem nostri æquare illic constat.

In Veneris globo positis, eadem fere in cælo apparere necesse est quæ de Mercurio diximus, nisi quod hunc nunquam videt Soli oppositum, cum non nisi 38 circiter gradibus ab eo recedat. Sol vero illis major apparet quam nobis, diametro sescupla, orbe plus quam duplo; quo & bis tantum caloris lucisque præbere cum oportet. Itaque propius ad nostræ temperiem Tellus ista accedit. At annus mensibus nostris septem cum dimidio fere finitur. Noctu verò globus hic noster, in locis Soli oppositis, multo lucidior Veneri apparere debet quàm unquam nobis appareat Venus; ac tunc Lunam quoque, perpetuum comitem nostrum, facile conspiciunt, si modo oculos habent nostris non imbecilliores. Sæpe autem in Venere miratus sum, cum tubis longioribus, pedum 45, aut 60, eam inspicerem Terræ propinquam; Lunæque semiplenæ similem, aut jam in cornua curvari incipienti; prorsus æquabili splendore superficiem ejus perfundi: ut vix dicere audeam, aliquid maculæ simile, in ea me animadvertisse; cujusmodi in Jove & Marte manifestè notantur, licet orbe multo minore sese offerentibus. Si enim maria ac terras habet Veneris globus, obscuriores nobis maris tractus conspici deberent; terrarum vero clariores; sicuti ex præaltis rupibus inspectum desuper mare,

Qualis in Venere.

re, non perinde, ac adjacentes terræ, lucidum apparet. Credebam nimium Veneris fulgorem in causa esse, quo minus diversitas lucis animadverti posset. Sed cum fumo infecissem vitrum oculo proximum, ad auferendam partem radiorum, nihilo minus æqualis in tota superficie lux visa est. An igitur nulla ibi maria, an Solis lucem magis quam apud nos aquæ, aut minus terræ repercutiunt? an potius, (quod credibilius mihi videtur) densior ibi, quam in Jove aut Marte, Vaporum regio à Sole illustrata, Venerisque globum circundans, omnem fere illam quam videmus lucem ad nos remittit, vixque subjectorum sibi marium terrarumque discrimen percipi sinit? Nam certum est nostram quoque atmosphæram, si Tellurem procul intueri daretur, plurimum obstituram luce sua, quo minus terræ marisque tam diversa claritas apparere posset, quam quæ cernitur ex edito scopulo despicienti. Eadem ratione qua Lunæ quoque maculas interdiu minus aperte quam noctu animadverti sinunt vapores iidem; quoniam tunc quoque inter illam oculosque nostros interpositi, Solisque luce illustres, visui officiunt: noctu non item.

In Marte. At in Marte reliquis disci partibus obscuriores, ut jam dixi, maculæ notantur. Ex quarum recursibus pridem fuit observatum dies noctesque illic iisdem fere quibus apud nos intervallis reverti. Hyemem vero æstatemque exiguo discrimine incolæ sentiunt, eo quod axis diurnæ conversionis paulum duntaxat ad orbitam Planetæ inclinatur, ut ex motu macularum intellectum est. Qui autem ex globo illo Tellurem nostram intuentur, eodem modo fere, ac Venus nobis, apparere iis debet, formasque lunaribus similes ostendere, si telescopio spectetur; nec ultra gradus 48 à Sole evagari; in cujus disco etiam conspici quandoque possit, uti & Veneris Mercuriique corpuscula. Et hoc quidem nunquam aliàs; Venus raro iis apparere debet, uti nobis Mercurius. Terræ vero solum in Marte nigriore materia constare verisimile est, quàm in Jove, aut etiam Luna nostra; eoque fieri ut rubicundior Mars spectetur, nec, pro ratione intervalli

quo

quo à Sole abeſt, lucem remittat. Minor verò eſt globus ejus quam ſtellæ Veneris, licet à Sole longius diſtans, ut jam ſupra animadvertimus. Nec Lunam habet ullam comitem; atque in eo Telluri noſtræ, quemadmodum & Venus & Mercurius, dignitate impar videtur. Lux vero Solis, calorque, Marticolis duplo atque interdum triplo quam nobis minor ſentitur; nullo tamen, ut credimus, ipſorum incommodo.

Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præſtare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine.

Quod ſi Tellus hæc, propter adjunctam ei Lunam, præſtare cæteris Planetis, quos huc uſque percurri, dicenda eſt; nam magnitudine nec cedit iis multum, nec ſuperat; quantopere & his tribus, & Telluri ipſi, anteponenda erunt ſidera Jovis & Saturni. In quibus ſive globorum molem conſideremus longiſſimè omnium iſtorum corpuſcula excedentem; ſive Lunarum quibus ambiuntur multitudinem, prorſus veriſimile ſit has duas primarias habendas eſſe Tellures, inter eas quæ circa Solem ſunt: præ quibus reliquæ quatuor ſint minimum quidpiam, ac nequaquam cum iis comparandæ. Quanta enim ſit differentia, quò rectius animo concipiatur, ſubjicere hic placuit, ſecundum proportiones veras, aut non multum à veris abeuntes, tum Tellurem noſtram, cum circumjecta Lunæ orbita, ipſoque in ea Lunæ globulo; tum Jovis ac Saturni ſyſtemata: Illud quaternis, hoc quinis Lunis exornatum; quarum quæque in ſua itidem orbita ponuntur. Joviales Galilæo deberi notum eſt; quæ quanto animi gaudio primum illi animadverſæ ſint, facile quivis ſecum reputet. Saturniarum una nobis obtigit, quæ cæteris clarior eſt, & ab extrema proxima. Quam Anno 1655 teleſcopio noſtro non ultra duodecim pedes longo, primi deprehendimus. Reliquæ diligentiſſimis Dominici Caſſini obſervationibus patuerunt, vitreis orbibus utenti à Joſ. Campano expolitis, primùm 36 pedum; deinde totidem ſupra centenos. Tertiam enim quintamque vidimus Anno 1672, ipſo monſtrante Caſſino, & poſtea ſæpius. Primam, cum ſecunda, ſibi repertas ſignificavit, miſſis literis, Anno 1684. Hæ vero difficillimè cernuntur, certoque affirmare nequeo mihi conſpectas

TAB. LIII.

ha-

hactenus. Nec propterea quidquam vereor Clarissimo Viro fidem habere, atque has quoque Saturno socias adscribere. Imo præter harum numerum alias quoque, vel unam vel plures, latere suspicari licet; nec deest ratio. Cum enim, inter extremas duas, spatium amplius pateat quàm pro distantiis cæterarum; posset hoc insidere sextus satelles: vel etiam, ultra quintum, alii circumvagari, qui propter obscuritatem nondum sint visi: cum ille ipse quintus, tantùm in orbitæ suæ parte quæ ad occidentem spectat, cernatur, in reliqua nunquam appareat; cujus rei causam satis intellectu facilem postea adferemus.

Fortasse autem, ubi ad signa Borea Saturnus revertetur, altéque supra horizontem attolletur, (nam, quo tempore hæc scribimus, maximè deprimitur) aliquid circa hæc novi observare continget, si quis tuas tunc lentes, Frater optime, ad Telescopia pedum 170. & 210. paratas, sideribus applicet: quibus majores, formæque perfectioris, nullas hactenus extare arbitror. Quanquam enim cælo nondum eas admovimus, vel propter moliendi difficultatem, vel quod discessus tuus studia hæc nostra conatusque interrupit: omni tamen vitio eas carere certi sumus, post experimenta illa faciliora, quæ in ambulacris suburbanis sub noctem instituebamus; inspectis procul literis, quibus appositum erat lumen. Quorum equidem lubens reminiscor, simulque jucundi laboris nostri, quem, in elaborandis expoliendisque vitreis hujusmodi discis, impendere unà solebamus; excogitatis novis artificiis machinisque, semperque ulteriora agitantes. Sed redeo ad diagrammata ante descripta, de quibus aliqua dicenda supererant.

Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum satellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram.

Feci in iis Jovialis globi diametrum duarum circiter tertiarum ejus distantiæ quæ inter nos nostramque Lunam interjacet; quandoquidem plus quàm vicies diametrum Terræ diameter Jovis continet; Luna autem distat à Terra diametris hujus triginta. Orbitam vero comitis Jovis extremi ad nostræ Lunæ orbitam posui sicut $8\frac{1}{2}$ ad 1, quoniam ejusmodi inter eas proportio re ipsa reperitur. Et hi quidem comites,

tes, ſive Lunæ ſingulæ, non videntur Tellure noſtra minores eſſe, ut ex umbris earum in Jovis diſco ſæpe obſervatis, probari poteſt. Sunt autem (ut hoc quoque addamus) periodorum tempora ſub Ecliptica, apud Caſſinum, intimi Jovialium dies 1, horæ 18, 28′, 36″. Secundi dies 3, horæ 13. 13′. 52″. Tertii dies 7. horæ 3. 59′. 40″. Quarti dies 16, horæ 18. 5′. 6″. Diſtantiæ à centro Jovis, comitis intimi $2\frac{5}{6}$. Jovis diametrorum. Secundi $4\frac{1}{2}$. Tertii $7\frac{1}{6}$. Quarti $12\frac{2}{3}$. In Saturniis periodica tempora, intimi, dies 1, horæ 21, 18′, 31″. Secundi dies 2, horæ 17, 41′, 27″. Tertii dies 4, horæ 13. 47′, 16″. Quarti dies 15, horæ 22, 41′, 11″. Quinti dies 79, horæ 7, 53′. 57″. Diſtantiæ à centro Saturni, diametris Annuli dimenſæ, Comitis intimi, $\frac{39}{40}$. Secundi $1\frac{1}{4}$. Tertii $1\frac{3}{4}$. Quarti 4, quæ mihi erat $3\frac{1}{2}$. Quinti 12. omnia magnis laboribus vigiliiſque reperta.

Tempora periodorum comitum Jovialium.

Ecquis jam ſyſtemata hæc inſpiciens, atque inter ſe conferens, non ſtupet ad magnitudinem, ingentemque paratum duorum præ exiguo tenuique Telluris noſtræ? aut cui nunc in mentem venire poteſt in hac una Solem ambientium, omnem ornatum, omnia animalia, omnes qui cœleſtia mirentur inveniri; in illis vero nihil impoſuiſſe rerum conditorem; nec alio fine tam vaſtas corporum moles creaſſe, quam ut lucem eorum nos homunculi intueremur, curſumque forſitan inquireremus?

Credo equidem futuros qui falſa aut incerta eſſe dicant, quæ de magnitudine cœleſtium ſpatiorum nobis hic ſumuntur. Scio enim quam difficulter quiſquam adducatur, qui orbis Terrarum ſpatia mirari aſſueverit, inque eo tot populos, urbes, imperia; ut alibi exſtare credat quorum collatione hoc totum tam ſit exiguum quam hæ figuræ demonſtrant. Atqui ex ſummorum hujus ætatis Aſtronomorum ſcriptis ea hauſimus, ex quibus iſtæ ſyſtematum inter ſe rationes conſequantur. Si enim Terra à Sole decem vel undecim mille diametris ſuis diſtat, ut Caſſinus in Gallia, apud Anglos Flamſtedius colligunt, parallaxium in Marte ſubtiliſſimis obſervationibus uſi; cum nos quoque probabili conjectura, duo-

De hac proportione magnitudinis conſtare ex recentiorum obſervationibus.

duodecim mille diametros invenerimus; erunt & istæ orbium magnitudines inter se ferè quales hic descripsimus.

Quanam sit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & qui cognosci queat.

Sed de Jove dicere pergamus, ex quo Sol spectatus diametrum quintuplo quam apud nos minorem habet; ut proinde lucis calorisque illic pars tantum vigesima quinta sentiri possit. Sed ea lux nequaquam debilis putanda est, idque ostendit insignis Jovis per noctem claritas. Tum quod in Solis Eclipsibus quæ nobis contingunt, etiamsi nec vigesima quinta pars disci ejus supersit, ut me videre memini, non admodum sentiatur obscuratio. Si vero experimento inquirere libeat quanta sit illa in Jove Solis lux, sumatur tubus certæ longitudinis, isque parte altera obturetur, impositâ lamellâ in cujus medio foramen sit rotundum, ea latitudine quæ ad tubi longitudinem se habeat ut subtensa 6 scrupulorum primorum ad radium, hoc est fere ut 1 ad 570. Deinde ad Solem tubus obvertatur, radiique ejus per foramen ingressi excipiantur parte opposita, in chartæ candidæ folium; nec aliunde eo lux incidere possit. Hi radii imaginem Solis circulo referent, cujus claritas erit eadem quæ serenis diebus percipitur à Jovis incolis. Remotâ autem chartâ, si eodem loco oculus ponatur, videbit hic Solem ea magnitudine ac splendore, qui in Jovis globo consistenti appareret.

Itidem in Saturno.

Quod si in eodem tubo foramen duplo angustiori diametro statuatur, incidet in chartam, aut in oculum, lux ejusmodi qualis ad Saturnicolas pervenit. Quæ cum centesima tantum pars sit nostræ quam a Sole accipimus, tamen per tenebras noctis Saturnum satis lucidum nobis ostendit. In utroque vero Planetarum istorum, si nubilos quandoque dies habent, malignam tunc lucem esse oportet, si nostris oculis judicanda sit; at illorum habitatoribus talem haud dubiè, ut nihil de tenuitate ejus querantur. Sicut in noctuis, vespertilionibusque utilior gratiorque est crepusculi lux, aut quæ in ipsa nocte relinquitur, quam quæ diei tempore aërem terramque illustrat.

In Jove dies esse horarum quinque.

In Jove porro dierum spatia, quinque tantum horas nostrates æquare, ac noctes tantundem, admiratione non caret,

5

4
3
2
1
Annu Sat. lus

4
3
2
1
Jup.

Luna
Tellus

ret, propter tantam illius globi præ nostro magnitudinem. Et ex hoc nimirum intelligitur naturam haudquaquam ea in re servasse rationem quæ est secundum globorum molem, aut eorum distantiam à Sole; cum etiam in Marte dies sint fere nostris pares. At in annorum longitudine, hoc est, tempore circuitus circa Solem, certam omnino distantiarum, quibus ab illo Planetæ absunt, rationem habuit. Sunt enim ut harum cubi, ita quadrata temporum periodicorum, ut primus advertit Keplerus. Idque in comitibus Jovis & Saturni eodem modo se habere inventum est. Cum itaque anni & dierum tempora in Jove à nostris multum diversa sunt, tum dies hoc nomine etiam differunt, quod eadem semper sint longitudine. Perpetuo enim illic fruuntur æquinoctio, quoniam axem motus diurni Jupiter rectum ferme habet ad planum itineris sui circa Solem, nec ut Tellus obliquum; ut telescopiorum observationibus constat. Frigidiores autem & ibi sunt regiones quæ polis viciniores propter radiorum Solis obliquitatem; at longas noctes non patiuntur, sicut quæ sunt prope polos Terræ; sed tenebras lucesque habent, ut dixi, horarum quinque, ubique & semper. Ac nobis quidem haud sanè placeret tanta dierum brevitas, meliusque nobiscum agi putamus quod plus quam duplo longioribus utimur. Nulla tamen ratione, nisi quoniam potiora ducere solemus ea quibus assuevimus.

Et perpetuum æquinoctium.

Planetarum unum Saturnum ex Jove vident; cum cæteri nimium Soli vicini sint; ipseque Mars ab eo non ultra 18 gr. digrediatur. Ex quaternis vero quas habent Lunis, quin multò plus commodi capiant, quàm nos ex unica nostra, negare non possumus, vel eo solo quod perrarò illunes noctes experiantur. Si verò & maria sua navigant, de quo supra dictum fuit, egregiè cursus regere earum auxilio possunt. Ut prætercam spectaculi jucunditatem ex variis earum conjunctionibus, Eclipsibusque, quas quotidie intuentur.

Eadem porrò commoda ac spectacula, imò etiam majora, Saturnicolis evenire necesse est, cum ob quinque Lunarum numerum, tum ob mirabiles Annuli aspectus, nocte dieque

iis obversantes. Sed totam eorum Astronomiam, sicut in cæteris fecimus Planetis, exponere oportet.

Planeticolis stellas fixas eodem modo apparere, ac nobis.

Atque hic primum illud annotabimus, quod de omnibus dici poterat, sed hic magis mirandum est, stellas inerrantes è Saturno iisdem planè figuris, eademque luminis diversitate distinctas, atque apud nos spectari: idque ob immanem earum distantiam, de qua postea dicetur. Ad quam nempe illa, quam viginti quinque annis globus à tormento emissus pervaderet, perexigua censenda sit.

Eadem igitur signa Orionis, Ursæ, Leonis, & reliqua, Astronomi illic contemplantur; at non circum eosdem polos ac nobis sese convertentia, sed qui unicuique Planetæ diversas cœli partes obtineant.

Qualis sit Planetarum aspectus, dierum ratio in Saturno.

Sicut autem Jovis incolis solus Saturnus è primariis Planetis cernitur, ita Saturnicolis solus spectatur Jupiter; qui idem illis est quod nobis Venus, nec nisi 37 circiter grad. à Sole recedit. Quantam verò habeant dierum longitudinem, certò cognosci nequit. Sed, ex comitis intimi distantia ac periodo, exque eorum comparatione cum intimo Jovialium, verisimile fit non longiores esse dies illas quam sint in Jove; quas decem horarum esse diximus, aut paulo minus. Sed, cum hæ æqualiter in lucem ac tenebras dividantur, Saturnicolæ insignem inæqualitatem atque etiam majorem quam nos perpetiuntur, majusque etiam æstatis & hyemis discrimen; propter inclinationem axis globi Saturnii ad planum orbitæ suæ, quæ est partium 31; cum noster Terræ axis tantum 23 & dimidiæ obliquitatem habeat. Hæc eadem declinatio in Saturno, Lunas ejus longe evagari facit à Solis via, vel quam pro hac illi habent: atque etiam causa est, cur nunquam Lunas suas pleno orbe lucentes conspiciant, nisi æquinoctiorum tempore; quæ triginta annis nostris bis ibi contingunt. Idem denique axis positus phænomena varia, ac mirabilia, Planetæ ejus incolis præbet; quæ ut intelligi possint, totius Saturni cum Annulo figuram hic rursus describemus: in qua, sicut jam olim definivimus, cum mirum hunc fornicem è tenebris primùm erueremus, inter diame-

tros

tros annuli globique ea erit ratio, quæ 9 ad 4. Vacuumque ſpatium inter utrumque interjectum, eandem quam annulus latitudinem habebit. Craſſitudinem autem hujus exiguam eſſe, obſervationes comprobant, quæ tamen ratione diametri, non nimia erit, etiamſi ſexcenta milliaria Germanica efficere putetur.

Sit igitur ſecundum hæc Saturni globus cujus poli A, B. Annuli diameter G N, obliquè inſpecti, ita ut Ellipſin anguſtiorem circumferentia ſua referat. Sunt igitur circa polos utroſque portiones ſuperficiei, arcubus C A D; E B F, 54 partium, definitæ, quas qui incolunt (niſi frigus forſan inhabitabiles reddit) nunquam Annulum conſpicere poſſint. Ex reliqua omni ſuperficie vident eum annis continuis quatuordecim, menſibus novem: quod eſt ipſis anni ſpatium dimidium. Altero dimidio abſconditur. Quocirca qui habitant in zona ampliſſima inter circulum polarem C D, & T V, æquatori annuloque ſubjacentem, quandiu ſuperficiem annuli ipſis obverſam Sol illuminat, vident media nocte portionem ejus K G L, arcus lucidi forma, qui utrimque ab horizonte exurgit, ſed medius interrumpitur umbra globi Saturnii partem G H tegente plerumque ad extremum uſque marginem. Poſt mediam verò noctem umbra eadem paulatim in partem dextram movetur, ſpectatori in hemiſphærio boreo agenti; in ſiniſtram verò, ſi in oppoſito verſetur. Evaneſcitque matutino tempore, manente tamen arcus ſpecie, quem tota die cernere poſſint, ſed tenuius lucentem quam nobis Luna noſtra interdiu conſpicitur. Siquidem ſua illis eſt atmoſphæra, ſive aër a Sole ſplendeſcens, ut probabile eſſe ſuperius oſtendimus. Nam ſi nihil tale haberent, non aliter interdiu quam noctu & annulum & Lunas ſuas, ſtellaſque inerrantes lucere viderent. Annuli porro ſpectaculum, hôc quoque pulchriùs eſſe oportet, quod eum in ſeſe converti, ex maculis quibuſdam, aut inæquali ſplendore animadvertunt. Neque enim ex tanta propinquitate hoc notari non poteſt, cum vel è Tellure noſtra inæqualis claritas, in ſuperficie annuli, appareat; quæ limbo exteriore, quàm in-

TAB. LIV. fig. 2.

Qualis ſit Annuli aſpectus in Saturno.

interiore, minor est. Simul autem, dum globi umbra in Annuli partem G H projicitur, etiam annuli umbra obscurat globi partem circa P F, quæ alioqui Solis luce frueretur. Ut proinde semper Zona quædam sit P Y E F, nunc latior, nunc angustior, cujus incolæ multo tempore conspectu Solis, annulique simul, priventur; qui tunc quoque stellarum partem aliquam illis aufert. Quod certè miraculi instar videri necesse est; intercepto Sole, in profundam noctem incidentibus; nec quid eam efficiat videntibus. Quo tempore Lunarum solo lumine se solantur. Altera anni parte dimidia, cum oppositam annuli superficiem Sol illustrat, eodem modo, luce fruitur hemisphærium T B V, quo prius T A V; & hoc vicissim tunc longas illas eclipses patitur. Sola æquinoctiorum sunt tempora, Sole in ipsum productum annuli planum incidente, cum lumine destitutus vix Saturnicolis apparere potest; quando nec nostris percipitur dioptris. Tenente nimirum Saturno, ex Sole viso, gradum Virginis, aut Piscium, vicesimum primum cum dimidio; quemadmodum in Saturnio systemate olim exposuimus. Ubi ratio quoque redditur eorum, quos diximus, exortuum Solis super Annuli planum, toto Saturnii anni decursu.

Apposui in schemate hoc, juxta Saturnum, Terræ nostræ, Lunæque globos, servata magnitudinum vera ratione; ut rursus intelligatur, quam exigua sit habitatio nostra, ad Saturni sphæram annulumque collata; quod continue cogitationi infixum habere expedit. Imaginem vero Saturniæ noctis, geminis annuli lucentis arcubus adversis, & quinque Lunis ornatæ, sibi quisque formare ex jam dictis poterit. Et de primi quidem ordinis Planetis, hæc fere erant quæ dicenda habebam.

Superest ut de Lunis quoque Saturno ac Jovi additis, ac præcipuè de nostra, quæramus, tam quæ ad phænomena astronomica attinent, quam quæ ad ornatum in earum superficie reperiendum, ac præsertim an aliquem esse probabile sit; quod hactenus facere distulimus.

De Luna pauciora conjici posse. Ac videtur quidem, cum tam propinquus nobis sit Lunæ glo-

TAB. LIV.

Fig. 1.

♋

Saturni.

Jovis.

Martis.

Telluris.

Veneris.

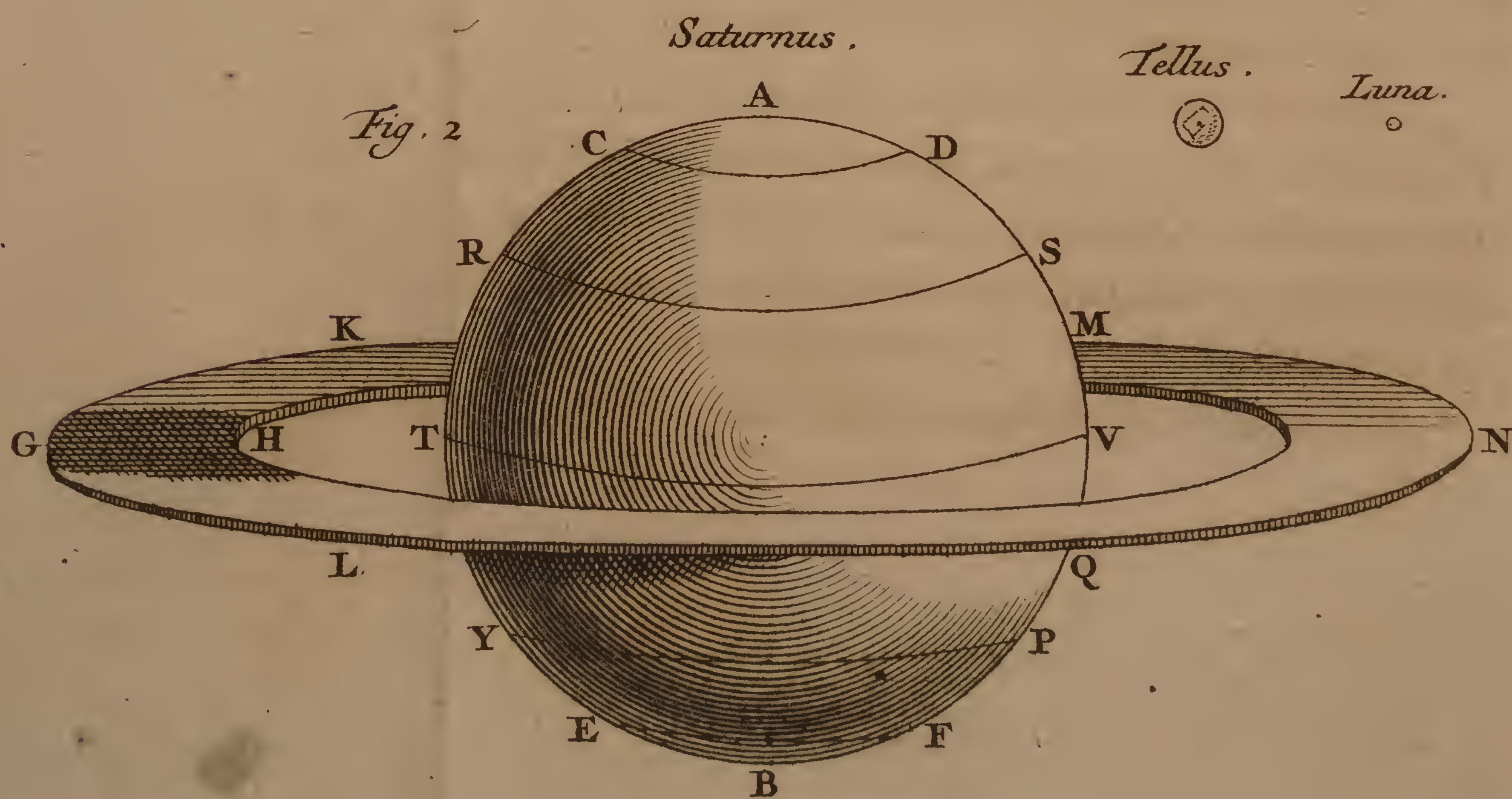
Merc.

Sol.

♎

♈

♑



globus; telescopioque utentibus multa particulatim conspicienda præbeat; plura quoque ac probabiliora de universa natura ejus, quàm de Planetarum cæterorum conjici posse, tanto quippe remotiorum. Sed contra evenit ut vix quidquam de Lunæ rebus dicendum reperiam, nimirum quia ejus generis Planetam nullum coram intueri contigit; cum in primariis illis aliter hoc sese habeat. Sunt enim, ut jam satis constat, generis ejusdem ac Tellus nostra, in qua, quid rerum geratur, quidve exstet, propè intuemur, eoque de cæteris similia quædam conjectandi ratio suppetit.

Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem esse.

Illud vero sine omni dubitatione statuere possumus, ejusdem naturæ, ac Luna nostra, esse illas, quæ Jovem ac Saturnum comitari dictæ sunt, siquidem eodem prorsus modo primarios hosce Planetas circumeunt, simulque cum illis circum Solem feruntur, perinde ac cum Tellure Luna. Sed & aliam utrobique similitudinem intercedere postea videbimus. Quamobrem si quid de Lunæ statu conjicere possimus, (possumus autem pauca admodum) idem in quatuor illis circa Jovem, & in quinque Saturniis haud multo aliter se habere putandum erit. Illud semper menti infixum tenendo, non esse illas viliores aut minore ornatu excultas.

Lunam montibus & vallibus distinctam esse.

Illud igitur in Luna nostra apparet, etiam minoribus perspicillis trium quatuorve pedum longitudine, plurimis montium tractibus, rursusque planis vallibus latissimis, superficiem ejus divisam esse. Cernuntur enim montium umbræ ea parte quam a Sole aversam habent; ac frequenter jugo in circulum fere composito inclusæ valles quædam minores animadvertuntur; quarum medio monticuli, unus pluresve rursum eminent. Ex qua vallium rotunditate argumentum sumebat Keplerus, Lunicolarum, cum ratione operantium, immensas has esse molitiones. Sed hoc incredibile prorsus, tum ob nimiam earum magnitudinem; tum quod facile naturalibus causis cavitates ejusmodi orbiculares formari possint.

Carere vero mari.

Marium vero similitudinem illic nullam, (etsi & ille, & alii plerique omnes contra sentiunt) reperio. Nam regiones planæ ingentes, quæ montosis multo obscuriores sunt; quas-

que

que vulgo pro maribus haberi video, & oceanorum nominibus insigniri; in his ipsis, longiori telescopio inspectis, cavitates exiguas inesse comperio rotundas, umbris intus cadentibus; quod maris superficiei convenire nequit: tum ipsi campi illi latiores non prorsus æquabilem superficiem præferunt, cum diligentiùs eas intuemur. Quocirca maria esse non possunt, sed materia constare debent minus candicante, quàm quæ est in partibus asperioribus: in quibus rursus quædam vividiori lumine cæteris præcellunt. Nulli quoque fluvii in Luna inesse videntur. Non enim effugerent aciem perspicillorum nostrorum; saltem si inter montes aut ripas præaltas, ut nostri plerique, laberentur. Sed neque nubes ullæ sunt unde pluviæ generentur ad suppeditandum fluviis humorem. Si enim essent, videremus eas nunc has nunc illas Lunæ regiones obtegere, ac visui nostro subducere, quod nequaquam contigit, sed perpetua apparet serenitas.

Fluviis,

Nubibus,

Aëre & aqua.

Porrò nec aëre aut atmosphæra Lunam cingi, qualis circum Tellurem hanc ambit, manifestum est. Quia si qua talis existeret, non posset extrema Lunæ ora tam præcise circumscripta spectari, quam subeunte stella aliqua sæpe animadversa est; sed evanida quadam luce, ac velut lanugine finiretur, ut omittam vapores atmosphæræ nostræ maximam partem ex aquæ particulis constare; ac proinde, ubi nulla sunt maria aut fluvii, non esse unde eorum copia sursum educatur. Hæc igitur insignis differentia quæ Lunam inter Terramque nostram reperitur, omnem fere aditum conjecturis obstruit. Nam si maria amnesque inesse cernerentur, haud leve argumentum esset cæterum quoque Terræ ornatum ei convenire, veramque adeo esse Xenophanis opinionem, qui habitari in Luna dicebat, eamque Terram esse multarum urbium & montium. Nunc vero in solo arido, & omnis aquæ experte, non videntur neque herbæ, neque animantia exstare posse, cum omnibus istis humor materiam & alimenta præstare debeat.

Hinc de animantibus & stirpibus in-

Anne igitur credendum, tantæ magnitudinis globum in hoc conditum esse ut noctu nobis lucem tenuem largiatur, aut

aut æſtus maris cieat? Nemo erit qui pulcherrimo inde ſpectaculo fruatur Telluris noſtræ in ſe revolutæ, & nunc cum Europa Africam, nunc Aſiam, nunc Americam oſtentantis; nunc plene, nunc dimidio orbe lucentis? Omnes item quæ Jovem ac Saturnum circunſtant Lunæ, æquè inutiles vacuæque ferentur? Non habeo equidem quod dicam, cum nulla ab re ſimili conjectura ſuppetat. Magis tamen probabile videtur ob corporum præſtantiam, aliquid in ſuperficie eorum geri, aliquid creſcere ac vivere, qualecunque tandem id ſit, & quantumlibet à rebus noſtris diverſum. Poſſet forſan ſtirpium animaliumque ibi vitam aliud quid, aquæ noſtræ diſſimile, ſuſtentare. Poſſet exiguus humor in terra, non æque ac noſtra, aquam combibente, ſufficere radiis Solis, unde rorem educerent, alendis herbis arboribuſque idoneum. Quod idem Plutarcho in mentem veniſſe video in eo qui de Facie in orbe Lunæ eſt dialogo. Nam neque apud nos, niſi ſumma maris ſuperficie, ac tenui veluti pellicula opus eſſet, ad humorem terris, ſatiſque ſuppeditandum, quem Solis vis elicuiſſet, quique in rorem tantum, non vero in nubes condenſaretur. Sed hæ admodum leves ſunt conjecturæ aut ſuſpiciones potius, nec aliud habemus ex quo de Lunæ noſtræ, atque etiam reliquarum natura aliquid colligamus.

certiorem conjecturam eſſe.

Omnium enim, uti diximus, eadem putanda eſt; idque præter adductam ſuperius rationem, etiam hac alia confirmatur, quod ſicuti Luna noſtra eandem perpetuò faciem ad nos obverſam habet, ita & illæ Joviales ac Saturniæ ad ſuos Planetas primarios. Mirum videatur hoc ſciri potuiſſe; at non erat difficilis conjectura, poſtquam, ut paulo ante dixi, animadverſum fuit extremam Saturniarum tunc ſolum conſpici, cum Planetæ huic ad occidentem poſita eſt; ab oriente vero ſemper eam latere. Facile enim perſpicitur id inde evenire, quod magna ſui parte obſcuriorem ſuperficiem habeat hæc Luna; quæ pars obſcurior cum ad nos converſa eſt, tunc cerni nequeat præ luminis tenuitate. Cumque ſemper in orbitæ ſuæ latere quod orientem ſpectat obſcurata reperiatur, in altero nunquam, manifeſtum indicium eſt eandem

Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere.

globuli regionem ſemper Saturnum reſpicere, quoniam ex eo illud contingere neceſſe eſt. Quis vero jam dubitet, cum & illius omnium remotiſſimæ & noſtræ Lunæ facies ſemper eadem ex primario Planeta ſuo ſpectetur, quin idem in cæteris, quæ circa Jovem ac Saturnum volvuntur, natura effecerit? Cauſa vero quare id fiat vix aliunde peti poteſt, quam quod denſior ponderoſiorque materia ſit Lunarum omnium parte ea, quâ ſemper à Planetis ſuis averſæ ſunt. Sic enim ea ipſa pars majore vi à centro circuitus recedere contendet: cum alioqui, ex motus legibus, eadem ſemper facies non ad Planetam, ſed ad fixas ſtellas eaſdem, continue obverti debuerit.

Lunæ incolis ſi qui ſint, qualis apparitura ſit cælorum conſtitutio, dierum ratio, &c.

Porro ex hoc poſitu Lunarum ad Planetas ſuos mira quædam ſpectacula evenire neceſſe eſt eas habitantibus, qui an ſint aliqui, ut jam apparuit, multo incertiſſimum eſt; ſed quaſi eſſent ponantur. Satis erit autem de noſtræ Lunæ indigenis dixiſſe. His igitur ſic in duo hemiſphæria globus ejus dividitur, ut qui alterum incolunt, ſemper Telluris noſtræ conſpectu fruantur, qui reliquum, ſemper eo careant. Niſi quod quidam, circa confinia utriuſque agentes, amittant eum per vices ac recuperent. Cernunt autem Gæoſcopi illi Tellurem in æthere pendentem multo majorem quam quanta nobis Luna apparet, quippe ferè quadruplo ampliore diametro. Sed illud mirabile, quod nocte dieque eodem cœli loco velut immobilem perpetuo hærere vident; alii recta ſupra caput defixam, alii certa altitudine ab horizonte diſtantem, quidam & in ipſo horizonte ſitam: atque interea convertentem ſe circum axem ſuum, regioneſque quas continet univerſas deinceps oſtendentem horarum viginti quatuor ſpatio, atque eas quoque proinde (quod utinam videre liceret) quæ ad utrumque polum nobis incolis adhuc incognitæ manent. Præterea & lumine creſcentem eam vident & imminutam menſtrua periodo, atque ita per vices plenam, dimidiatam, inque cornua tenuatam, eâdem formarum varietate quam Lunæ globus nobis exhibet. Sed lucem à Tellure noſtra accipiunt quindecuplo majorem quam nos ab illa. Adeo ut,

ut, in hæmisphærio meliore, ad nos obverso noctes insigniter claras habeant; nec tamen cum claritate illa ullus ad eos calor manare potest, etsi hoc aliter Keplero visum est. Sol verò semel illis oritur singulis mensibus nostris, semelque occidit, atque ita dies noctesque, quindecuplo quam nos longiores habent, at inter se æquales perpetuo æquinoctio. Qua dierum longitudine, quandoquidem non amplius ab illis quam à nobis Sol abest, necesse esset eos, quibus altè supra horizontem ascendit, æstu incommodo torreri, si corpora eorum perinde ac nostra afficiantur. Ascendit autem maximè iis qui circa confinia hemisphæriorum, quæ diximus, incolunt, qui vero inde procul distant, ac circa regiones habitant polis Lunæ suppositas, non magis ob longos istos dies calebunt, quam qui circa Islandiam aut novam Zemblam æstivo tempore cetos piscantur; qui persæpe frigora ingentia, ipsius solstitii tempore, ac trium licet mensium diebus, experiuntur. Sunt autem poli Lunæ, quos circum stellæ fixæ converti cernuntur in ea habitantibus, nequaquam iidem qui nobis, neque etiam cum Eclipticæ polis conveniunt, sed his circunferuntur, quinque gradibus semper distantes, idque periodo annorum novendecim. Anni autem spatium idem illic quod nobis; quod motu fixarum metiuntur ac reversione earum ad Solem. Idque iis perfacile est, cum diei tempore, non minus quam noctu, stellas conspiciunt, nihil impediente Solis claritate; quoniam, ut supra ostensum est, nullam vaporum sphæram habent; sine qua & nos interdiu cœlum sideribus plenum aspiceremus. Nec vero nubes quoque ullæ unquam obstant observantibus, adeo ut cursus Planetarum melius quàm nos investigare possint; sed tamen difficilius multò verum systema reperire. Quoniam incipientibus stare Terra sua videri debuit, in quo eos longius quàm nos error abduxit.

Hæc omnia vero ad Jovis & Saturni Lunas referuntur, quibus idem quod nobis Tellus est, sui sunt primarii Planetæ. Singula autem diei noctisque spatia simul sumpta, cujusque Lunæ periodus metitur, quas supra annotavimus.

Quod ad Jovis & Saturni Lunas facile transferre est.

Quo fit ut Saturni quintam incolentibus, cujus periodus dierum noſtrorum erat 80, eveniant ſui dies noctesque noſtris quadraginta æquales. Iiſdem vero, propter Saturni revolutionem tricennalem, fiunt æſtates hyemeſque ſingulæ annorum noſtrorum quindecim. Itaque tum propter tam longa frigora, tamque longos ſomnos vigiliaſque; etiamſi nil aliud eſſet, plane aliam quam apud nos vitam illic fore manifeſtum eſt.

Explicuimus igitur hactenus, quæ ad Planetas primarios ſecundarioſque Solem circundantes ſpectant. Hinc vero priuſquam ad Solem ipſum & ſtellas fixas, tertium nempe genus cœleſtium corporum, pergamus, operæ pretium videtur, ut magnitudinem, ac magnificentiam totius Solaris mundi, aliqua ratione, atque evidentius quam hactenus factum ſit, exprimamus. Quod quidem ſchemate in foliis hiſce deſcripto haudquaquam poſſumus, propter parvitatem corporum Planetariorum ad vaſtiſſimas orbitas ſuas collatorum. Sed verbis ſupplebitur quod deſcriptione perfici nequit. Itaque repetitâ figurâ quam ſuperioris libri initio poſuimus, cogitetur ei ſimilis ac proportione reſpondens, ſed quæ deſcripta ſit in ampliſſima politiſſimaque areæ cujuſdam planitie, cujus extremus circulus, Saturni orbem referens, trecentos ſexaginta pedes ſemidiametro contineat. In cujus deinde circunferentia globus Saturni cum ſuo ponatur Annulo, quantus in figura altera cernitur, ubi Solis & Planetarum ſunt corpora. Cæterique ſimiliter globi in ſua quiſque orbita collocentur; inque medio omnium Sol qua magnitudine ibi deſignatur, quatuor nempe pollicum diametro. Ita Telluris circuitus, quem *magnum orbem* vocant Aſtronomi, ſemidiametrum ſortietur pedum triginta & ſex. In quo Tellus ipſa milii grano non major circunferri cogitanda eſt; eique comes Luna, vix punctum viſibile ſuperans, in circello paulo plus quam duos pollices lato; velut in adſcripto hic diagrammate. In quo linea A B circunferentiæ partem refert ejus, quam diximus, Telluris orbitæ, cujus triginta & ſex pedes continet ſemidiameter. In ea Tellus eſt cir-

TAB. LIV. fig. 1. *Solaris mundi ſecundum veram proportionem deſcriptio.*

TAB. LV. fig. 1.

TAB. LV. fig. 2.

circellus C: Lunæ vero circum eam via, circulus DE; in quo Lunæ corpusculum quale ad D expressum est.

Saturniarum vero Lunarum exterior in circulo feretur cujus semidiameter pollicum 29. Jovialium item exterior in minore aliquanto, cujus semid. poll. 19¼.

Sic demum habebitur germanus & omni proportione perfectus solaris Regiæ typus, in quo jam Tellus duodecim mille diametris suis à Sole aberit. Cujus spatii amplitudo si milliarium numero designanda sit, plus quam septemdecim milliones, ut vocant, milliarium Germanicorum comprehendet. Sed melius fortasse hanc vastitatem animo concipiemus, si motus cujusdam celeritate eam metiamur, Hesiodi Poëtæ exemplo; qui altitudinem cœli, & Tartari profunditatem æquis spatiis definiens, novem dierum noctiumque lapsu, ferream incudem è cœlo dimissam, ad terram decimâ pervenire scripsit; ac tanto quoque tempore è Terræ superficie cadentem ad Tartara ferri. Nos vero non incudis lapsum sed continuam potius celeritatem globi ex majore tormento emissi huc adhibebimus; quem singulis horæ secundis scrupulis, sive arteriæ pulsibus, centum circiter hexapedas conficere experimentis compertum est, quæ in Balisticis Mersennus commemorat; cum sonus eo tempore ad centenas octogenas extendatur.

Immensitas intervallorum inter Solem & Planetas, illustratur comparatione cum motu globi è tormento emissi.

Ajo igitur, si ex Terra ad Solem tanta illa celeritate globus continuè feratur, fere annos 25 esse insumpturum antequam iter hoc peragat. Ut proinde à Jove ad Solem 125 annis opus habeat, à Saturno 250. Et hic quidem calculus ex mensura Terræ diametri pendet, qui ex probatioribus Gallorum observationibus est hexapedarum Parisiensium 6538594. cum gradus unus circuli maximi efficiat hexapedas 57060. Quanta itaque sint istorum orbium spatia, quamque exilis, eorum respectu, Telluris globulus, in quo tam multa homines molimur, tantum navigamus, tot bella gerimus, ex his intelligitur. Quod utinam discant cogitentque Reges & Monarchæ nostri; ut sciant quantilla in re laborent cum de angulo aliquo terræ occupando totis viribus, magno multorum

malo, contendunt. Sed ad noſtra revertamur, ac de Sole videamus, cujus jam ſimul ad Planetas & eorum orbitas magnitudinem ampla illa deſcriptio, quam expoſuimus, demonſtrat.

In Sole omnem conjecturam deficere.

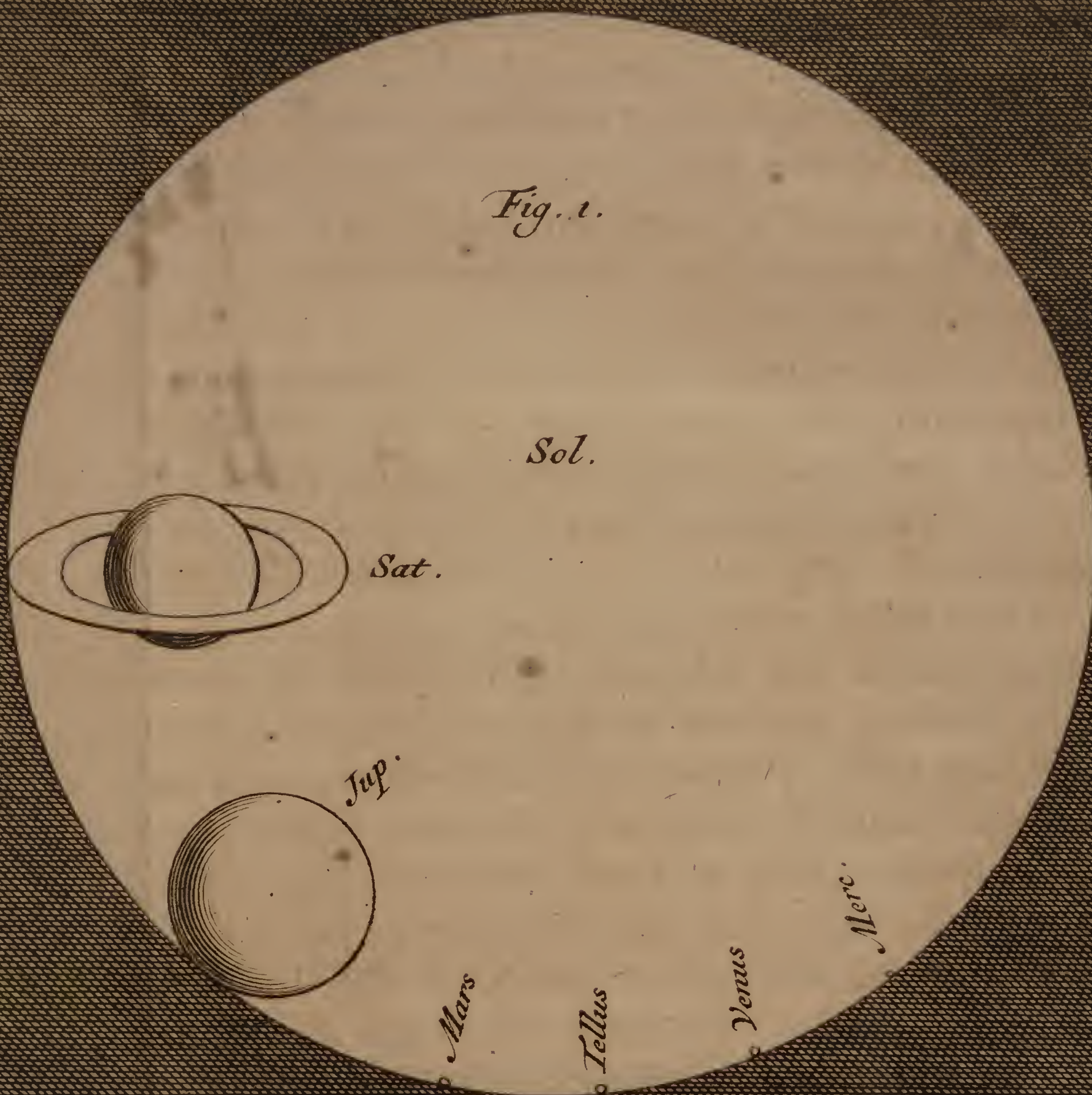
In hoc igitur ipſo Sole non improbabile quibuſdam viſum eſt animalia vivere poſſe. Sed cum multo magis etiam, quam in Lunis, conjectura omnis hic deficiat, neſcio qua ratione id ita eſſe opinati ſint. Non enim adhuc planè compertum eſt, utrum dura an liquida ſit vaſti illius globi materies; etſi propter lucis naturam, quam aliàs explicui, magis veriſimile ſit liquidam eſſe; quod etiam perfecta rotunditas ejus, lumenque per totam ſuperficiem æqualiter diffuſum ſuadere videtur. Nam exigua quædam in diſci circunferentia apparens inæqualitas, quæ teleſcopiis, nec tamen ſemper, cernitur, & ex qua miros *undarum fluctus, flammarumque eructationes*, nonnulli ſibi fingunt, nihil aliud eſt quàm vaporum prope Terram noſtram tremula agitatio, quæ & ſtellas noctu ſcintillare facit.

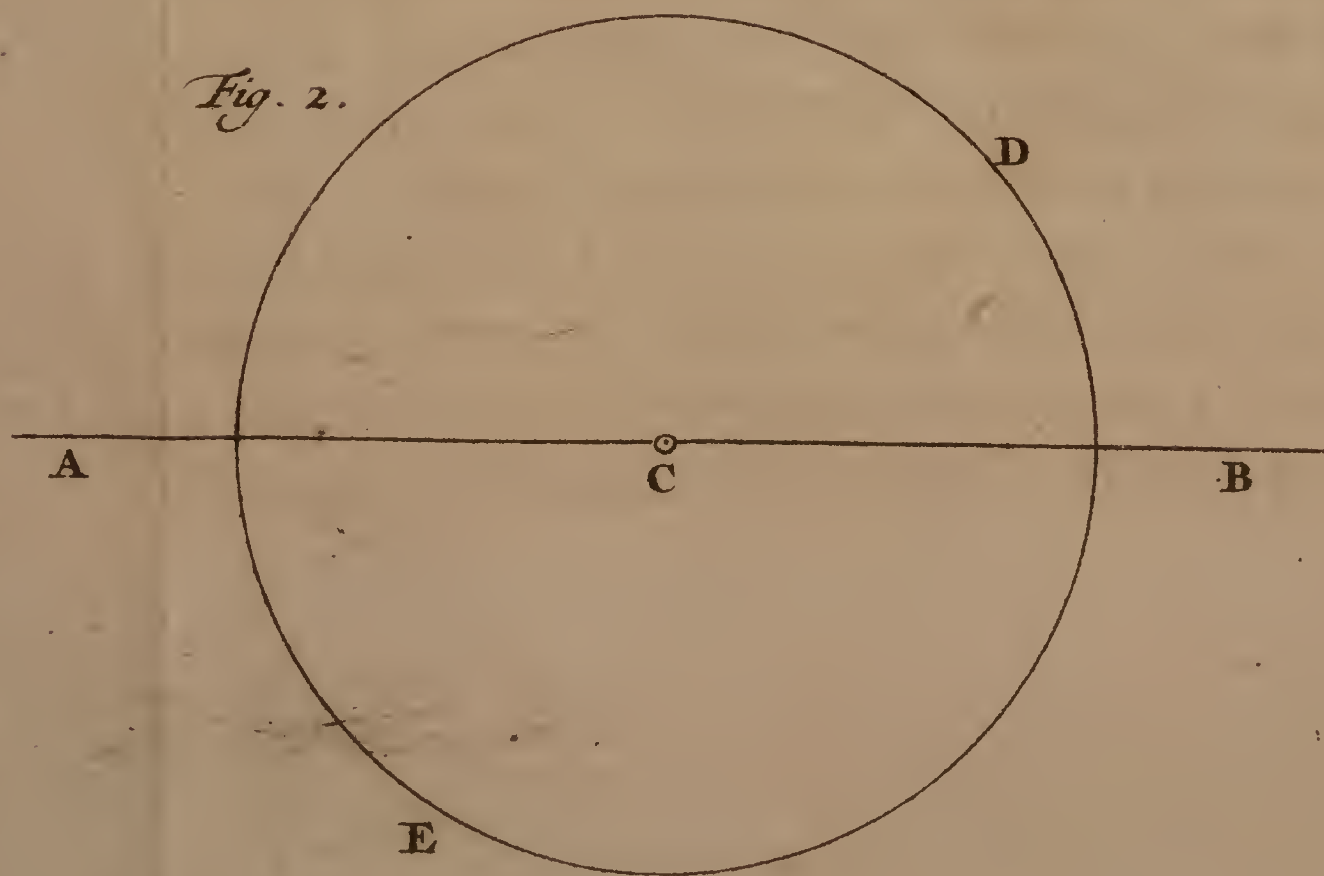
Faculas Solares incertas videri.

Neque ego faculas illas, quas unà cum maculis fere omnes celebrant, unquam videre potui, etſi has ſæpius ſpectaverim; ac valde dubito an aliquid in Sole, ipſo Sole lucidius appareat. Invenio enim, fideliores obſervationes conſulens, non niſi in nubeculis illis ſubfuſcis, quæ maculas plerumque circundant, aliquando ſolæ feruntur, puncta quædam clariora interdum notari, quæ non mirum eſſet, propter obſcuritatis illius viciniam, ſplendidiora quam ſint videri.

Propter calorem nulla illic vivere copora noſtris ſimilia.

Summum quidem in Sole calorem, fervoremque eſſe, certo credendum eſt, in quo nihil omnino noſtrorum corporum ſimile vivere poſſit, aut momento ſupereſſe. Itaque aliud genus viventium animo concipiendum eſſet, longeque ab omni natura eorum quæ unquam vidimus, aut cogitavimus, diverſum. Quod fere idem eſt ac ſi dicamus nihil hic conjectando nos conſequi poſſe. Eſt quidem tam præſtans, tantæque molis corpus haud dubiè maxima ratione, ac propter inſignem uſum aliquem creatum. Sed an non apparet jam abunde utilitas ejus in mirabili illa lucis caloriſque in totum Planetarum circumſtantium chorum effuſi-


Fig. 1.
Sol.
Sat.
Jup.
Mars
Tellus
Venus
Merc.


Fig. 2.
D
A
C
B
E

ſione; ex qua univerſo animantium generi non vita ſolum conſtat, ſed & jucunda ut ſit efficitur? Idque non in exiguis ſolum, qualis Tellus noſtra, ſed & in tanto majoribus Jovis & Saturni globis, quorum non eſt contemptibilis ad Solem collata magnitudo. Hæc quidem tanta ſunt ut nihil mirum ſit eorum gratia duntaxat Solem eſſe conditum. Nam quod Keplerus opinabatur, aliud quoque illi delegatum eſſe munus, ut nempe omnium circum ambientium Planetarum motus in ſuis orbibus incitaret, propria ſua circa axem converſione, quod in Epitome ſyſtematis Copernicei multis comprobare conatur, non poſſum aſſentiri, propter ea quæ in ſequentibus dicentur.

Stellas fixas totidem eſſe Soles.

Solem ex ſtellis inerrantibus unam eſſe, ante Teleſcopii inventionem, adverſari videbatur Copernici ſententiæ; quia cum ſtellæ, quæ dicuntur primæ magnitudinis, cenſerentur trium ſcrupulorum diametro, eſſentque ſecundum Copernicum tam procul remotæ, ut totus ille Orbis magnus, quo Terra defertur, velut puncti inſtar eſſet ad ſphæram affixarum comparatus; quandoquidem toto anni tempore, etſi locum Terra mutaret, nihil mutari cernerentur ſtellarum diſtantiæ; ſequebatur ſingulas earum, quæ cæteris clariores apparent, majores eſſe toto illo magni orbis ambitu: quod abſurdum erat. Atque hoc, ut palmarium contra Copernici doctrinam argumentum, Tycho Braheus objectabat. Sed poſtquam radios ſtellarum nudo viſu apparentes, Teleſcopia ſuſtulerunt; (quod ita optimè faciunt, ſi lens oculo proxima flammæ afflatu obſcuretur) atque ita haud aliter eas ac puncta lucentia ſpectandas præbuerunt; prorſus ſublata quoque eſt ea difficultas, nec quidquam jam impedit quo minus ſtellæ iſtæ pro totidem Solibus habeantur. Idque eo probabilius redditur, quod conſtet propria luce ſua eas lucere: tanta enim eſt diſtantia, ut à Sole illam mutuari nequaquam poſſint. Singulas vero Sole minores non eſſe nihil credi vetat, cum ex tam immenſo intervallo tam vividum lumen fundant. Hanc itaque ſententiam nunc paſſim tenent qui Copernici ſyſtema amplectuntur. Qui recte quoque hoc ſta-

Eas ſpargi per vaſta cæli

ſpatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole remoti.

ſtatuunt, non in una eademque ſuperficie hærere ſtellas iſtas; tum quod nulla ratio hoc ſuadeat, tum quod in eandem ſphæram Sol, qui earum una eſt, referri nequeat. Itaque veriùs eſſe ſpargi eas per vaſta cœli ſpatia, quantumque à Terra aut Sole ad proximas interjacet, tantum circiter ab his eſſe ad ſequentes, atque inde rurſus ad alias, continuo progreſſu.

Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur.

Scio etiam hic aliud ſentire Keplerum, in ea, quam diximus, Epitome. Quamquam enim exiſtimet tota cæli profunditate ſtellas diſſeminatas eſſe, vult tamen Solem hunc noſtrum multo amplius ſpatium circa ſe habere, quaſi ſphæram vacuam, ſupra quam confertius ſtellis cœlum incipiat. Putabat enim alioqui futurum ut paucæ tantum ſtellæ numerarentur nobis, eæque ſumma magnitudinis diverſitate: *nam cum omnium maximæ tam appareant parvæ, ut vix inſtrumentis poſſint notari aut menſurari, conſequens eſſe ut quæ duplo aut triplo &c. diſtarent longius, duplo & triplo appareant minores, poſitis æqualibus ipſis veris magnitudinibus; citoque veniatur ad eas quæ penitus fiant inſenſibiles: atque ita pauciſſimas viſum iri ſtellas, eaſque in maxima differentia;* cum contra amplius quam mille obſerventur, nec magnitudine ita multum diverſæ. Sed ex his nequaquam id quod ille intendit evincitur; ac præcipue in eo deceptus fuit, quod non advertit ignium, & flammæ eam eſſe naturam, ut ex maximis intervallis cerni poſſint, iiſque unde alia corpora, æque exiguis angulis comprehenſa, prorſus evaneſcant. Quod vel lucernæ comprobant, quæ per urbium noſtrarum vicos noctu incenduntur. Quæ cum ad centenos pedes inter ſe diſtent, tamen earum viginti & plures, in continua ſerie magis magiſque remotas, numerare licet, etſi viceſimæ flammula vix 6 ſecundorum ſcrupulorum angulo conſpiciatur. Idem vero multo magis fieri neceſſe eſt in eximia illa ſtellarum luce; adeo ut nihil mirum ſit, ad mille aut duo millia earum, oculis notari poſſe; Teleſcopiis vero adhibitis, etiam vigecuplo plures deprehendi. Sed ſuberat ratio, cur Keplerus Solem præ reliquis ſtellis præcipuum

puum quid habere cuperet; circumque eum esse unicum, in Natura, Planetarum systema, idque mundi medio situm. Hisce nimirum opus habebat ad confirmandum mysterium Cosmographicum suum, quo certis quibusdam proportionibus respondere volebat Planetarum à Sole distantias diametris sphærarum, quæ corporibus polyedris Euclideis inscribuntur & circunscribuntur singulis. Quod tum demum verisimile videri poterat, si in mundo universo unus tantum esset circa Solem aberrantium siderum chorus, adeoque & Sol ipse solus sui generis.

Sed mysterium illud totum, si bene perpendatur, somnium quoddam ex Pythagoræ aut Platonis Philosophia enatum esse apparet. Nec proportiones satis quadrant, ut ipse quoque auctor agnoscit; sed, cur hoc ita sit, alias causas plane frivolas comminiscitur. Idem levioribus etiam argumentis probat extremam mundi superficiem, stellas omnes continentem, sphæricæ esse figuræ; ac numerum præterea earum necessariò esse finitum, ex eo quod singularum finita sit magnitudo. Illud vero vanissimum, quod à Sole, ad superficiem cavam sphæræ fixarum, definit spatium sexies centena millia Terræ diametrorum. Quoniam scilicet, sicut Solis diameter ad diametrum Orbitæ Saturni; quos inter se esse statuit ut 1 ad 2000; ita sit hic diameter ad illum sphæræ fixarum interioris; quod nulla ratione nititur. Atque hæc quidem Viro summi ingenii, magnoque Astronomiæ instauratori excidisse mirum est. Nos vero unà cum præcipuis nostræ ætatis Philosophis, ne dubitemus eandem stellarum earum & Solis naturam existimare. Ex quo jam mundi idea multo major nascitur, quam quæ ex hactenus traditis percipiebatur. Quid enim nunc prohibet, quin unamquamque ex stellis hisce, sive Solibus, haud aliter ac Sol noster, circum se Planetas habere putemus, quæ rursus suis Lunis stipatæ sint? Imo hoc ita se habere, manifesta ecce ratio suadet. Etenim si cogitatione in cœli regionibus nos ponamus, non minus à Sole, quàm fixis stellis, remotos; nihil quicquam discriminis hasce inter atque illum tunc essemus animadversuri. Longè enim abest ut corpora Pla-

Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, esse Planetas.

netarum, Solem ambientium, conſpecturi ſimus, vel ob tenuiſſimam eorum lucem, vel quod univerſæ, quibus feruntur, orbitæ in unum idemque lucidum punctum cum Sole confunderentur. Hic igitur poſiti, meritò eandem omnium ſtellarum rationem naturamque eſſe exiſtimaremus; & ex una, propius inſpecta, de cæteris quoque judicari poſſe nihil ambigeremus. At nunc Dei benignitate, ad unam ex ipſis, Solem videlicet noſtrum, admoti ſumus, ac tam prope acceſſimus, ut circum eam ſex minores globos converti cernamus; & circa horum quoſdam, alios obire ſecundarios. Cur itaque non eo judicio nunc utamur; ac prorſus veriſimile putemus non ſolam hanc ſtellam tali comitatu cingi, aut aliqua in re cæteris præminere? Neque etiam ſolam circum axem ſuum converti; ſed potius cæteras omnes eadem hæc ſimilia habere? Ergo hac ratione etiam cuncta illa quæ in Planetis circumſolaribus ineſſe, ad Terræ noſtræ ſimilitudinem diſſeruimus, conſentaneum erit, ut ad innumeros Planetas alios, tot mille Solibus additos, æquè pertinere credamus. Eruntque & illic ſtirpes & animalia, atque etiam ratione inſtructa, quæ cœli convexa mirentur, & ſidera obſervent, motuſque eorum intelligant; atque omnia denique habeant, ſine quibus neque hæc haberi poſſe ſupra oſtendimus.

Quam mirabilis igitur quamque ſtupenda mundi amplitudo & magnificentia jam mente concipienda eſt. Tot Soles, tot Terræ, atque harum unaquæque tot herbis, arboribus, animalibus, tot maribus, montibuſque exornata. Et erit etiam unde augeatur admiratio, ſi quis ea, quæ de fixarum ſtellarum diſtantia & multitudine hiſce addimus, perpenderit.

Tantam igitur eſſe diſtantiam hanc, ut quæ Solem Terramque interjacet, Terræque diametrorum duodecim millia continet, ei comparata, exilis plane habenda ſit, non una ratione conſtat: atque hac inter cæteras, quod ſi proximæ quædam inter ſe ſtellæ notentur, quæ claritate plurimum differunt; velut in media caudæ, (quæ duplex eſt) Urſæ

ma-

majoris; nulla apparentis intervalli earum mutatio animadvertitur, quocunque anni tempore ſpectatarum; quod tamen fieri neceſſe eſſet, propter diverſas viſus poſitiones per annui Orbis ambitum, oriretúrque parallaxis aliqua ſi, ut conſentaneum eſt, propior ſit ſtella quæ lucidior apparet. Qui autem ante nos definiendi tam vaſti ſpatii rationem inierunt, nihil certi comprehendere potuerunt, propter nimiam obſervationum neceſſariarum ſubtilitatem, quæque omnem diligentiam ſuperet. Itaque mihi unica hæc via ſupereſſe viſa eſt, quam nunc inſiſtam, qua ſaltem veriſimile quid in re tam exploratu ardua conſequamur. Cum ergo ſtellæ ut jam diximus, totidem ſint Soles; ſi earum aliquam Soli æqualem eſſe ſumamus, erit illius tanto major quam Solis diſtantia, quanto apparens diameter diametro Solis minor erit. Sed tam exiguæ apparent ſtellæ, etiam quæ primæ ſunt magnitudinis, atque etiam Teleſcopio ſpectatæ, ut veluti puncta lucentia ſine viſibili latitudine refulgeant. Quo fit ut ejuſmodi obſervationibus nulla earum menſura deprehendi poſſit. Cum itaque hac non ſuccederet, tentavi qua ratione Solis diametrum ita imminuere poſſem ut non majorem lucem quam Sirius, aut aliud è clarioribus ſideribus, ad oculum mitteret. Ergo occluſi rurſus, ut ſupra, tubi duodecimpedalis vacui aperturam alteram lamella tenuiſſima, cujus medio tam exiguum effeci foramen, ut Lineæ partem duodecimam non ſuperaret, ſive pollicis centeſimam quadrageſimam quartam. Hunc tubum ea parte ad Solem obverti; altera oculo admovi; qui tunc particulam Solis cernebat, cujus diameter, ad totius diametrum, erat ut 1 ad 182. Sed eam particulam multo clariorem comperiebam, quàm noctu Sirius apparet. Itaque cum longè magis arctandum Solis diametrum viderem, id ita effeci, ut, in perforata ejuſmodi lamina, vitreum globulum objicerem minutiſſimum, pari circiter diametro ac prius illud foramen habebat; quo globulo ad microſcopia antehac uſus fueram. Ita per tubum in Solem intuenti, contecto undique capite, ne quid diei lux turbaret, non minor ejus claritas quam Sirii videbatur.

Modus probabiliter investigandi diſtantiam fixarum à Sole.

Atqui, ex Dioptrices legibus instituto calculo, fiebat jam Solis diameter $\frac{1}{152}$ ejus particulæ centesimæ octogesimæ secundæ, quam, per foramen exiguum, prius conspexeram. Ductis autem in se $\frac{1}{152}$ & $\frac{1}{182}$, fit $\frac{1}{27664}$. Ergo eousque contracto Sole, vel eousque remoto, (erit enim effectus idem) ut diameter ejus sit $\frac{1}{27664}$ ejus, quem in cœlo intuemur, supereſt illi lux quæ Sirii luci non cedat. Solis vero eousque remoti distantia erit necessario, ad eam quam nunc habet, ut 27664 ad 1: & diameter paulum excedet 4 scr. tertia. Itaque cum æqualis ei Sirius ponatur, sequitur Sirii quoque diametrum totidem esse ejusmodi scrupulorum; distantiamque itidem, ad eam qua à Sole absumus, ut 27664 ad 1. Quod quàm incredibile sit intervallum, apparebit eadem ratione, quam in æstimanda Solis distantia adhibuimus. Nam si 25. annis opus habebat tormenti bellici globus, continua velocitate, quanta exploditur, incedens, ut à Terra ad Solem perveniret; jam numerus 27664 vicies quinquies ducendus est, atque ita fiunt 691600, adeo ut penè septingenta annorum millia insumpturus sit globus, in tanta celeritate sua, priusquam ad proximas stellarum inerrantium perveniat. Atque ad has stellas serena nocte oculos circumferentes, quantum horum judicio comprehendere possumus, vix aliquot milliaribus supra verticem eas exstare putamus. Quæsivi vero de proximis tantum. Cæteræ enim cum, ut jam diximus, iis spatiis in ulteriora cœli recedant, ut non minora sint deinceps à propioribus ad sequentes, quàm à Sole ad istas, quanta immensitas supereſt! Si enim plures quàm mille, nudo visu notantur; telescopiis verò decuplo aut vigecuplo amplius; quomodo sciri potest aut definiri, quanta sit multitudo ulteriorum, quas neque hoc auxilio attingere licet: aut quis numerus nimis magnus dicendus est, si ad Dei potentiam spectemus? Etenim, sæpe hæc cogitanti mihi, in mentem venit, tantùm in primis numerorum exordiis calculos omnes nostros versari. Esse enim in serie eorum infinita, qui non tantùm viginti aut triginta, aut centum, aut mille notis scribantur in progressione nostra denaria; sed qui

qui tot characteribus constent, quot arenæ grana in tota Telluris mole continerentur. Quis verò dicere audeat tali numero non majorem esse multitudinem stellarum inerrantium? Nam longè ulterius progressi sunt, qui infinitam esse dixerunt; ut Veterum aliqui, atque etiam Jordanus Brunus; qui pluribus argumentis hoc se evicisse putat, sed, ut mihi videtur, parum firmis. Nec tamen contrarium quoque perspicuis rationibus probari posse existimo. Illud constat, spatium naturæ universæ infinitè undique protendi; at nihil obstat, quin, ultra definitam stellarum regionem, res alias innumeras Deus effecerit, à cogitationibus nostris, æque, ac sedibus, remotas.

Quid si verò nec innumeras quidem condidit, sed ultra eas vacuum reliquit infinitum; ut totum illud, quod exstare voluit, veluti nihil sit præ iis quæ producere ejus omnipotentia potuisset? Sed ulteriorem horum inquisitionem, totamque illam de infinito difficillimam disputationem persequi omitto, ne ad tot maximarum rerum comprehensionem, qua jam defuncti sumus, novus labor accedat. Ea tantùm hic subjungam, ex quibus, quænam sit nostra de toto mundi spatio opinio, cognoscatur; quatenus nempe Solibus seu stellis inerrantibus patet, quibus sua circumponi plenetaria systemata, probabile esse antea ostendimus.

Unumquemque Solem vortice cingi, sed Cartesianis multum dissimili; contra quem pluribus disputatur.

Existimo itaque unumquemque Solem circumdari vortice quodam materiæ celeriter motæ, sed qui multum dissimiles sint Cartesianis illis, tum spatii ratione, tum motus genere, quo in illis materia agitetur. Ea enim apud Cartesium est vorticum amplitudo, ut quisque eorum alios se circumsistentes contingat, occurrens singulis plana superficie, veluti cum in aqua sapone imbuta bullarum cumulos pueri inflant: moveri vero universam cujusque materiam statuit, in partem eandem, rotando. At hunc motum non parum impediri oporteret, propter angulosam vorticum superficiem. Deinde cum sit ejusmodi, ut, velut circa axem cylindri, materia tota feratur, exoritur ei postea non exigua difficultas, cum globosam Solis formam ex hoc motu deducere conatur: fru-

ſtra prorſus, atque iis rationibus, quæ incautis aliquid eſſe videantur, cum reipſa nihil explicent. Vult præterea innatare, ac circunferri cùm hac materia ætherea, Planetas; atque ea ratione videlicet in ſuis orbibus eas retineri, quòd non majore vi, quàm ipſamet, à centro motus recedere conentur. Sed hic ex Aſtronomicis complura objiciuntur, de quibus aliqua attigimus in diatriba de cauſſis gravitatis. Ubi & aliam rationem expoſuimus, quæ Planetas intra orbium ſuorum limites contineret. Ea eſt gravitas eorum Solem verſus; quæ unde exoriatur oſtendimus, quamque eo magis miror Carteſium prætermiſſe, quod de gravitate, qua corpora in Terram feruntur, primus ſolito meliora adferre cœpiſſet. Refert Plutarchus in libro ſupra memorato de Facie in orbe Lunæ, fuiſſe jam olim qui putaret ideo manere Lunam in Orbe ſuo, quod vis recedendi à Terra, ob motum circularem, inhiberetur pari vi gravitatis, qua ad Terram accedere conaretur. Idemque ævo noſtro, non de Luna tantum, ſed & Planetis cæteris ſtatuit Alphonſus Borellus; ut nempe Primariis eorum gravitas eſſet Solem verſus; Lunis vero ad Terram, Jovem, ac Saturnum, quos comitantur. Multoque diligentius ſubtiliuſque idem nuper explicuit Iſacus Neutonus, & quomodo ex his cauſis naſcantur Planetarum orbes Elliptici, quos Keplerus excogitaverat; in quorum foco altero Sol ponitur. Oportet autem, ſecundum noſtram de natura gravium ſententiam, quò Planetæ ad Solem ſuo pondere inclinent, vorticem turbinemve materiæ cœleſtis circa eum converti non totum in caſdem partes, ſed ita ut variis motibus, iiſque celerrimis in omne latus ſecundum diverſas ſui portiones rapiatur, nec tamen dilabi poſſit, propter circunſtantem ætherem, qui non tali nec tam celeri motu agitetur. Hujuſmodi vortice gravitatem corporum in Terram, ejuſque effectus omnes explicare conati ſumus, in ea, cujus memini, diatriba. Eademque, ut puto, eſt ratio gravitatis Planetarum Solem verſus; & ex his quoque tam Terræ

no-

noſtræ, quàm cæterarum, atque etiam Solis, rotunditas conſequitur; quæ in Carteſiana hypotheſi tantum habet incommodi.

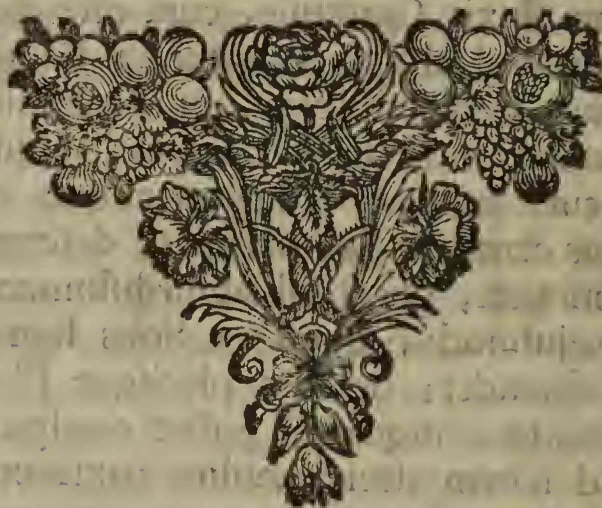
Porro & ſpatia horum vorticum, ut dixi, multo quam ille contractiora pono. Sic enim fere eos ſtatuo in vaſta cœli profunditate diſperſos, quemadmodum turbines aquæ exiguos, hinc inde in ſpatioſo lacu ſtagnove, baculi agitatione, excitatos, ac magnis intervallis totiſque ſtadiis diſtantes. Et ſicuti horum motus nequaquam ab unis ad alios perveniunt, nec proinde ſeſe mutuo impediunt; ita quoque cœleſtium vorticum motus, circum aſtra aut Soles, ſe habere exiſtimo.

Itaque neque alii alios deſtruere poſſunt aut abſorbere, quemadmodum finxit Carteſius, cum oſtendere vellet quomodo ſtella aut Sol aliquis vertatur in Planetam. Apparet autem, cum hæc ſcriberet, non attendiſſe eum ad immenſam ſtellarum inter ſe diſtantiam; idque vel ex hoc uno, quod, cum primum Cometes aliquis intra vorticem noſtrum, cujus centrum Sol occupat, deſcendit; vult eum nobis viſibilem fieri, quod eſt abſurdiſſimum. Quomodo enim, ſidus ejuſmodi, quod ex Solis lumine repercuſſo tantummodo ſplendet; ut cum pleriſque Philoſophis ipſe ſtatuit; quomodo, inquam, poſſet conſpici à tanto intervallo, quod ſaltem decies millies contineret illud quod à Terra ad Solem eſt. Non enim ignorare poterat vaſtiſſimum, circa Solem undique extenſum, ſpatium; cum ſciret in Copernici ſyſtemate orbem magnum, hoc eſt, orbitam Terræ, velut punctum eſſe cum illo comparatum. Sed tota hæc de Cometarum, atque etiam de Planetarum, & mundi origine, commentatio apud Carteſium tam levibus rationibus contexta eſt, ut ſæpe mirer tantum operæ in talibus concinnandis figmentis eum impendere potuiſſe. Mihi magnum quid conſecuti videbimur, ſi quemadmodum ſeſe habeant res, quæ in natura exiſtant, intellexerimus; à quo longiſſime etiam

nunc

nunc absumus. Quomodo autem quæque effectæ fuerint, quodque sunt, esse cœperint, id nequaquam humano ingenio excogitari, aut conjecturis attingi posse, existimo.

F I N I S.



CHRISTIANI HUGENII
OPERA
MISCELLANEA.

TOMUS QUARTUS.

Tomi quarti contenta.

DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ

AUCTORE

CHRISTIANO HUGENIO.

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.



Um in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quam latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua ado-

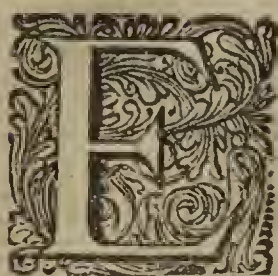
ado-

adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuêre, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire sæpenumerò expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quod prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

Tſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum èſt, calculóque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ

ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

Propositio I.

Si a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere* $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x-a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x-a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x-a \infty b$, & fit $x \infty \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut

ut vincens victo ſit traditurus *a*. Quâ ratione ſimilis expectatio mihi obtinget ad obtinendum *a*, ſi perdam, aut ad obtinendum *b*, ſi vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depoſitum eſt, alterique inde concedo *a*.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua ſors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propoſitionem valet 5; & certum eſt me 5 habentem rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille ſimiliter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri ſit daturus 3: erit hic luſus omnino juſtus, & patet mihi æquam obtingere ſortem ad obtinendum 3, ſi perdam, aut 7, ſi vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

Propoſitio II.

Si a, b, *vel* c *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt* $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rurſus inveniendum, ponatur, ut ante, *x* pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm *x* habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe juſto luſu. Ponatur luſus eſſe talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quiſque noſtrum trium deponat *x*, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, ſi ipſe victor evadat, mihi ſit daturus *b*, & ego ipſi traditurus ſim *b*, ſi idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus ſit *c*, aut ego ipſi ſim daturus *c*, ſi ego vincam. Et patet hunc ludum juſtum eſſe. Æquam autem hâc ratione ſortem habebo ad obtinendum *b*, ſi nimirum primus vincat, aut *c*, ſi ſecundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ ſi ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depoſitum eſt, de quo uni concedo *b*, & alteri *c*. Quòd ſi $3x-b-c$ æquale fuerit ipſi *a*, eadem mihi obtingeret ex-

pe-

pectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, *sit* p, *numerus autem casuum quibus mihi eveniet* b *sit* q, *sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit* $\frac{pa+pq}{p+q}$.

AD hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque x, ita ut depositum sit $px+qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p-1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p-1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p-1$ lusorum, quæ simul conficiunt $bq+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æqua-

æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PROPOSITIO IV.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut a facilioribus incipiamus.

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum pro-

ſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerum impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur a. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet. Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquam alter duos vincat.

Propositio V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſus. Oportet hîc facere diſtributionem.

ADvertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ipſe primum vinceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitum, id eſt, a; quòd ſi autem ille primum ludum vince-

ceret, deficerent ipſi duo luſus & mihi unus; ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per 1mam Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſic ut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo 4or luſus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo tres luſus.

Fiet itaque primo luſu; vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrum adhuc duo luſus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$

aut $\frac{13}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1^{mam} Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4^{tam} Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

Propositio VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2^{dam} Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.



PRO-

Propositio IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8vam. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2da Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propositionem tantundem ac

$\frac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}$, id eſt, $\frac{5}{27}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores caſus primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit priuſquam ille octavæ Propoſitionis calculo ſubductus eſſet, in quo deficientes luſus erant 1, 1, 2, ita etiam cujuſquè pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſus ſunt 1, 2, 3, quin primùm calculo ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo luſus deficientes ſunt 1, 1, 3; qui ſimiliter per 8vam Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet caſus omnes, qui in ſequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod ad teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quo-

quotâ vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones. Ad quas ſolvendas advertendum eſt.

Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactus diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam.

Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactus, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactus unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactus.

Item trium teſſerarum eſſe 216 jactus diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3^{tia} ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactus.

Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactus eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactus quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta patêre poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactus, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta; vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} ſunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{que} ſunt jactus.

Septem punctorum 6 ſunt jactus.

In tribus teſſeris reperiuntur	punctorum		jactus.
	3 vel 18	1	
	4 vel 17	3	
	5 vel 16	6	
	6 vel 15	10	
	7 vel 14	15	
	8 vel 13	21	
	9 vel 12	25	
	10 vel 11	27	

PRO-

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice ſenarium jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depoſitum eſt; quinque verò eſſe caſus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipſum, & tantùm unus pro ipſo. Quod autem depoſitum eſt vocetur a. Eſt itaque ipſi unica expectatio ad obtinendum a, ſed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipſi hunc caſum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere poſſit, qui primâ vice ſuſcipere velit.

Qui duabus vicibus ſemel ſenarium jacere certet, ſors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a. Si diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm caſus eſt, & quinque caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti luſori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo ut ſors utriuſque ſive æſtimatio expectationis eam ſervet rationem, quam 11 ad 25; id eſt minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo ſubducitur, quòd ſors ejus, qui tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipit, ſit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere poſſit; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere poſſit; id eſt, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{4651}{7776}a$, & poteſt 4651 contra 3125 deponere; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inueniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

SI quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantum eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem ratio-

tionem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent a, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

Propositio XII.

Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.

Hoc autem tantundem eſt, ac ſi quis ſcire velit, quoto jactu quiſpiam unâ teſſerâ ſuſcipere poſſit, ut bis ſenarium jaciat. Quòd ſi quis duobus jactibus ſuſciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante oſtenſa ſunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in ſe reciperet, ſi primus ejus jactus ſenarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque ſenarius eſſe deberet, id quod tantundem

dem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opùs est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

QUoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propositionem, tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x, & id quod depositum est vocari a; eritque sors alterius ∞ $a-x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse ∞ x. At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lususque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum o, & 31 casus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{31\,y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse ∞ x. Quocirca erit $\frac{31\,y}{36}$ ∞ x, adeoque y ∞ $\frac{36\,x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam

Pro-

Propositionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum sit ∞y, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

PROBLEMA II.

Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

PROBLEMA III.

A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita

ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

PROBLEMA IV.

Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

PROBLEMA V.

A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.



CHRISTIANI HUGENII
NOVUS CYCLUS
HARMONICUS.

CHRISTIANI HUGENII
NOVUS CYCLUS
HARMONICUS.

Litteræ D. Hugenii de Cyclo Harmonico.


Ovam tibi mitto de Musica observationem. Spectat hæc prima Scientiæ illius fundamenta, id est, tonorum, qui in cantu & Instrumentorum fabrica observantur, determinationem. Quicunque licet parum versati sint in parte illa Theoriæ, norunt, quid sit, quod vocatur Temperamentum, quod tonos illos moderatur & quam necessarium illud sit in harmonia tuborum Organi vel chordarum Clavecymbali.

Celebriores auctores, uti Zarlinus & Salinas, illud referunt inter inventa pulcherrima & utilissima, quæ in musicis detegi possunt; & uterque contendit se primum Temperamentum hoc ad examen revocasse, & demonstrationibus Mathematicis constituisse. Ante illos experientia & necessitas illud quidem aliquo modo jam introduxerant, licet vera mensura & methodus nondum esset cognitæ. Inventio hujus Temperamenti in causa fuit, ut merito negligerentur omnes veterum Tetrachordarum & Diapasonorum divisiones quarum pleræquæ absurdæ & usus nullius erant in compositione plurimarum partium: hac etiam inventione nostrum systema tonorum magis abundat consonantiis, magisque est juxta naturam cantus, quam illorum erat.

Pono notas esse proportiones, in quibus consistunt perfectæ consonantiæ, scilicet: Quintam audiri, quando, post sonum editum ex motu chordæ integræ, duæ tertiæ partes ipsius agitantur: vel proportionem, a qua consonantia hæc pendet, esse ut 3 ad 2; Quartæ proportionem esse ut 4 ad 3; Tertiæ majoris ut 5 ad 4; Tertiæ minoris ut 6 ad 5; Sextæ majoris ut 5 ad 3; Sextæ minoris ut 8 ad 5. Et quantum ad Temperamentum, iidem autores, quos modo memoravi, nos docent, ut hoc applicetur instrumentis, consonantiam Quintam minuendam esse quarta parte *Commatis* ut vocant, quæ adeo exigua est diminutio, ut auris hanc difficulter percipiat, & nullam inde capiat molestiam; cum *Comma* integrum sit ratio inter tonum integræ chordæ, & hujus tonum quando parte $\frac{1}{81}$ minuitur. Sequitur inde, Quartam auctam esse hac ipsâ exiguâ quantitate. Tertia minor pariter, est diminuta $\frac{1}{4}$ Commatis, & consequenter Sexta major in tantum aucta; sed Tertia major perfectionem servat, ut & ideo etiam Sexta minor.

Juxta has consonantiarum mensuras, disponuntur omnes instrumentorum toni, tam Diatonici quam Chromatici, quos addidere Musici, & pariter toni Enarmonici, quando & hi ut magis completa sit symphonia adjiciuntur.

Observatio autem nostra hæc est, si dividatur Octava in 31 partes æquales, quod fiet quærendo 30 medias proportionales inter totam chordam (quæ sumitur pro regula Harmonicâ) & ejus dimidium, dabitur in tonis, quos producunt longitudines hæ, Systema parum admodum ab isto quod modo memoravi ex Temperamento deductum, ita ut nemo auri quantumvis subtili præditus differentiam percipiet; quod tamen novum Systema toto cælo ab alio differet, novasque afferet utilitates tum in Theoriam cum in Praxin.

Salinas inventum hoc dividendi octavam in 31 partes æquales memorat sed ut hoc culpet, & P. Mersennus pariter post ipsum hanc rejicit divisionem, unde mihi facile fides habenda erit, me nihil ex illis autoribus mutuatum esse; sed si & hoc fecissem, satis a me præstitum crederem, si præstan-

tiam

tiam ejus divisionis ex Geometriæ principiis demonstraverim, & illam vindicaverim adversus injustum duorum illorum celebrium Scriptorum pronunciatum.

In lib. 3. Musices Salinæ integrum exstat caput de hac divisione, cujus inscriptio est, *De prava constitutione cujusdam instrumenti, quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cæptum est, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque divisus;* Dicit instrumentum hoc nominis Archicymbali donatum fuisse, illudque fuisse *incerti autoris*; Musicos quosdam admodum idoneos id magni fecisse, præcipue quia continebat omnia intervalla, omnesque consonantias (ut credebant, ait) adscendendo, & descendendo & quia post certam periodum rediebatur ad eundem sonum vel æquipollentem, cum eo a quo initium factum erat; Quia Octava divisa erat in 31 partes æquales, quas vocabant Diesas (seu tonos perfectos) quarum tonus debebat continere 5; magnus semitonus 3; parvus 2; Tertia major 10; Tertia minor 8; Quarta 13; Quinta 18; Sexta minor 21; Sexta major 23. Sed addit, cum tentassent tale disponere instrumentum hoc sonum dedisse admodum ingratum, & qui insigniter aures præsentium offendebat, unde concludit, talem divisionem deviare ab omni ratione harmonica, sive examinetur secundum mensuram justarum consonantiarum sive Temperamenti. Præter experientiam & aliud affert argumentum deductum ex Methodo in hac divisione adhibita. P. Mersennus etiam contendit se bene illam refutavisse. Erravit uterque, quia illos latebat Methodus dividendi Octavam in 31 partes æquales, quod probabiliter & ipsi inventores non potuere; requiritur enim cognitio Logarithmorum, qui nondum illorum nequidem Salinæ tempore erant inventi. Tandem novum hoc Temperamentum, quod adeo repudiant, omnium præstantissimum merito dicitur, omnia habens commoda quæ ipsi tribuebantur; præcipuæ simplicitatem quam communicat Theoriæ tonorum, & parum admodum differt ab eo, quo utuntur omnes, ut auris differentiam non percipiat uti computatione probabo.

Dico ergo primum, Quintam noſtræ diviſionis non ſuperare Quintas Temperamenti quam $\frac{1}{110}$ Commatis, quæ differentia, auditu nullo modo percipi poteſt; ſed quæ alioquin daret iſtam conſonantiam tanto magis perfectam.

Quartæ conſequenter Temperamenti ordinarii non excedunt noſtras niſi illâ $\frac{1}{110}$ commatis, & hæ tendunt etiam tanto magis ad perfectionem.

Tertiæ minores ſunt minores $\frac{3}{110}$ vel circiter $\frac{1}{37}$ Commatis quàm in temperamento, & Sextæ majores in tantum excedunt Sextas majores Temperamenti; utræque fateor recedunt à perfecta proportione; ſed videmus differentiam $\frac{1}{37}$ Commatis non eſſe ſenſibilem, nec augere ſenſibiliter $\frac{1}{4}$ Commatis, qua conſonantiæ in Temperamento aberrant à veris.

Tandem, Tertiæ majores ſuperant Tertias Temperamenti, quæ ſunt perfectæ, $\frac{4}{110}$ vel quaſi $\frac{1}{28}$ Commatis, quæ adeo exigua eſt differentia, ut niſi pro perfectis, non obſtante hoc augmento haberi queant; quid enim facit $\frac{1}{28}$ Commatis, cum $\frac{1}{4}$ adeo facile patiamur.

Deducimus ex exiguis omnibus hiſce differentiis, Organum aut Clavecymbalum conſtitutum juxta Temperamentum ordinarium, etiam diſpoſitum eſſe juxta novam diviſionem, quantum aure poterit diſcerni. Si vero quis ſibi hac in parte magis deſiderat ſatisfacere, & exactiſſime conſtituere inſtrumentum juxta 31 partes æquales Octavæ, tantum dividenda eſt monochorda juxta numeros, qui habentur in ſequenti Tabula, &, poſitâ totâ chordâ, æquiſonâ cum C Clavecymbali aut Organi, diſponere pariter alias chordas vel tubos, cum ſonis, ex memorata diviſione oriundis & qui audiuntur poſito pectine in locis notatis. Quod vero ad Archicymbalum de quo Salinas loquitur, ſpectat, dubito, an non habuerit 31 palmulas in quavis octava; ſed quoniam non poterit ſine confuſione talis abacus adhiberi præ multitudine palmularum, præſtaret meâ ſententiâ diſponere 31 chordas ſimplices pro quavis octavâ, quod poteſt fieri ſine difficultate; & conſtructis palmulis, quæ elevant ſubſilia, omnibus æqualis longitudinis, altitudinis, & latitu-

titudinis, quæ latitudo ſit ⅐ palmulæ vulgaris, deinde ſuperimponendus erit abacus mobilis, cum claviculis in inferiori parte ſingularum palmularum fixis; ſemel ita diſpoſiti hi ut chordæ, quæ in quavis octava adhibentur, ſonent, omnibus tranſpoſitionibus inſervient. Quæ ergo fient ſine labore per tonos, ſemitonos, & uſque ad quintas partes tonorum; & certum eſt, omnes tonos & conſonantias in ſingulis tranſpoſitionibus æque accuratas eſſe, quod utile & amœnum erit. Olim Pariſiis conſtrui curavi, tales abacos mobiles ſuperimponendos abacis vulgaribus Clavecymbalorum tranſpoſitionibus plurimis, licet non omnibus completis, inſervientes; quod inventum approbarunt & imitati ſunt periti in muſicis varii.

Sed ut quis certus ſit de veritate illorum, quæ ſuperius dixi, inſpiciat Tabulam ſequentem cujus contenta ut & uſum explicabo.



Divisio Octavæ in partes 31. æquales.				*Divisio Octavæ secundum Temperamentum vulgare.*	
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N 97106450					
4,6989700043	50000	Ut^{2}	C^{2}	50000	4,6989700043
4,7086806493	51131				
4,7183912943	52278				
4,7281019393	53469	Si	B^{x}	53499	4,7283474859
4,7378125843	54678				
4,7475232293	55914	Sa	B	55902	4,7474250108
4,7572338743	57179	*	*	57243	4,7577249674
4,7669445193	58471				
4,7766551643	59794	La	A	59814	4,7768024924
4,7863658093	61146				
4,7960764543	62528	*	*	62500	4,7958800173
4,8057870993	63942	Sol^{x}	G^{x}	64000	4,8061799740
4,8154977443	65388				
4,8252083893	66866	Sol	G	66874	4,8252574989
4,8349190343	68378				
4,8446296793	69924				
4,8543403243	71506	Fa^{x}	F^{x}	71554	4,8546349804
4,8640509693	73122				
4,8737616143	74776	Fa	F	74767	4,8737125054
4,8834722593	76467				
4,8931829043	78196				
4,9028935493	79964	Mi	E	80000	4,9030899870
4,9126041943	81772				
4,9223148393	83621	Ma	E^{b}	83592	4,9221675119
4,9320254843	85512	*	*	85599	4,9324674685
4,9417361293	87445				
4,9514467743	89422	Re	D	89443	4,9515449935
4,9611574193	91444				
4,9708680643	93512	*	*	93459	4,9706225184
4,9805787093	95627	Ut^{x}	C^{x}	95702	4,9809224750
4,9902893543	97789				
4,9999999993	100000	Ut	C	100000	5,0000000000

Tabulæ Explicatio.

Secunda columna continet numeros qui exprimunt longitudines Chordarum; quibus habentur 31 intervalla æqualia secundum novam divisionem; Chorda tota continet partes 100000 & 50000 ejus dimidium dant Octavam.

A latere in 3ª. columna sunt syllabæ, quæ nobis in cantu inserviunt, & * pro quibusdam chordis enarmonicis, quarum prope sol* est maxime necessaria.

In 4ª. columna sunt litteræ quæ ordinario inserviunt ad designandos tonos.

Numeri 2æ. columnæ ope numerorum col. 1æ. detecti fuere, hi sunt illorum logarithmi respectivi; ad quos habendos divisi logarithmum numeri 2. qui est 0, 30102999566 per 31. unde venit numerus N. 97106450, quem addidi continuo Logarithmo num. 50000, qui est 4. 6989700043. & hisce additionibus detegimus omnes Logarithmos hujus columnæ usque ad maximum 4, 9999999993, qui parum deficiens a 5, 0000000000, (in cujus locum substitui potest) demonstrat bene subductum calculum. Qui Logarithmos intelligunt norunt ita ineundam computationem, si quærantur 30 numeri proportionales inter 100000 & 50000.

5a. columna continet in numeris longitudines chordarum juxta Temperamentum ordinarium, & in 6ª. columna sunt eorum numerorum Logarithmi.

Possem explicare quomodo eos supputaverim, & pariter, quomodo id Temperamentum posset detegi, si nondum esset repertum; sed id foret nimis longum, & sufficiet, demonstrare methodum examinandi, & numerorum ἀκρίβειαν, & omnia quæ dixi de nova divisione & de ratione quam habet cum Temperamento.

Ponamus, determinandum esse, an Quinta *Ut, Sol,* temperamenti vulgaris, minor sit ¼ Commatis, quam vera Quinta, cujus ratio est trium ad duo. A log. *Ut,* qui est 5, 0000000000 substraho log. *Sol* qui est 4, 8252574989, id, quod restat

Q,

0, 1747425011, exhibet quantitatem Quintæ Temperamenti.

Pariter differentia Logarithmorum 3 & 2 quæ in tabulis Logarithmorum habetur 1760912594, exhibet quantitatem Quintæ perfectæ; hinc substraho Quintam Temperamenti inventi & restat 13487583; id quod debet dare Log. $\frac{1}{4}$ Commatis; & hoc verum est; nam log. Commatis toni id est differentia logar. 81 & 80 est 53950319, cujus Quarta pars est 13487580. Si velimus examinare an Quævis Quinta novæ divisionis ut *Re*, *La*, differat a vera $\frac{1}{4}$ minus $\frac{1}{110}$ Commatis; debemus a Log. *Re*, qui est 4,9514467743, substrahere Log. *La*, qui est 4,7766551643, restat 1747916100, quem substraho a Logarithmo veræ Quintæ qui erat 1760912594, restat 12996494, qui minor est Log. Quartæ partis Commatis, scilicet 13487580; a quo igitur eum subtraho & restat 491086: Debemus nunc videre, quam partem Commatis hoc faciat; idcirco divido Log. Commatis, scilicet 53950319 per 491086, quotiens est fere $\frac{1}{110}$. Ita ut pateat, nostram Quintam non superari $\frac{1}{4}$ Commatis a Quinta perfecta; sed $\frac{1}{110}$ Commatis deesse. Eodem modo potest examinari quidquid spectat Temperamentum; nihil enim in computationibus Musicis instituendis Logarithmorum usui anteponendum.

F I N I S.



CHRISTIANI HUGENII

VARIA

DE

OPTICA.

CHRISTIANI HUGENII VARIA DE OPTICA.

I.

Excerpta ex literis Dni Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conspicillo Dni Newtoni.



T desideras tibi sententiam meam exponam de Telescopio Dni Newtoni. Licet nondum viderim hujus inventi effectum, illud me posse asserere persuasum habeo, pulcrum & ingeniosum esse, prosperumque eventum sortiturum; si modo ad specula cava formanda detegi queat, de quo minime desperandum puto, materia quæ poliri possit, ut vivide radios reflectat, ut vitrum. Commoda hujus conspicilli præ illis, in quibus vitra tantum adhibentur, sunt, primo quod speculum cavum, licet Sphæricum, multo melius colligat radios parallelos in unum punctum, quam nostra vitra Sphærica, uti Geometrice potest demonstrari. Unde sequitur duorum conspicillorum ejusdem longitudinis, quorum unum erit novæ illius inventionis, alterum ordinario vitro objectivo instructum, primum, magnam habens aperturam, majori copia collecturum radios ab objectis procedentes, licet parvum speculum quosdam intercipiat,

cipiat, ideoque magis poterit amplificare objecta, quam alterum. Adeo ut Telescopium novum dimidiæ aut tertiæ partis longitudinis conspicilli ordinarii, aut forte etiam minus, æqualem effectum cum hoc præstabit.

Secunda utilitas est, hoc invento vitari incommodum, quod a vitris objectivis separari nequit, mutua nempe duarum superficierum ad se inclinatio. Nam licet hæc parva sit, tamen obest radiis, qui vitra ad latera transeunt & magis oberit, si vellemus uti vitris hyperbolicis vel ellipticis quibus majores concedendæ forent aperturæ.

Tertiam utilitatem censeo, reflexione Speculi metallici non perire tot radios quot in vitris, quæ in utraque superficie reflectunt notabilem radiorum quantitatem & multos intercipiunt obscuritate suæ materiæ.

Cum præterea difficulter admodum vitrum detegatur quod longioribus conspicillis inserviri queat, quia sæpe non ubique homogeneum est, quartum novi Telescopii commodum erit, in metallo nil præter superficiei perfectionem requiri.

Qui viderunt conspicillum D^ni^ Newtoni, observarunt, illud aliquâ difficultate dirigi ad objecta; sed huic malo occurri potest satis facile, jungendo huic conspicillo alterum exacte parallelum, per quod primùm quæretur objectum. Desiderabitur fateor alter observator, si conspicillum catoptricum sit magnum, quoniam ille, qui observat, in illa observat extremitate, quæ maxime elevata est. Sed ad incommodum hoc non attendendum est, si spectetur utilitas inventi: Si loco speculorum Sphæricorum possent obtineri parabolica exacte formata & polita, conspicilla hæc effectum præstarent quod de vitris ellipticis vel hyperbolicis speravimus; credo autem id in speculis facilius obtineri posse.

CON-

II.
CONSTRUCTIO PROBLEMATIS OPTICI.
Propositio 39 Libri v. Alhazeni, & 22 lib. vi. Vitellionis.

Puncta B, C, & circulus EK, cujus centrum est A, data sunt in eodem plano; inveniendum est punctum K in peripheria circuli, ita ut lineæ BK, CK faciant cum linea AK angulos inter se æquales. TAB. LVI. fig. 1.

Ductis AB, AC; fiat AC, AF :: AF, AQ; & AB, AE :: AE, AP: sint etiam AP, & AQ, bifariam divisæ in R & S; in angulo BAC sint perfecta parallelogramma PAQH & ARZS. In RZ producta sumantur ZY & ZX, utraque æqualis lineæ quæ potest differentiam inter quadrata QS & ZS: fiat XV æqualis XY & parallela AB; & lateribus XV & XY describatur hyperbola, quæ transibit per puncta Q & H, uti patet per constructionem; hyperbola hæc QXH occurret circulo in puncto K; quod quæritur.

Ductis KO & KI parallelis AC & AB, quarum KI occurrit YX in puncto D. Ob hyperbolam rectangulum YDX æquale est quadrato KD ordinatæ, vel quadrato OR; & rectangulum YTX æquale est quadrato HT, vel quadrato PR; & demto a rectangulo YTX, rectangulum YDX & a quadrato PR, quadratum OR, supererit rectangulum RDT vel AIQ, quod æquale erit rectangulo AOP. PO ergo est ad AI, vel OK ipsi æqualem, ut QI ad AO, vel IK; & ductis lineis KP, KQ triangula KOP, KIQ erunt similia & ideo æquiangula; idcirco anguli APK, AQK, qui iidem sunt, vel supplementa angulorum æqualium OPK, IQK erunt inter se æquales; sed per constructionem AB, AE vel AK, :: AK vel AE, AP; ideo duo triangula BAK, KAP sunt similia, & ob eandem causam duo triangula CAK, KAQ, sunt etiam similia; ideo angulus BKA est æqualis angulo APK, & an-

angulus CKA æqualis ang. AQK, ſed demonſtravimus angulos APK & AQK eſſe æquales, ergo anguli BKA, CKA erunt inter ſe æquales Q. E. D.

Si punctum H cadat in circumferentiam circuli punctum H erit punctum K, quod quæritur & lineæ HP, KP, KO in unicam HP coaleſcunt; & ſimiliter lineæ HQ, KQ, KI in unam HQ, & quæ ſuperius demonſtrata ſunt & hic locum habent, in quo caſu Hyperbolâ non indigemus.

III.

ALITER.

Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.

TAB. LVI. fig. 2. ESto ſpeculum ex ſphæra quæ Centrum habeat A punctum; oculus vero ſit in B, & punctum viſibile in C, Planumque ductum per A, B, C, faciat in ſphæra Circulum D*d*, in quo invenienda ſint Reflexionis Puncta. Per tria Puncta A, B, C, deſcribatur Circuli Circumferentia, cujus ſit Centrum Z; occurrat autem ei producta AE, Perpend. BC, in R; & ſit duabus RA, OA, tertia Proportionalis NA; eritque NM, Parallela BC, altera Aſymptoton. Rurſus ſint Proportionales EA, $\frac{1}{2}$ AO, AI, & ſumma IY æquali IN, ducatur YM Parallela AZ; eaque erit altera Aſymptotos. Denique ſumptis IX, IS, quæ ſingulæ poſſint dimidium quadratum AO, una cum quadrato AI; erunt Puncta X & S in Hyperbola, aut ſectionibus oppoſitis D*d*, ad inventas Aſymptotos deſcribendis, quarum interſectiones cum Circumferentia DO, oſtendent Puncta Reflexionis quæſita. Conſtructio hæc, in omni Caſu, quo Problema ſolidum eſt, locum habet, præterquam in uno, ubi non Hyperbola ſed Parabola deſcribenda eſt; cum nimirum Circumferentia per Puncta A, B, C, deſcripta, tangit Rectam AE.

COM-

IV.

COMPENDIUM.

DUctâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque bisecta in V, punctum hoc est illud, per quod transire debet una Hyperbolarum Oppositarum, quarum Asymptoti inventæ fuerunt YM, MN. TAB. LVI. fig. 3.

Sed en Tibi bonam illam Constructionem, quæ in omnibus Casibus obtinet. Sit Circulus datus ED, cujus Centrum est A; Puncta data, B & C. TAB. LVI. fig. 4.

Ductis Lineis AB, AC, fiant Proportionales BA (Radius Circuli) & FA: Eodem modo CA, (Radius Circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque bisecetur in H; & per hoc punctum ducantur Lineæ LHK, MHN, se invicem intersecantes ad Angulos Rectos, quarumque LHK sit Parallela ei quæ bisecat Angulum BAC. Hæ sunt duæ Asymptoti Hyperbolarum describendarum per puncta F & G, & quarum una transibit etiam per Centrum A, quarum Intersectiones cum Circuli Peripheria notabunt puncta Reflexionis quæsita.

V.

ALIA SOLUTIO.

Problema Alhazeni.] *Dato Circulo, cujus Centrum A, Radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* TAB. LVI. fig. 5.

Ponatur Inventum, ductaque AM recta, quæ bifariam secet Augulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpendicularis sit HE; rectisque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit

Sit jam $AM = a$
$MB = b$
$AL = c$
$LC = n$
Radius $AD = d$
$AF = x$
$FH = y$

Quia ergo æquales Anguli KHE & CHZ, sive EHG; estque EHA angulus rectus; erit ut KE ad EG, ita KA ad AG. Quia verò BM ad MK, ut HF ad FK, erit,

ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK, i.e. $b + y : y :: a - x : \frac{ay - xy}{b + y}$. add. $FA = x$ fit $KA = \frac{ay + bx}{b + y}$.

Rursus, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL − HF ad HF, ut LF ad FG, $n - y : y :: c - x : \frac{cy - xy}{n - y}$, quâ ablatâ ab $AF = x$, fit $GA = \frac{nx - cy}{n - y}$. Est autem $EA = \frac{dd}{x}$, quia Proportionales FA, AH, AE: Ergo EA − GA, hoc est, EG, $= \frac{dd}{x} - \frac{nx + cy}{n - y}$. Et KA − EA, hoc est, $KE = \frac{ay + bx}{b + y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quod KE ad EG, ut KA ad AG; i.e. $\frac{ay + bx}{b + y} - \frac{dd}{x} : \frac{dd}{x} - \frac{nx + cy}{n - y} :: \frac{ay + bx}{b + y} : \frac{nx - cy}{n - y}$.

Unde invenitur

$$2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy = + naddy + bddx$$
$$- 2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \quad - addyy - bddxy$$

Est autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, quia $xx = dd - yy$.

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcyx}{a} - 2acxyy$ $+ ddcyy = - addyy - bddxy$:

Et

Et divisis omnibus per y & ductis in a

$$-2bbcxy - ddbcx - 2aacxy + ddcay = -aaddy - bddax$$
$$abddx - cbddx + acddy + aaddy = 2aacxy + 2bbcxy$$
$$\frac{abddx - cbddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy,$$ quæ æquatio

est ad Hyperbolam.

Vel quia $bc = na$, $\frac{abddx - anddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy$.

Sit $\frac{add}{aa+bb} = p$; Ergo $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c} = xy$.

Unde porrò non difficulter invenitur sequens Constructio: jungantur BA, AC, & applicato seorsim ad utramque Quadrato Radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncto PQ, dividatur ipsa bifariam in R, & per punctum R ducantur RD, RN, sese ad Rectos Angulos secantes, quorumque RD, sit parallela AM, quae dividet bifariam Angulum BAC. Erunt jam RD, RN Asymptoti oppositarum Hyperbolarum, quarum altera per Centrum A transire debet, quæque secabunt Circumferentiam in punctis H quæsitis. Transibunt autem Hyperbolæ per Puncta P, Q. TAB. LVI. fig. 6.

Ratio Constructionis apparet, ductis Pγ, & Qζ, perpendicularibus in AM. Fit enim Aγ = $\frac{add}{aa+bb}$ sive p; & Aζ = $\frac{ap}{c}$. Item Pγ = $\frac{pn}{c}$, & Qζ = $\frac{pb}{c}$. Quare AO = $\frac{pc+pa}{2c}$, & OR = $\frac{pb-pn}{2c}$. Unde Cætera facilia.

---

pag. præced. lin. pen. lege $-2acxyy$
lin ult. lege $-addyy-bddxy$:

VI.

Excerpta ex litteris Dni. Hugenii Acad. Reg. ſcient. Socii, ad auctorem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato.

MIcroſcopium hoc ex unico formatur exiguo globulo vitreo, ſimili illis, quibus in Hollandia & Anglia animalcula fuere obſervata in aqua puteali & pluvia, ut & illa in qua piper fuit maceratum, de quibus egiſti in 9. & 11. diario hujus anni (1678); ſed globuli de quibus nunc ago aliis hiſce minores ſunt.

Inter ipſos quos ex Hollandia attuli quidam magnitudine non ſuperant arenæ granulum; alii adeo exigui ſunt ut vix videri queant, quare objecta in immenſum amplificant; eo enim hæc majora apparent quo globuli ſunt minores.

Objectum obſervandum inter vitri laminam & lapidis ſpecularis lamellam includitur; hæc machinæ adaptantur quæ mihi aliis huc uſque uſitatis magis commoda videtur. Exigua guttula æquæ, in qua per duos aut tres dies piper fuit maceratum, ita incluſa, magna videtur natantibus piſciculis bene repleta piſcina.

Quæ pecularia circa aquam hanc obſervavi, ne quæ in diario veſtro ſunt relata iterum memorem, hæc ſunt; ex omni pipere non eadem generantur animalcula; piper quoddam animalcula ceteris majora format, ſive hoc a piperis vetuſtate pendeat, ſive ab alia cauſa, quæ in ſequentibus detegi poterit.

Similia animalcula ex aliis ſeminibus ut ex ſemine coriandri etiam producuntur.

Hoc idem obſervavi in ſucco Betulæ, ubi per quinque aut ſex dies hunc ſervaveram.

Quidam animalcula viderunt in aqua in qua nux aromatica, aut caſia, maceratæ fuere: & probabile admodum eſt in multis aliis rebus ſimilia detegi poſſe.

Quis

Quis forte defendet animalcula haec corruptione, aut fermentatione, generari; ſed alia dantur quorum origo ab hac diverſa eſt, talia ſunt quæ in animalium ſemine deteguntur, quæ cum hoc ipſo nata videntur, & tanta copia obſervantur ut totum ſemen quaſi ex hiſce conſtet.

Translucida omnia ſunt, celerrime moventur, & ranis, antequam horum pedes formentur, ſimilia ſunt.

Hæc animalcula in Hollandia primum fuere obſervata, & horum inventio admodum mihi utilis videtur, & quæ opus ſuppeditabit illis qui in animalium geneſin inquirunt.

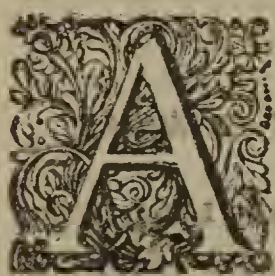
F I N I S.



CHRISTIANI HUGENII
EXPERIMENTA
PHYSICA.

CHRISTIANI HUGENII EXPERIMENTA PHYSICA.

Excerpta ex literis Dni Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ.



ANtequam tibi communicarem quæ obſervavi de ſuſpenſione aquæ in vacuo, altera vice experimenta inſtituere volui, ut de obſervationibus olim a me factis certus eſſem, & ut melius penetrare poſſem in cauſas miri adeo effectus. Primum tibi ipſas referam obſervationes, & dein pergam ad conjecturas de ipſarum cauſa.

Experimenta quæ illuſtris Boyleus anno 1661 publicavit, cum deſcriptione machinæ Pneumaticæ mihi ab eo tempore dederunt occaſionem examinandi hanc materiam; Unum ex experimentis illius eſt, ſi tubo vitreo, 4 pedes longo, aqua repleto, cujus extremitas aperta, everſo tubo, immergitur aqua vitro contento, ſuperimponas recipiens vel vas, unde aër educitur, poſt exhauſtum aërem, quantum ope machinæ fieri poteſt, aqua tubi deſcendet in vitrum, donec ad altitudinem unius tantum pedis ſuſtineatur, ſuperiore tubi parte aquâ & aëre manente vacuâ. Cenſet optime, aquam ad illam altitudinem unius pedis ſupra ſuperficiem aquæ in vitro hæ-

hærere propter aërem in recipiente superstitem, & qui ope machinæ, non satis exactæ, annihilari non potuit.

Similem construi machinam curaveram; & licet nondum mutaveram quæ in sequentibus correxi, ita tamen omnia adaptaveram, ut instituto experimento memorato aqua in tubo ad libellam aquæ in vitro descenderit; Quare in instituendo experimento non tubo longitudinis memoratæ indigebam. Adhibui tubum novem pollicum cum globo cavo in extremitate ut patet in hac figurâ.

TAB. LVI. fig. 7.

Concipiendum est vitrum CC in totum aquâ repleri, extremitatemque apertam immergi aquâ in vitro D; utrumque obtegitur vase B, cujus os apertum applicatur molli cuidam cimento, quo lamina AA induitur; hæc perforata est in medio parvo foramine, per quod exit aër, quando agitatur antlia; si adhibita aqua frigida experimentum instituatur in totum vas C evacuatur, donec aqua ad libellam aquæ in vitro D descendat.

EXPERIMENTUM I.

Aqua, sublatâ aëris pressione, hæret in tubo.

SEd ad finem mensis Decembris ejusdem anni 1661 cum reliquissem aquam illam in vacuo per 24 horas, (quo plane purgatur bullis aëris quas ejicit, quando adhibetur frigida) cumque implevissem vas C, admiratus vidi, licet optime eduxerim aërem ex vase B, aquam nullatenus descendere ex vase, quod plenum remanebat. Non poteram suspicari ullum in machinâ meâ vitium dari, nec vas B non bene fuisse obturatum; sed ut quidquid rei esset expiscarer, detraxi phialam C ex vase, & postquam in hac admisi parvam bullulam aëris, reposui phialam ut ante; & agitatâ machinâ, vidi tandem omnem aquam descendisse prope ad libellam illius quæ erat in vitro D. Id mihi persuasit, non dari vitium in machinâ & aquam aëre purgatam manere suspensam; licet vas B fuerit plane aëre vacuum vel ad minimum ita, uti erat quando aqua non-

nondum aëre purgata descendebat ex Phialâ; altera vice ut aqua descenderet, effeci immissâ in collum Phialæ bullâ adeo parvâ, ut ægre videri posset.

EXPERIMENTUM II.

Notabile quid in descensu aquæ aëre purgatæ.

SEd alio tempore mihi quid valde memorabile contigit. Cum non immisissem bullam aëream, post exhaustum aërem bullam formari observavi in inferiori parte colli Phialæ; Hæc bulla, continuo magis magisque aucta, ubi ad magnitudinem parvi pili pervenit, reliquit vitrum & incepit adscendere in collo Phialæ, ubi autem pervenit ad altitudinem unius pollicis supra superficiem aquæ in vitro D, non ulterius adscendit, sed subito sese expandit superiora versus & unico momento occupavit totam Phialam, ex qua eodem tempore aqua descendit per parvum id spatium, quod reliquum erat inter interiorem colli superficiem & bullam, quæ extensa erat, omnisque remansit infra illam altitudinem unius pollicis, ad quam bulla cæpit sese expandere. Omnia hæc porro mihi contigerunt instituenti experimenta cum tubis duorum pedum & majoribus, ubi aqua manebat suspensa eodem modo ut in tubo 9 pollicum.

Communicavi hæc experimenta cum societate regia Anglicana, sed noluere statim illis fidem dare, mihi autem indicarunt verisimiliter aquam Phialæ non descendisse, propter aërem non bene evacuatum: sed respondi, nullam dari rationem illud suspectandi si attendamus ad illud quod notavi in fine experimenti fuisse observatum; & præterea me ex experimentis frequenter repetitis de bona machinæ conditione certissimum esse. Tandem cum anno 1663 essem in Angliâ me præsente in consessu Societatis Regiæ idem experimentum eodemque cum successu institutum est, licet tubi fuerint quatuor & quinque pedum; dein in mentem venit Dno Boyle idem instituere experimentum, non adhibitâ anthâ, cum argento vivo in tubo vitreo, cujus extre-

mitas aperta immersa erat in alio argento vivo; quum primo detexisset methodum perfecte Mercurium aëre purgandi per tres vel quatuor dies. Tandem experimentum successit, & cum in experimento Torricelliano Mercurius descendat ad altitudinem 27 vel 28 pollicum supra superficiem Mercurii, in quo impositus est tubus, ita a D^no^ Boyle, & eodem etiam tempore a D^no^ Vicecomite Brounker, Præside Societatis Regiæ Anglicanæ, fuit institutum, ut primo hæreret ad altitudinem 34 pollicum, dein 52, postea 55 & tandem ad altitudinem 75 pollicum, tubo semper manente pleno, & huc usque nondum notum est, quænam sit omnium maxima altitudo possibilis. D^us^ Boyle etiam observavit, extracto tubo e Mercurio, in quo aperta ejus extremitas erat imposita, & retento tubo non clauso in aëre libero, Mercurium nihilominus non cecidisse. Porro in his experimentis, ut in illis quæ cum aquâ instituuntur, minimâ aëris bullâ in tubo, sive sponte sive concussione formatâ, subito Mercurium deprimit ad ordinariam altitudinem 27 vel 28 pollicum.

EXPERIMENTUM III.

Adhibito spiritu vini loco aquæ.

SEd ut ad experimenta nostra redeam, non solum illa iterum cum aqua institui, sed & cum Spiritu vini rectificato, & inveni, ad purgationem aëris tantum requiri, ut per unam horam in vacuo relinquatur, licet producat plus aëris quam aqua, uti ex hujus operationis circumstantiis quas referam quæque notabiles satis sunt, æstimari facillime potest. Postquam vas B proxime ope antliæ aëre evacuatum est, magnæ bullæ spiritus vini exeunt & tanta quidem copia, ut pars ejiciatur supra oram vitri D, quod pariter accidit in aquâ parumper calefactâ; sed non in illâ quæ frigida immittitur. Illæ ebullitiones continuo minuuntur, ita ut ex vini Spiritu, tantum majores aëris bullæ ad certa temporis intervalla singulatim exeant, & tandem nil omnino emergat.

In-

Interim bullæ, quæ afcenderunt in tubum C, ita dilatantur ut plane impleant globum, ut & totam colli longitudinem, ita ut omnis vini fpiritus fugatus fit, & ut pariter emittat multas magnas bullas per aperturam; quod clare indicat, effe aërem in lagena, vel aliam materiam elafticam ut aër, quandoquidem illa fugat fpiritum vini longe infra fuperficiem illius qui eft in vitro D contentus: etiam fi iterum aërem intrare finas in vas B, fpiritus vini quidem adfcendet in lagenam C, non autem plane illam replebit, fed fuperius hærebit fatis notabilis aëris bulla.

EXPERIMENTUM IV.

Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhauftus, hæc corpora iterum intrat.

SEd hic notandum, bullam illam fi ita relinquatur per fpatium unius vel duarum horarum, femper evanuiffe, & in fpiritum vini, unde emerferat, rediiffe. Expertus etiam fui, fi immittatur porro bulla veri aëris magnitudine unius pifi, etiam illam periiffe, poftquam per unam noctem relicta fuerit. Idem quoque accidit in aqua. Sed multo majus tempus requiritur, ut evanefcat bulla.

Quod attinet caufam præcipui noftri Phænomeni, fufpenfionis nempe aquæ & Mercurii, hæc eft quam mihi perfuadere potui huc ufque omnium verifimillimam.

Præter preffionem aëris, quæ fuftinet Mercurium ad altitudinem 27 pollicum in experimento Torricelliano, & quam dari ex infinitis aliis effectibus, quos videmus, conftat, concipio & aliam preffionem illâ fortiorem materiæ aëre fubtilioris, quæ haud difficulter penetrat vitrum, aquam, Mercurium, & omnia alia corpora quæ aëri impenetrabilia obfervamus. Hæc preffio addita ad aëris preffionem poteft fuftinere 75 pollices Mercurii & forte adhuc plures, quamdiu tantum agit in fuperficiem inferiorem, vel in fuperficiem Mercurii, in quem aperta tubi extremitas immer-

gitur: sed quam primum materia hæc potest agere etiam ad alteram partem (quod evenit si tubum concutiendo, vel immittendo parvam aëris bullam, occasio detur huic materiæ effectum suum inchoandi) pressio illius æqualis erit ab utraque parte, ita ut sola supersit aëris pressio quæ sustinet Mercurium ad ordinariam altitudinem 27 pollicum; Eadem de causa in experimento aquæ aëre purgatæ, post remotam pressionem aëris evacuando recipiens B, altera illa pressio ejusdem materiæ agit etiam ut antea in superficiem aquæ in vitro D, & cohibet ne aqua in Phiala C descendat. Sed ubi minima bulla aëris intrat phialam, materia quam dixi transire per vitrum & aquam, subito inflat bullam, editque pressionem æqualem illi, quæ agit in superficiem aquæ in vitro D, quare omnis aqua phialæ defluit, & ad libellam cum illa, quæ est in vitro sese constituit.

Quæret forte quispiam cur pressio ejus materiæ non agat in aquam suspensam in phiala C, & in Mercurium in tubo Dni. Boyle, etiam dum vasa hæc plena sunt, quoniam supposui, illam haud difficulter penetrare vitrum æque ac aquam & Mercurium? Et quare particulæ ejus materiæ non se jungant, & incipiant pressionem, cum continuo in aqua & Mercurio eant & redeant, & vitrum non impediat illarum communicationem cum particulis exterioribus.

Ut huic difficultati fiat satis, quæ revera maxima est, dicam, licet partes ejus materiæ, quam supposui, transitum inveniant inter illas, ex quibus vitrum aqua & Mercurius formantur, non tamen dari transitum satis latum ut plures simul transeant, neque ut se moveant vi, quæ requiritur ut dispergantur partes Mercurii vel aquæ, quæ inter se habent quendam nexum. Et ex hoc ipso nexu sequitur, (licet ad partem superficiei interioris vitri, quæ tangit aquam vel Mercurium suspensum, plures partes premantur actione particularum ejus materiæ, cum tamen plurimæ partes aquæ aut Mercurii non premantur, quæ a partibus vitri teguntur,) partes aquæ aut Mercurii sese mutuo sustinere, omnesque suspensas hærere; quia minor est pressio in superficiem aquæ vel argen-

gen-

genti vivi, quæ contingit vitrum, quam in inferiorem, quæ tota expoſita eſt actioni materiæ, a qua ſecunda pendet preſſio. Solutionem hanc fateor non mihi ita ſatisfacere, ut nullus mihi ſuperſit ſcrupulus; nihilominus tamen perſuaſum habeo novam illam dari preſſionem, præter aëris preſſionem, cum ob experimenta ſupra relata tum ob duo alia nunc referenda.

EXPERIMENTUM V.

Laminæ metallicæ arcte inter ſe cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.

QUando duæ laminæ metallicæ vel marmoreæ, quarum ſuperficies ſint perfecte planæ, ad ſe mutuo applicantur, ita cohærent, ut ſuperiore elevatâ inferior eam inſequatur, cujus effectus cauſa tribuitur merito preſſioni aëris in ſuperficies externas; duæ mihi ſunt laminæ, quarum quævis circiter eſt magnitudinis pollicis quadrati, quæ ex materiâ conflatæ ſunt, ex qua olim ſpecula formabantur, & quæ ita junguntur, ut, licet nihil interponas, ſuperior non ſolum alteram ſuſtineat, ſed interdum etiam pondus trium librarum cum inferiori conjunctum; in quo ſtatu perſeverant quamdiu deſideraveris.

Has ita junctas & oneratas tribus libris ſuſpendi in machinæ meæ recipiente, quod aëre evacuavi in tantum, ut ſuperſtes aër non preſſione ſua aquam ad altitudinem unius pollicis ſuſtineret, & nihilominus laminæ meæ ſeparatæ non ſunt.

Idem etiam inſtitui experimentum interpoſito ſpiritu vini inter laminas & inveni quod in recipiente vacuo aëre ſuſtinerent ſine ſeparatione eadem pondera, quæ ſuſtinebant recipiente aëre pleno.

Videtur id mihi manifeſte ſatis indicare magnam ſupereſſe preſſionem in recipiente, poſtquam aëre vacuus eſt, & hanc non magis quam ipſius aëris preſſionem in dubium vocari poſſe; ſed & alia ad illius confirmationem.

EXPERIMENTUM VI.

Effectus Siphonis in vacuo.

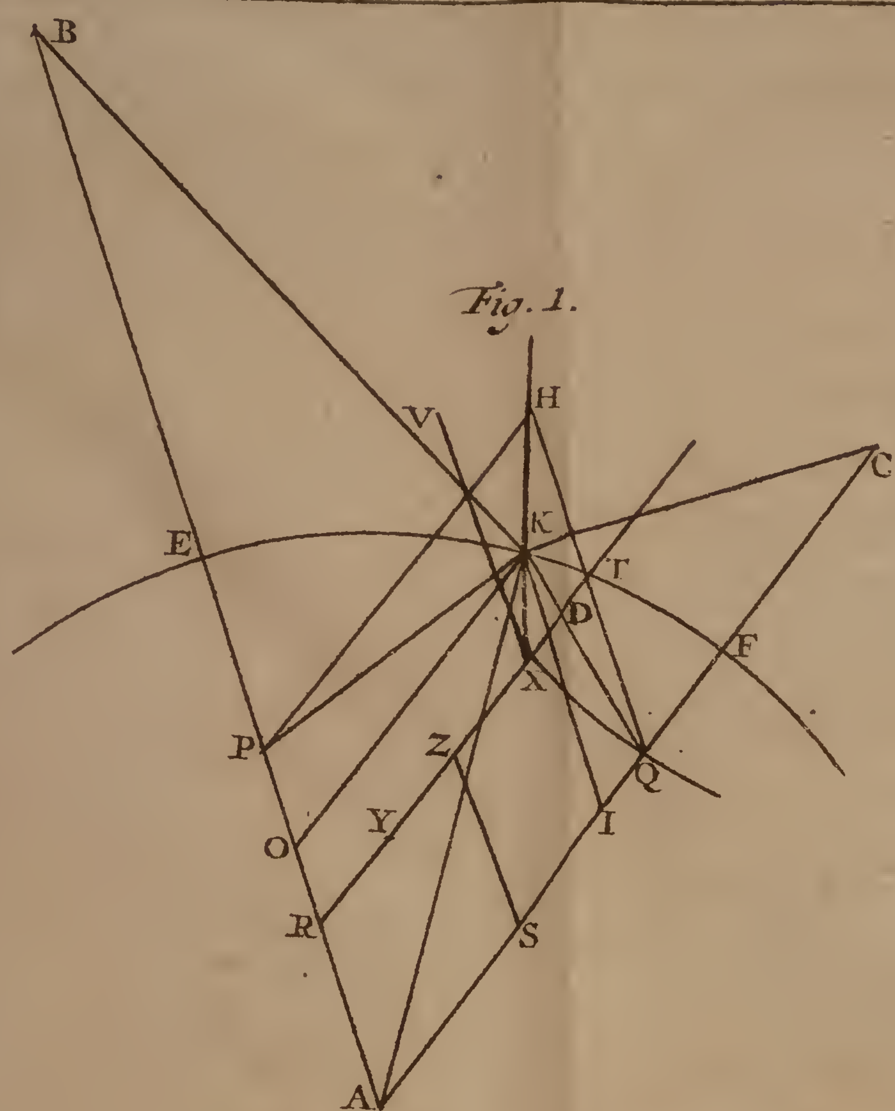
NOtum eſt, effectum ſiphonis crurum inæqualium, quo evacuatur aqua vaſis ſupra oram, non amplius tribui fugæ vacui, ſed ponderi aëris, qui premendo in ſuperficiem aquæ in vaſe, illam cogit ut in ſiphonem adſcendat, dum in alio crure illa gravitate ſuâ deſcendit. Inveni methodum qua effici, ut aqua e ſiphone fluxerit, poſtquam recipiens vacuum erat aëre; & obſervavi effectum, ſi aqua purgata fuerit aëre, eodem modo ac extra recipiens procedere.

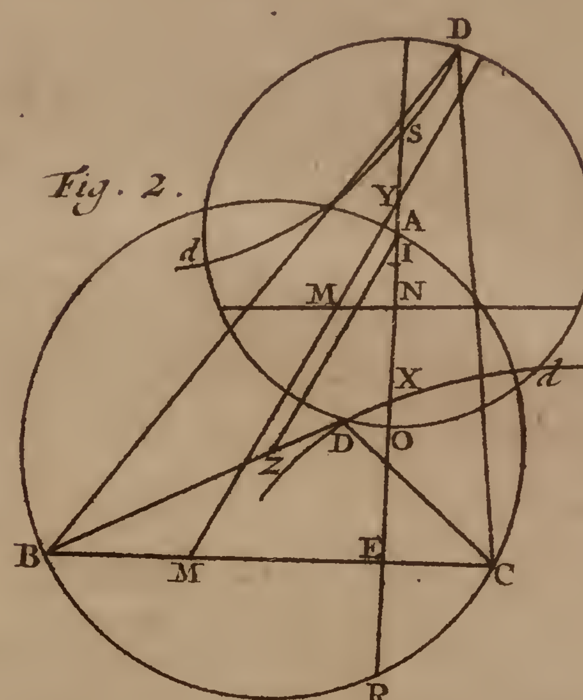
Breviſſimum ſiphonis crus erat octo pollicum & apertura duarum linearum. Nec dubitari debet quin recipiens aëre bene vacuum fuerit; nam id poſſum affirmare, tum quoniam nullum antliâ aërem ulterius extrahere potui, tum ob alia ſigna certiora.

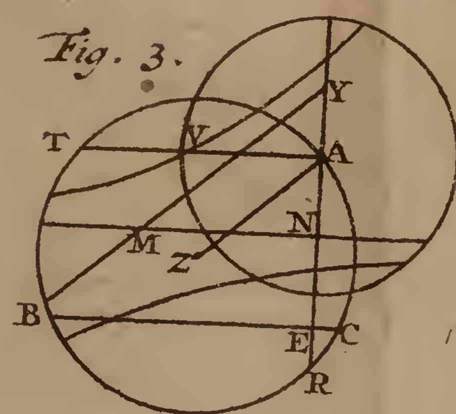
Magis ergo confirmatur noſtra hypotheſis materiam dari prementem aëre ſubtiliorem. Si quis laborem in ſe ſuſcipere vellet quærendi, quanta ſit vis hujus preſſionis quod melius fieri non poteſt niſi proſequendo experimenta cum tubis Mercurio plenis longioribus, quam quibus uſus eſt Dnus Boyle, inveniet forte, vim illam ſatis validam eſſe ad efficiendam unionem partium vitri & aliorum corporum, quæ nimis arcte cohærent, quam ut juncta tantum forent per contiguitatem & quietem uti voluit Carteſius.

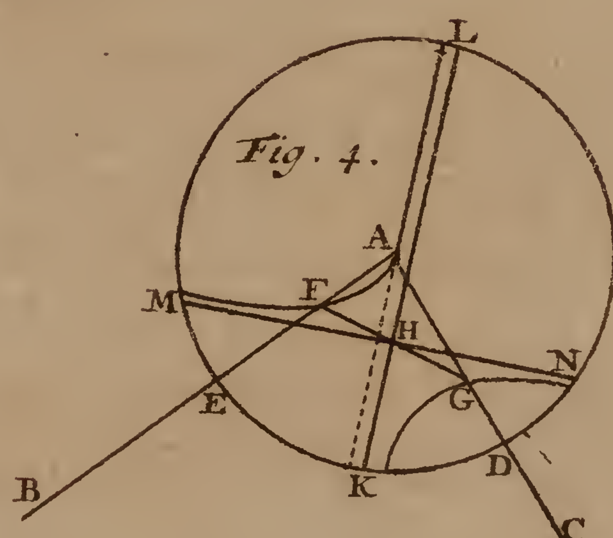
F I N I S.

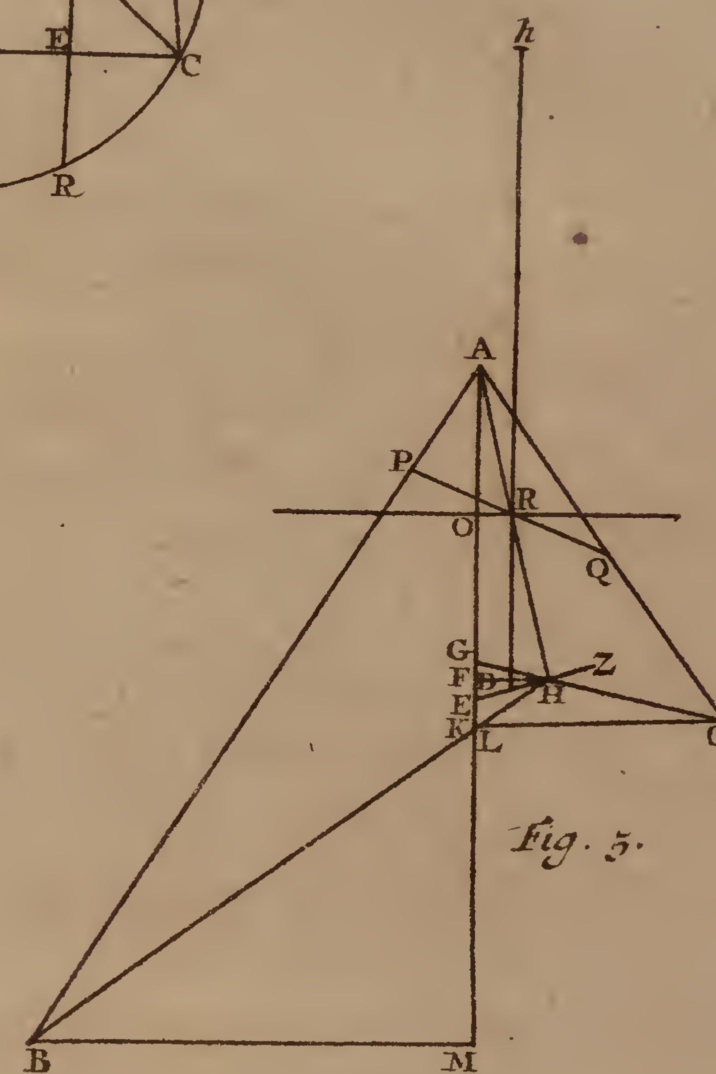
I N-

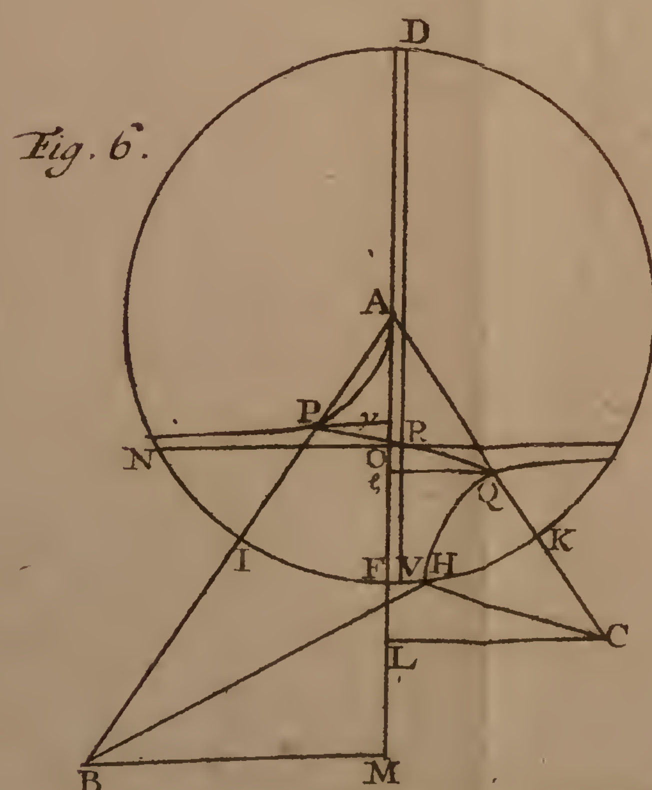

Fig. 1.
B
H
V
C
K
E
Γ
D
F
X
P
Z
Q
O
Y
I
R
S
A

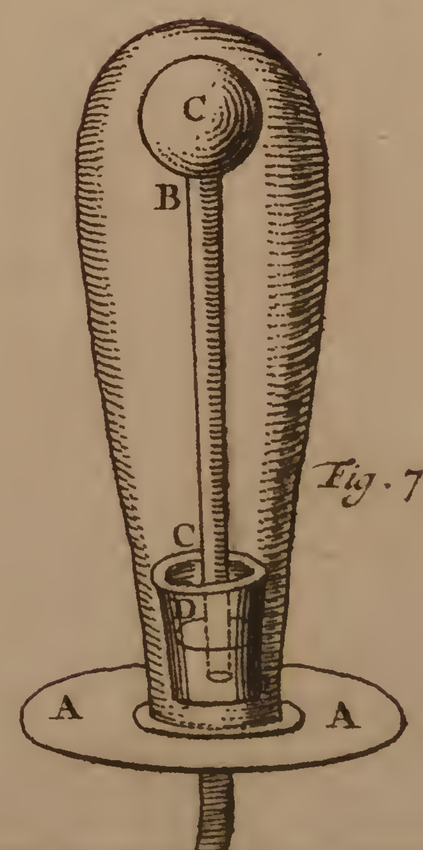

D
Fig. 2.
S
Y
A
I
d
M
N
X
d
z
D
O
B
M
E
C
R


Fig. 3.
Y
T
V
A
M
N
Z
B
E
C
R


L
Fig. 4.
A
M
F
H
N
G
E
D
B
K
C


h
A
P
R
O
Q
G
F
E
K
H
Z
L
C
Fig. 5.
B
M


D
Fig. 6.
A
P
R
N
O
Q
I
F
V
H
K
L
C
B
M


C
B
Fig. 7.
C
D
A
A

INDEX RERUM

Quatuor Tomis contentarum.

TOMUS PRIMUS

OPERA MECHANICA.

TOMUS SECUNDUS.

OPERA GEOMETRICA.

T O-

INDEX RERUM.

TOMUS TERTIUS.

OPERA ASTRONOMICA.

Ro-

Nec

TOMUS QUARTUS

OPERA MISCELLANEA.

FINIS.



CATALOGUS
QUORUNDAM LIBRORUM,
Qui apud JANSSONIOS VAN DER AA, Bibliopolas Lugduni Batavorum, venales proſtant.

Abregé de l'Hiſtoire generale des Turcs, par Vanel, 12°. 4 *voll. avec fig.*
Admiranda rerum admirabilium Encomia, 12°.
Æſchinis Socratici Dialogi tres, per Horreum, 8°. Gr. & Lat.
Alaric ou Rome vaincuë, Poëme Heroïque, par Monſr. de Scudery 12°. *avec fig.*
AMINTAS-HERDERSPEL VAN T. TASSO, DOOR WELLEKENS, 8°.
Andry de la Generation des Vers dans le Corps de l'Homme 12°.
Annales de la Cour & de Paris, pour les Annees 1697 *&* 1698. 12°.
Annus Sacer Poëticus, ſive ſelecta de Divis Cœleſtibus Epigrammata 12°. 2 Tomis.
Antonii Jus feudale, cum additamentis Strykii, 4°.
Apologie pour leurs Sereniſſ. Majeſtés Britanniques, contre un infame Libelle intitulé le vray Portrait de Guillaume Henry de Nauſſau, nouvel Abſçalom, nouvel Herode, nouveau Cromwel, nouveau Neron, 12°.
—— *pour les Proteſtans, ou l'Auteur juſtifié pleinement leur conduite & leur ſeparation de la Communion de Rome.* 12°.
Athanaſii Opera, Gr. Lat. fol. 2 Voll.
Aurea Bulla Caroli V. Imp. de jure & ordine ſuccedendi in ducatum Mediolanenſem, &c. 4°.
Bauhuſii & Cabillavi Epigrammata, 24°.
Bellefontaine Medicine Dogmatique Mechanique, avec la Pharmacopée Rationelle, 12°. 2 voll.
BELLOSTE CHIRURGIEN D'HÔPITAL, 12°. avec fig.
Biblia Græca LXX. Interpretum, curâ L. Bos, 4°.
Bidermanni Acroamatum Academicorum Libri III. 12°.
Biſſchop Chorus Muſarum, ſive Poëmata, 8°.
Blancardi Opera Medica, Theoretica, Practica & Chirurgica, 4°.
Blegny Art de guerir les Maladies Veneriennes, 12°. 3 Tomes *avec fig.*
Boleſlavii Homo bene moriens 12°.
—— Gemmeum monile Animæ Chriſtianæ, 12°.
Bontekoe Metaphyſica, OEconomia Animalis & Geulinx Phyſica vera, 8°.
Borgeſii Enodatio Juris Naturæ, 8°.
Breſmal Circulation des Eaux ou l'Hydrographie des Minerales d'Aix & de Spa, 8°.
Bruguier Reponſe au Livre intitulé le Renverſement de la Morale de Jeſu Chriſt, par les Erreurs des Calveniſtes, 12°.

Burgundius ad Consuetudines Flandriæ aliarumque Gentium, 12°.
Camerarii Symbola ac Emblemata Ethico Politica, 8°.
Catalogus Librorum Manuscriptorum Angliæ & Hiberniæ, fol.
Cherubin Effets de la Force de la Contiguité des Corps, 12°.
Choix des bons Mots, 12°.
Claubergii Opera Omnia Philosophica, curâ Schalbruchii, 4°.
Clos de Aquis Mineralibus Galliæ & de Mixtis naturalibus, 12°.
Crebilon Oeuvres, 12°.
Defence de la Monarchie de Sicile contre les Entreprises de la Cour de Rome, 12°.
Description du Chateau de Versailles, 12°. avec fig.
DIVORCE CELESTE PAR PALLAVICIN, 12°.
Donkers Idea Febris petechialis, 8°.
Dousæ Poëmata, 8°.
EEUWIGDUURENDE LIEFDES ALMANAK, 8°.
Epistolæ Præstantium ac Eruditorum Virorum, fol. Charta Maj.
Flâvissæ Poëticæ sive Electorum Poëticorum Thesaurus Sacro-Profanus, 8°.
Fleetwood Inscriptionum Antiquarum Sylloge, 8°.
Gassendi Abregé de la Philosophie, 12°. 7 Voll.
GOBART TRACTATUS PHILOSOPHICUS DE BAROMETRO, 12°. cum fig
Guide, ou nouvelle Description d'Amsterdam, 8°.
Hartmanni Praxis Chymiatrica, 8°.
Hartsoeker Principes de Physique, 4°.
HAVERCAMP DE NUMMIS ALEXANDRI MAGNI, 4°. cum fig.
Herbinius de Cataractis in Genere, 4°. cum fig.
Heucheri novi Proventus Horti Medici Acad. Vitembergensis, 4°.
Hildani Observationes & Epistolæ Chirurgico-Medicæ, 4°. 2 Voll.
Hippocratis Aphorismi per Almeloveen, 24°.
—— Metrica paraphrasi translati ab H. v. Poot. 24°.
HISTOIRE DES INDES ORIENTALES PAR Mr. SOUCHU DE RENNEFORT, 12°.
—— *des Iles Antilles de l'Amerique* 4°. avec fig.
Homere Iliade & Odyssée, par Mad. Dacier, 12°. 6 Tomes, avec fig.
—— *Iliade Poëme avec un discours sur Homere, par Mr. de la Motte.* 12°.
Huetius de Interpretatione, 8°.
Huygens Traité de la Lumiere. 4°.
Jablonski Disquisitio de Lingua Lycaonica, 4°.
Jean danse mieux que Pierre, Pierre danse mieux que Jean. 12°. 5 Voll.
Instruction pour reunir les Eglises pretendues Reformees a l'Eglise Romaine, par Mr. Comiere. 12°.
Jurieu Justification de la Morale des Reformez, contre les Accusations de Mr. Arnaud, 8° 2 Tomes.
Jus Austriacum in successione Regnorum Hispaniæ vindicatum, 4°.
Knib-

Knibbe Manuductio ad Oratoriam Sacram, 8°. 2 Voll.
Lamy Elemens de Mathematique, ou traité de la Grandeur en General, 12°.
Leti Critique Historique, Politique, Morale, Economique & Comique, sur les Loteries Anciennes & Modernes, &c. 12°.
Letres Provinciales par Louis Montalte 8°. 3 Voll.
—— *de Fr. Rabelais, avec des Observations*, 8°.
—— *du Cardinal Bentivoglio, Ital. franc.* 12°.
Lipenii Bibliotheca Juridica, Struvii, fol.
Logique par Mrs. de Port Rojal., 12°.
—— *courte & facile par le Sr. Du Boisverd.* 8°.
LYK-PREDIKATIE OVER DE DOOD VAN D' Hr. MITSEN, DOOR J. DE HARTOGH, 4°.
Machiavelli Historia Florentina, 12°.
Malvezzi Opere Historische e Politische, 12°.
—— *Il Tarquino Superbo*, 12°.
Manzini Opere, 12°.
—— *furori della Gioventu Esercitii Rhetorici*, 12°.
Marechal Francois, 12°.
Mascampi Epitome Historiæ Civilis, 8°.
Medulla Justinianea, 12°.
Melanges Historiques, 12°.
Menken de la Charlatanerie des Savans, 8°.
Moïens de reunir les Protestans avec l'Eglise Romaine 12°.
Mollenbroccius de Arthritide, 8°.
Monavii Bronchotomia, quæ est gutturis aperiendi artificiosa ratio, 8°.
Mort Idea Actionis Corporum 12°.
MUNDI OPERA OMNIA MEDICO-PHYSICA, 8°.
Oeuvres de Mr. Le Noble 12°. 19 Voll.
Oudini Commentarius de Scriptoribus Ecclesiæ Antiquis, fol. 3 Voll.
Pacii Analysis & Isagoge 8°. 2 Voll.
Parladorii Opera Juridica, 4°. 2 voll.
Passe partout Galant, 12°.
PASTOR FIDO, 32°. Appresso P. Mortier.
Petau Histoire Universelle, 12°. Paris 5 Tomes.
Pilpay Conseils & Maximes, 8°.
Plazzonus de Partibus Generationis inservientibus, 12°.
PLUIMERS GEDICHTEN 4°. TWEEDE DEEL.
Pourtraits des plus Celebres Professeurs de Leide, 4°.
Preparations pour la Ste. Cene, avec le Voyage de Bethel, 12°.
Rochefoucault Reflexions ou Sentences & Maximes morales, 12°.
Schiere Doctrina Testamentorum & Fœderum omnium Divinorum, 4°.

Se-

CATALOGUS LIBRORUM.

Multi etiam alii apud Eoſdem reperiuntur.

AVIS AU RELIEUR.

LE Relieur prendra garde que le papier qui eſt à côté des Figures doit être conſervé pour faire deborder les Figures hors du Livre, & les placer ſuivant la page marquée ſur chaque planche.

BERIGT AAN DEN BOEK-BINDER.

DEn Boek-binder zy gewaarſchout het papier ter zyde de Figuren niet af te ſnyden; maar zodanig in te ſetten, dat de Figuren buyten het Boek uitſlaan: dezelven moeten geplaaſt werden volgens de paginaas op yder Tabel genoteert.

ADMONITIO BIBLIOPEGIS,

ubi locandi ſint Tituli.

AVIS AU RELIEUR,

Pour placer les Titres ſuivant les Pages marquées ci-deſſous.

BERIGT AAN DEN BOEKBINDER,

Om en alwaar de Titels te plaatſen.

1. *Chriſtiani Hugenii Opera Mechanica. Tomus Primus.* (ante) (devant) voor Pag. 1. (& poſt *Hugenii Vitam*) (apres *Hugenii Vita*) agter Hugenii Vita.

2. *Chriſtiani Hugenii a Zulichem, dum viveret Zelhemi Toparchæ, Opera Varia. Volumen Secundum.* (ante)(devant) voor Pag. 309.

3. *Chriſtiani Hugenii Opera Geometrica. Tomus Secundus.* (etiam ante) (auſſi devant) mede voor Pag. 309. (& poſt Titulum *Voluminis Secundi*) (& après le Titre de *Volumen Secundum*) en na de Titel van *Volumen Secundum.*

4. *Chriſtiani Hugenii Opera Aſtronomica. Tomus Tertius.* (ante) (devant) voor Pag. 521.

5. *Chriſtiani Hugenii Opera Miſcellanea. Tomus Quartus.* (ante) (devant) voor Pag. 723.